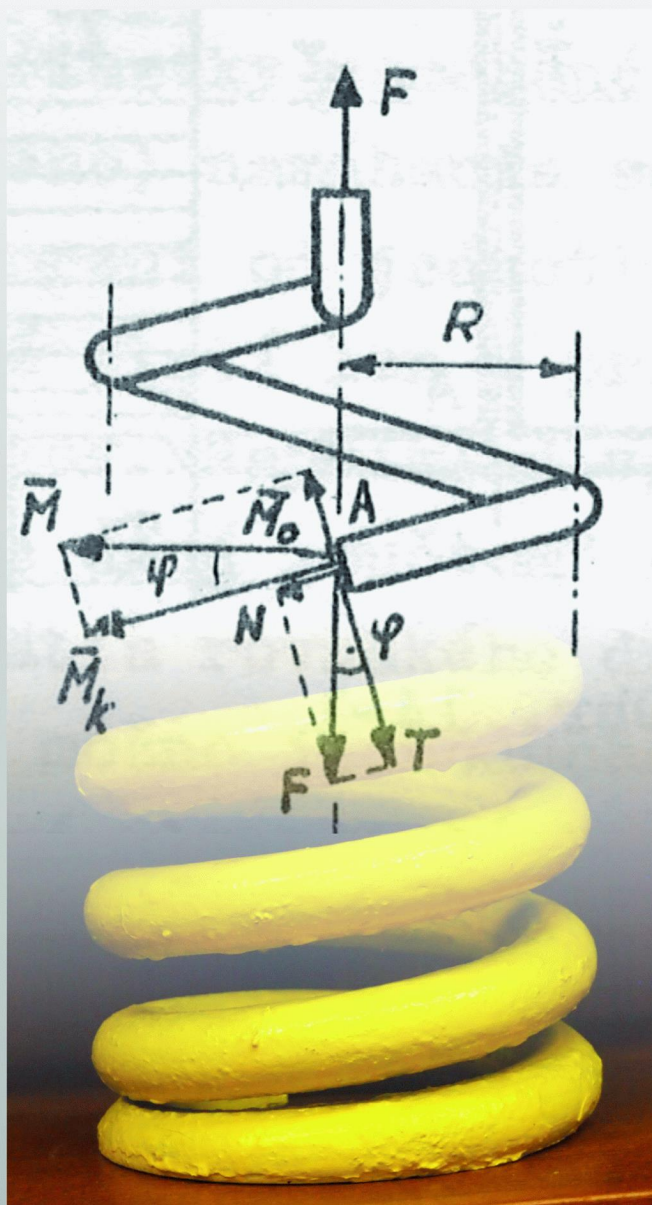


Vladimír Chmelko    Martin Garan    Miroslav Šulko



# Pružnosť a pevnosť

©Ing. Vadimír Chmelko, PhD., Ing. Martin Garan, PhD.,  
Ing. Miroslav Šulko, PhD.

Recenzenti: doc.Ing. Vladimír Kutiš, PhD.  
Ing. Vladimír Kliman, DrSc.

Grafický návrh obálky: ©Ing. Monika Chmelková

Schválilo Vedenie Strojníckej fakulty dňa 20.3.2012 a Vedecká rada Strojníckej fakulty STU  
v Bratislave dňa 22.6.2015 ako vysokoškolskú učebnicu.

## Predhovor

Pružnosť a pevnosť ako fyzikálna veda je súčasťou mechaniky a preto sa niekedy nazýva mechanika vnútorných síl. Tento odbor, ako aj mnohé iné vedné obory, vznikol z bezprostredných praktických potrieb ľudí pri navrhovaní a stavbe konštrukcií, keď inžinier musí v štádiu projektovania a navrhovania konštrukcií, ich častí a prvkov voliť materiál a prierezové charakteristiky tak, aby konštrukcia spoľahlivo odolávala pôsobeniu vonkajších síl, t. j. aby bola zaručená jej bezpečná prevádzka.

Učebnica je určená predovšetkým študentom strojnícnych fakúlt technických univerzít, kde na bakalárskom stupni štúdia je predmet Pružnosť a pevnosť základný profilový predmet. Predpokladá vedomosti z vysokoškolskej matematiky, náuky o materiáloch, statiky a fyziky. Jej obsah je zvolený tak, aby pokrýval súčasné sylaby tohto predmetu na väčšine strojnícnych fakúlt na Slovensku, ktoré sa počas prestavby na dvojstupňové štúdium významne zmenili. Na fakultách, kde ostal tento predmet v rozsahu dvoch semestrov, bude potrebné doplniť nadväzujúcu učebnicu Aplikovaná pružnosť a pevnosť.

Učebnica nadväzuje na skriptá Silovský – Oliva: Pružnosť a pevnosť I., II., (1968) a Puchner a kol.: Pružnosť a pevnosť I., II. (1978) s ohľadom na dnešný rozsah a obsah výučby tohto predmetu na bakalárskom stupni štúdia. Integruje skúsenosti pedagógov Slovenskej technickej univerzity, ako bol najmä prof. Puchner, prof. Vadovič, doc. Kamenský, doc. Tesař, doc. Benča, doc. Poděbradský, prof. Élesztös a ďalší, počas vyše piatich desaťročí výuky tohto predmetu. Prístupom k riešeniu jednotlivých druhov namáhania a definovaním výpočtových postupov vychádza z fundamentálnej učebnice Timoshenko: Pružnosť a pevnosť I., II. (1951). Celkovo obsahuje 9 kapitol. V úvode sú definované základné pojmy tejto náuky, ktorým je venovaná väčšia pozornosť, ďalej nasledujú postupy výpočtu vnútorných síl, napätí a deformácií pre základné druhy namáhania. Záverečné dve kapitoly sú venované kombináciám základných druhov namáhania a strate stability prútov.

V každej kapitole je niekoľko príkladov ilustrujúcich použitie odvodených vzťahov.

Za poslednou kapitolou sú stručné životopisy významných osobností, ktoré prispeli do náuky Pružnosti a pevnosti a ktorí boli v tejto učebnici spomínaní. Učebnica pružnosti a pevnosti, tak ako celá táto náuka, má za cieľ nielen odovzdať vedomosti z mechaniky tuhých telies vo forme prístupnej študentom, ale vypestovať u nich zručnosť v počítaní priebehov namáhania jednoduchých prvkov konštrukcií a dokázať ich pevnostne posúdiť resp. dimenzovať. S týmto cieľom je za väčšinou kapitolou autotest predstavujúci niekoľko otázok a príkladov

vyžadujúcich samostatné počítanie. Veríme, že študentom pomôžu pri štúdiu a príprave na skúšku.

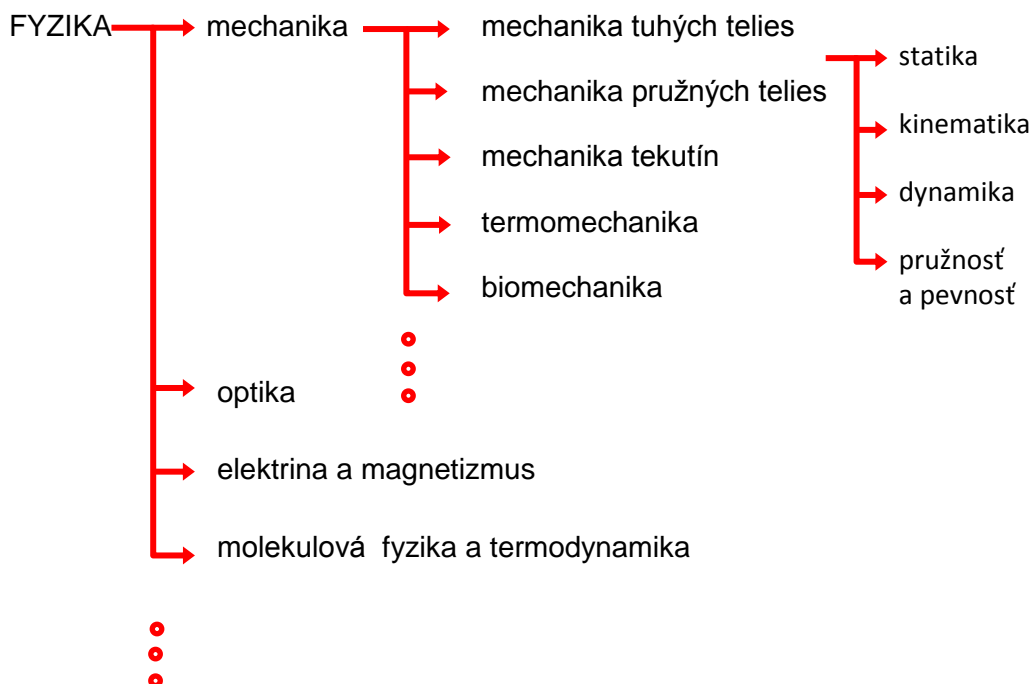
## OBSAH

<b>1. Základné pojmy .....</b>	<b>5</b>
1.1 Pojem napätia a deformácie .....	7
1.2 Základné druhy namáhania .....	14
1.3 Charakteristiky materiálu .....	17
<b>2. Ťah, tlak .....</b>	<b>24</b>
2.1 Úlohy prostého ťahu.....	24
2.2 Namáhanie odstredivou silou .....	29
2.3 Konštrukcie s prútovým prvkom .....	32
Autotest .....	41
<b>3. Kvadratické momenty plôch .....</b>	<b>42</b>
<b>4. Krútenie .....</b>	<b>49</b>
4.1 Krútenie kruhových prierezov .....	49
4.2 Krútenie nekruhových prierezov .....	55
4.2.1 Krútenie tenkostenných uzatvorených profilov .....	57
4.2.2 Krútenie obdĺžnikových profilov .....	61
4.2.3 Krútenie eliptických prierezov.....	63
4.2.4 Krútenie trojuholníkových prierezov.....	64
4.2.5 Krútenie šesťuholníkových prierezov.....	64
Autotest .....	69
<b>5. Napätosť a pretvorenie .....</b>	<b>71</b>
5.1 Priamková napätosť .....	72
5.2 Rovinná napätosť .....	75
5.3 Súvis medzi napätosťou a pretvorením .....	81
5.4 Energia napätosti .....	86
5.5 Hypotézy pevnosti materiálu .....	91
Autotest .....	99
<b>6. Ohyb priamych nosníkov .....</b>	<b>100</b>
6.1 Normálové napätia v ohýbanom nosníku .....	105
6.2 Šmykové napätia v ohýbanom nosníku .....	109
6.3 Deformácia nosníkov .....	124
6.4 Castiglianove vety .....	129
Autotest .....	139
<b>7. Strih .....</b>	<b>141</b>
<b>8. Kombinované namáhanie.....</b>	<b>142</b>

8.1 Skrutková pružina .....	145
8.2 Lomené nosníky .....	147
8.3 Slobozakrivené nosníky.....	151
<b>9. Strata Stability .....</b>	<b>156</b>
Autotest .....	170
<b>Osobnosti .....</b>	<b>171</b>

## 1 ZÁKLADNÉ POJMY

Úvodom je potrebné zorientovať sa v systéme vedných disciplín. Kde možno zaradiť náuku o Pružnosti a pevnosti? Určite sme na pôde fyziky, ako vidno z nasledujúcej schémy:



Kinematika a dynamika sú časti mechaniky, ktoré skúmajú pohybové stavy telies s kladným počtom stupňov voľnosti. \*

Statika je časť mechaniky, ktorá skúma stav telies s počtom stupňov voľnosti rovným nule, pričom telesá skúma ako dokonale tuhé.

Pružnosť a pevnosť skúma stav telies s počtom stupňov voľnosti rovným a menším ako nula, pričom telesá sa môžu deformovať.

Pre úplnosť ešte treba pripomenúť najčastejšie druhy väzieb (Obr. 1), ktoré budeme používať pri modeloch telies v náuke o Pružnosti a pevnosti:

---

\* Stupňom voľnosti označujeme nezávislý smer a spôsob pohybu. V priestore má teleso možnosť translačného pohybu v smere troch nezávislých osí a rotačného pohybu okolo týchto osí – t. j. 6 stupňov voľnosti. V rovine má 3 stupne voľnosti – translačný pohyb v smere dvoch nezávislých osí a rotáciu v tejto rovine.

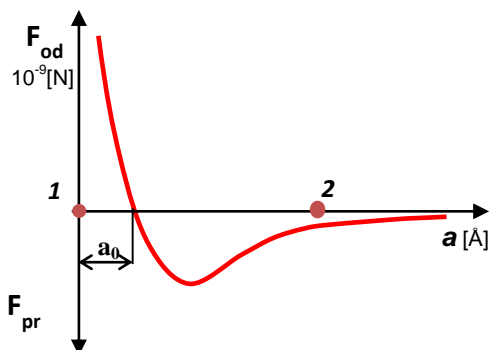
		<p><b>Posuvný kĺb</b></p> <p>odobraté stupne voľnosti: 1</p> <p>zostávajúce stupne voľnosti: 2</p>
		<p><b>Pevný kĺb</b></p> <p>odobraté stupne voľnosti: 2</p> <p>zostávajúce stupne voľnosti: 1</p>
		<p><b>Votknutie</b></p> <p>odobraté stupne voľnosti: 3</p> <p>zostávajúce stupne voľnosti: 0</p>
		<p><b>Posuvné votknutie</b></p> <p>odobraté stupne voľnosti: 2</p> <p>zostávajúce stupne voľnosti: 1</p>

Obr. 1. Základné druhy väzieb.



## 1.1 Pojem napätia a deformácie

Ak chceme pochopiť fyzikálne pozadie pojmu napätie, musíme sa pozrieť až do atómovej štruktúry materiálu. Sily, ktoré pôsobia medzi atómami, sú znázornené na *Obr. 1*. Sú to elektromagnetické sily medzi elektrónovými obalmi atómov a menia sa so vzdialenosťou medzi atómami – pri veľkej vzdialenosti (vzhľadom na ich rozmery) prevládajú príťažlivé sily, pri menších vzdialenostiach naopak prudko narastajú odpudivé sily. Toto nastavenie medziatómových síl umožňuje vytvárať väzby medzi atómami a na druhej strane bráni ich fúzii.



*Obr. 2. Silové pôsobenie medzi dvoma časticami v závislosti od ich vzdialenosti*

Sledujme teraz správanie sa dvoch atómov, z ktorých jeden bude pevne spojený s počiatkom súradného systému (poloha 1) a druhý bude voľný v relatívne veľkej vzdialenosti od prvého atómu (*Obr. 2*). Príťažlivé sily prevládajúce v tejto vzdialenosti pritiažnu vzdialený atóm, ktorý sa bude pohybovať smerom k atómu spojenému s počiatkom súradného systému až do takej blízkosti, keď ho odpudivé sily zastavia a posunú do vzdialenosti, v ktorej opäť začnú prevládať príťažlivé sily, ktoré ho pritiažnu. Tento proces sa bude opakovať až do ustálenia sa polohy druhého atómu vo vzdialenosti  $a_0$ , predstavujúcej rovnováhu príťažlivých a odpudivých síl. V tejto rovnovážnej vzdialenosti, ktorá má pre každý materiál inú hodnotu, zotrávajú atómy v nezaťaženom stave.

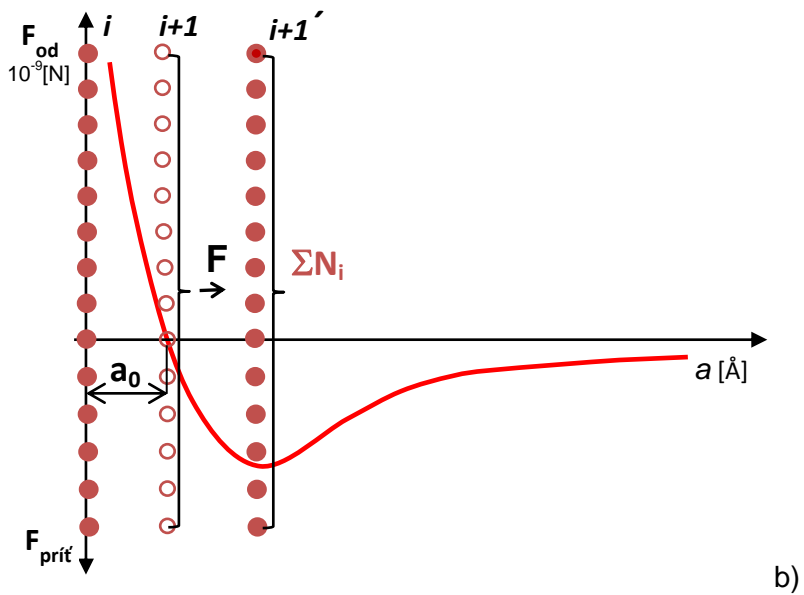
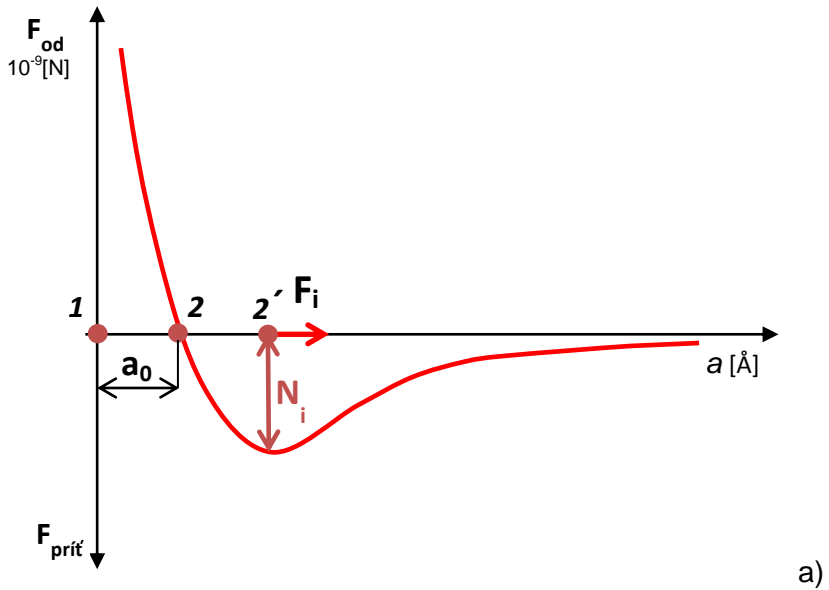
Vychýlenie druhého atómu z tejto rovnovážnej polohy možno dosiahnuť vo všeobecnosti troma spôsobmi:

a) pôsobením vonkajšej sily  $F_i$  v smere horizontálnom (*Obr. 3*), ktorá vychýlením atómu z rovnovážnej polohy 2 do polohy 2' spôsobí vznik prídavnej medziatómovej sily o veľkosti  $N_i$ .

Pôsobením vonkajšej sily  $F = \sum F_i$  na všetkých  $n$ -atómov v rovine prierezu  $i+1$  vyvoláme výslednú horizontálnu silu v zaťaženom priereze o veľkosti:

$$N = \sum_{i=1}^n N_i$$

Ak vonkajšia sila  $F$  pôsobila v smere normály k rovine prierezu, tak výsledná medziatómová sila  $N$  bude **sila normálová (osová)**.



Obr. 3. Vznik prídavnej medziatómovej sily medzi: a) dvoma atómami, b) dvoma rovinami atómov

b) pôsobením vonkajšej sily  $F_i$  v smere vertikálnom, ktorá vychýlením atómu z rovnovážnej polohy spôsobí vznik prídavnej medziatómovej sily o veľkosti  $T_i$ . Analogicky pôsobením vonkajšej sily  $F = \Sigma F_i$  na všetkých n-atómov v rovine prierezu i+1 vyvoláme výslednú vertikálnu silu v zaťaženom priereze o veľkosti

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

Ak vonkajšia sila  $F$  pôsobila v smere tangenciálnom k rovine prierezu, tak výsledná medziatómová sila  $T$  bude **sila tangenciálna (pričná)**.

c) pôsobením vonkajším momentom  $M$  (dvojicou síl), ktorý vychýlením atómu z rovnovážnej polohy spôsobí vznik prídavného medziatómového momentu o veľkosti  $M_i$ .

Analogicky pôsobením vonkajším momentom  $M = \Sigma M_i$  na všetkých n-atómov v rovine prierezu i+1 vyvoláme výsledný moment v zaťaženom priereze o veľkosti

$$M = \sum_{i=1}^n M_i$$

Ak vonkajší moment  $M$  pôsobil v rovine priečného rezu, tak výsledný medziatómový moment  $M$  bude **krútiaci (označujeme ho  $M_k$ )**, v prípade jeho pôsobenia v rovine pozdĺžneho rezu bude výsledný medziatómový moment **ohybový (označujeme ho  $M_o$ )**.

Z tejto schémy vzájomného silového pôsobenia atómov vidíme, že v dôsledku pôsobenia vonkajších síl sú atómy vychýľované z kludových (rovnovážnych) polôh, čo má za následok vznik prídavných medziatómových síl rôzneho smeru a konfigurácie  $N, T, M_k, M_o$ , ktoré spoločne nazývame **vnútorné silové veličiny**.

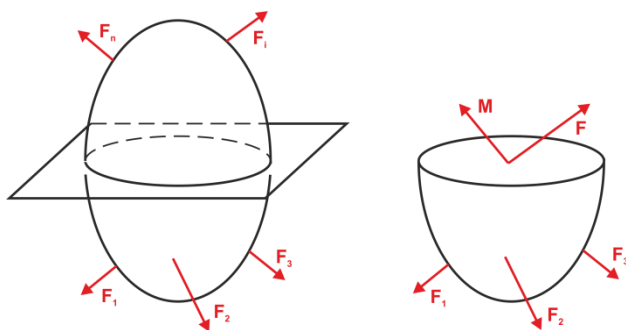
Vo všeobecnosti môžeme zaviesť porovnávaciu veličinu – **t. j. napätie** - v tvare pomernej veličiny

$$\text{napätie} = \frac{\text{vnútorná veličina}}{\text{charakteristika prierezu}}$$

Určovanie priebehov vnútorných silových veličín a výpočet napätí v prierezoch budeme rozoberať postupne pre jednotlivé druhy namáhania.

## Definícia napätia

Vnútorne sily možno zistiť metódou myšleného rezu. Ak je teleso zaťažené vonkajšími silami a urobíme v ňom myšlený rez, pre zachovanie rovnováhy musíme vložiť do roviny rezu vnútorné sily (výslednice medziatómových síl v rovine rezu) – silu všeobecného smeru  $F$  a moment  $M$  (Obr. 4.).

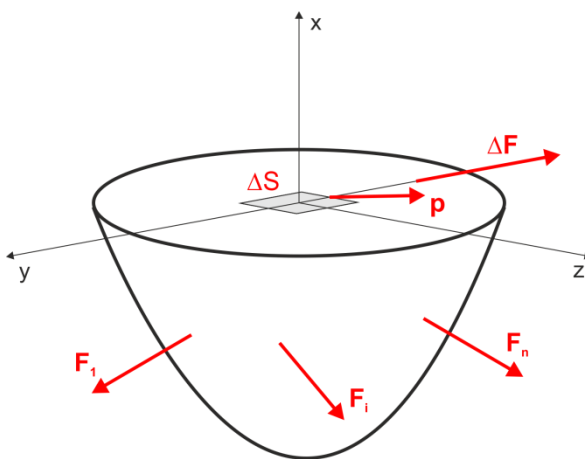


Obrázok 4. Myslený rez v telese s výslednicami síl a momentov

Pre odrezanú časť telesa s vloženými vnútornými silami musia platiť statické podmienky rovnováhy – pre rovinnú sústavu síl napr. v tvare:

$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma M=0 \qquad (1.3)$$

Tento postup nám umožní zisťovať priebehy vnútorných síl pozdĺž skúmaného telesa. Pre zistenie rozloženia vnútorných síl v priereze bude potrebné v rezovej rovine vyňať element  $\Delta S$  (Obr. 5.). Na tento element plochy pripadá časť vnútornej sily  $\Delta F$ .



Obr. 5. Rez zaťaženým telesom

Veľkosť vnútornej sily v každom bode telesa je určená jej intenzitou resp. napätím, ktoré je definované ako časť vnútornej sily pripadajúca na jednotkovú plochu

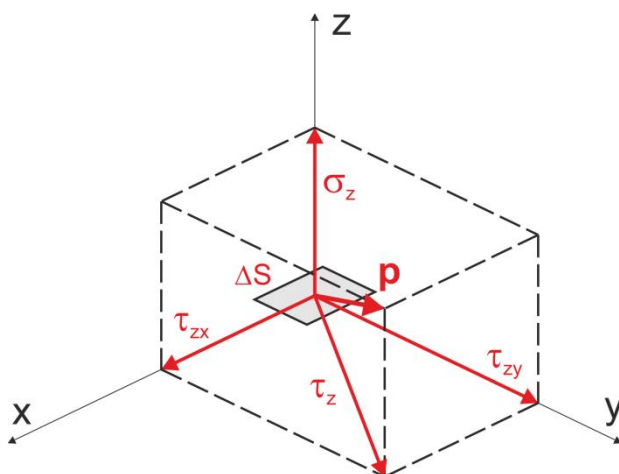
$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Pri všeobecnom rozdelení vnútornej sily v priereze je potrebné napätie definovať pomocou limity

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (1.4)$$

Pre jednoduchšiu prácu s napätím bude výhodnejšie rozkladať ho do smeru normály a smeru dotýčnice k rovine rezu (Obr. 6).

Normálovú zložku všeobecného napätia v priereze nazývame normálovým napätím  $\sigma$ , ktoré budeme označovať vzhľadom na rovnobežnosť so súradnicovou osou  $\sigma_x$ . Zložku všeobecného napätia do smeru dotýčnice k rovine rezu nazývame tangenciálnym (šmykovým) napätím  $\tau_z$ . Toto všeobecne orientované napätie bude výhodné rozložiť do zložiek rovnobežných so súradnicovými osami. Šmykové napätie potom označujeme dvoma indexami tak, že prvý index znamená normálu k elementu plochy a druhý udáva os, s ktorou je šmykové napätie rovnobežné.



Obr. 6. Rozklad na zložky napätia

Zložky napätí majú charakter vektorov, takže platí:

$$\begin{aligned} \tau_x &= \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \\ p &= \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_z^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

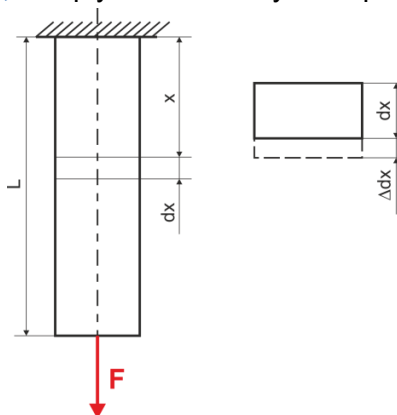
**Deformáciou** telesa označujeme zmenu jeho tvaru. Vo všeobecnosti definujeme len dva druhy deformácie:

- zmena dĺžky,
- zmena uhla

Akúkoľvek zmenu tvaru telesa od vonkajšieho zaťaženia možno voči jeho pôvodnému tvaru opísať len týmito dvoma druhmi deformácie – zmenou dĺžky a zmenou uhla.

### Zmena dĺžky

Tyč namáhaná ťahom sa predlžuje. Diferenciálne malý element, vybratý vo vzdialenosti  $x$  o hrúbke  $dx$ , sa vplyvom vnútorných síl predlži o  $\Delta dx$  (Obr. 7).



Obr. 7. Zmena dĺžky

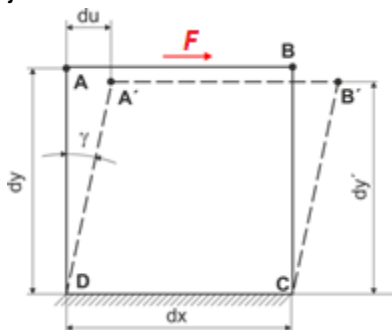
Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.6)$$

sa nazýva pomerné predĺženie.

### Zmena uhla

Rovinný pravouhlý element so stranami  $dx$  a  $dy$  sa vplyvom tangenciálnej sily zdeformuje tak, ako ukazuje Obr. 8.



Obr. 8. Deformácia uhla

Zmenu uhla možno vyjadriť vzťahom

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{du}{dy}$$

za predpokladu, že  $dy' = dy$ . Tento predpoklad je dobre splnený pri malých veľkostiach uhla  $\gamma$ . Vtedy možno napísať vzťah v tvare

$$\operatorname{tg}\gamma = \gamma = \frac{du}{dy} \quad (1.7)$$

ktorý predstavuje pomerné skosenie (uhlové pretvorenie).

Deformácie budeme predpokladať spojité, premenné od bodu k bodu, nemeiace sa skokom ale elementárnymi prírastkami. Deformácie (pomerné predĺženie aj uhlové skosenie) predpokladáme malé oproti rozmerom telies, vtedy s dostatočnou presnosťou platí:

$$\begin{aligned} (1 \pm \varepsilon)^2 &= 1 \pm 2\varepsilon \\ \sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma &= \gamma \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ak by deformácie neboli malé, potom by sa počas zaťaženia nezanedbateľne menila konfigurácia zaťažujúcich síl, čo by znamenalo nelinearitu medzi zaťažením a deformáciou aj pre lineárny materiál. Klasickú teóriu pružnosti dokonale pružných látok, ktoré sa riadia Hookovým zákonom, nazývame preto „lineárna teória“.

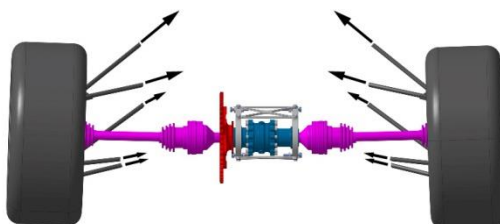
## 1.2 Základné druhy namáhania

Z hľadiska vnútorných síl a deformácií, ktoré zaťaženia v prevádzke spôsobujú, rozoznávame 4 základné druhy namáhania, ktoré priblížime na konštrukcii študentského monopostu formula SAE (STU Bratislava 2009):



### 1. ťah (tlak)

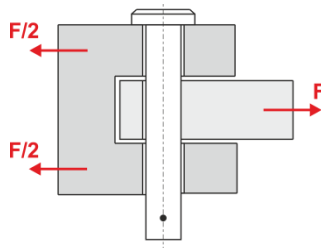
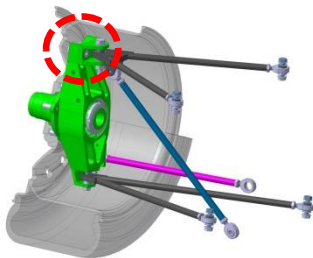
O jednoduchom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, keď vonkajšie zaťaženie spôsobí v priečnom reze telesa len normálovú (osovú) silu  $N$ .



### 2. šmyk

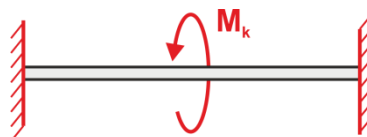
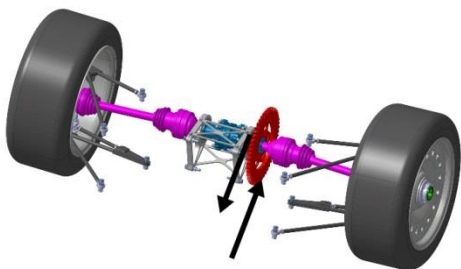
O jednoduchom šmyku hovoríme vtedy, keď vonkajšie zaťaženie spôsobí v priečnom reze telesa len tangenciálnu (priečnu) silu  $T$ .





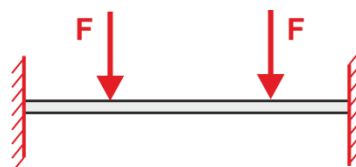
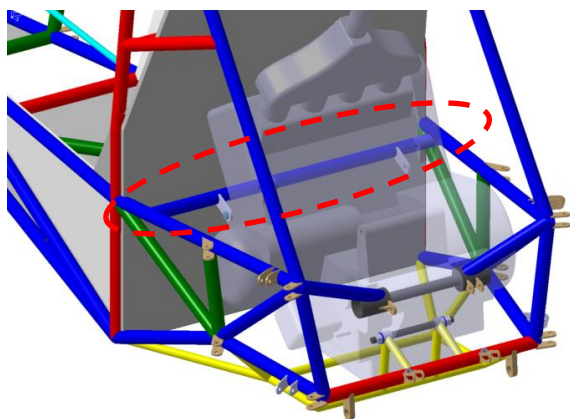
### 3. krútenie

O jednoduchom krútení hovoríme vtedy, keď vonkajšie zaťaženie spôsobí v priečnom reze telesa len moment  $M$  (označujeme ho  $M_k$ ), ktorý pôsobí v rovine priečného rezu.

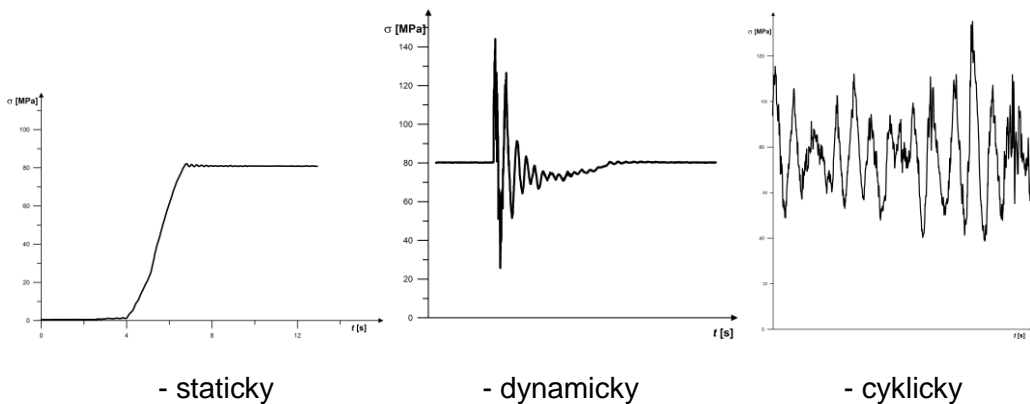


### 4. ohyb

O jednoduchom ohybe hovoríme vtedy, keď vonkajšie zaťaženie spôsobí v priečnom reze telesa len moment  $M$ , ktorý pôsobí v rovine pozdĺžneho rezu. V praxi sa však takýto prípad vyskytuje len veľmi zriedkavo, preto o namáhaní v ohybe budeme hovoriť vtedy, keď vonkajšie zaťaženie spôsobí v priečnom reze moment  $M$  (označujeme ho  $M_o$ ) a tangenciálnu (priečnu) silu  $T$ .



Z hľadiska časového priebehu môžu tieto namáhania prebiehať



V tejto učebnici sa budeme zaoberať len takými druhmi zaťaženia, ktoré sú z hľadiska časového priebehu statické.

### 1.3 Charakteristiky materiálu

Pri natiahnutí gumeného valčeka a ocelového valčeka rovnakou silou bude výsledný zdeformovaný tvar odlišný pre každý materiál. Rovnako aj sila potrebná na rovnaké predĺženie týchto valčekov bude odlišná. Celkový deformačný stav a zodpovedajúca veľkosť napätí budú preto závisieť od druhu materiálu, resp. od jeho mechanických vlastností.

Základné pevnostné a deformačné charakteristiky materiálu sa získavajú ťahovou skúškou, ktorá sa realizuje pomocou ťahacieho stroja. Realizáciu a vyhodnotenie takýchto skúšok upravuje norma STN EN 10002-1. Pre správne a úplné vyhodnotenie ťahovej skúšky je nevyhnutný súčasný záznam meranej sily a zodpovedajúcej deformácie, ktorá sa musí merať snímačom deformácie (meranie celkového predĺžovania skúšobnej vzorky je nepostačujúce). Výsledky meraní úplných ťahových diagramov sú zobrazené na Obr. 9.

Z ťahového diagramu (Obr. 9d) možno získať dôležité pevnostné parametre materiálu – medzu klzu  $\sigma_{kt}$  a medzu pevnosti  $\sigma_{pt}$ .\*

Medzou pevnosti materiálu sa označuje napätie, získané ako maximálna sila dosiahnutá pri ťahovej skúške, delená pôvodnou veľkosťou prierezu skúšanej vzorky.

Medza klzu je pri nelegovaných oceliach charakterizovaná bodom poklesu zaťažujúcej sily pri stúpajúcej deformácii a jej nasledujúcim nárastom (horná a dolná medza klzu), pri legovaných oceliach a neželezných materiáloch sa definuje ako napätie zodpovedajúce plastickej deformácii o veľkosti 0,2 % na ťahovom diagrame.

Dôležitou charakteristikou materiálu je tzv. Youngov modul pružnosti v ťahu  $E$ , ktorý možno získať ako tangens uhla sklonu lineárnej oblasti ťahového diagramu medzi napätím a pomerným predĺžením. Táto lineárna oblasť závislosti napätia na pomernom predĺžení je pre mechaniku poddajných telies veľmi dôležitá a opisuje sa tzv. Hookovým zákonom v tvare

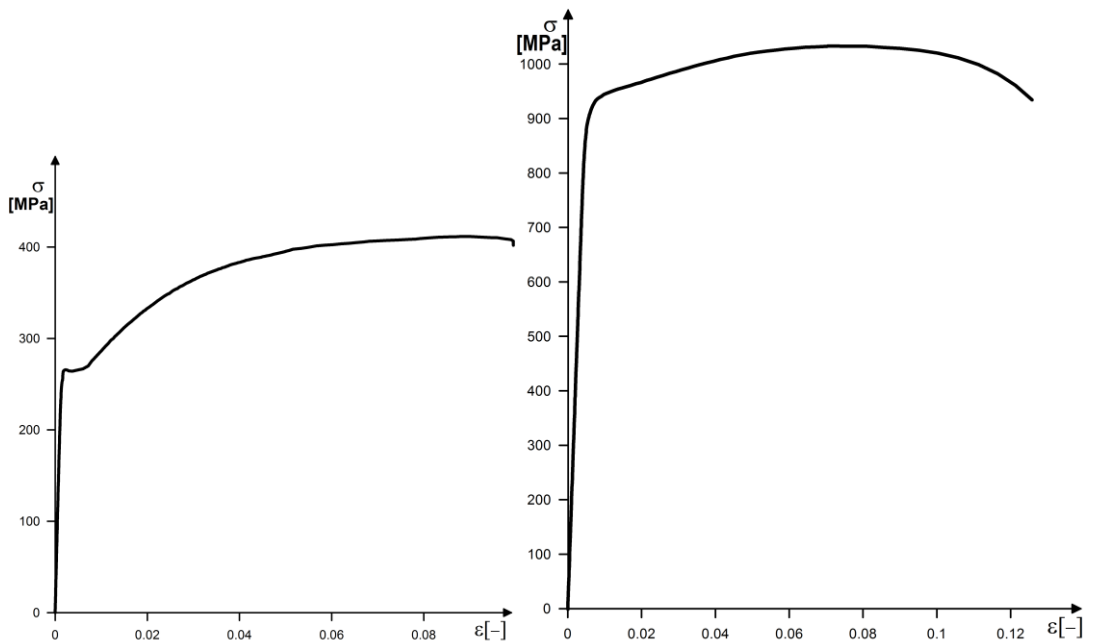
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.9)$$

kde konštanta  $E$  nadobúda pre každý materiál inú hodnotu. Pre ocele budeme uvažovať s hodnotou

$$E=210000\text{MPa}.$$

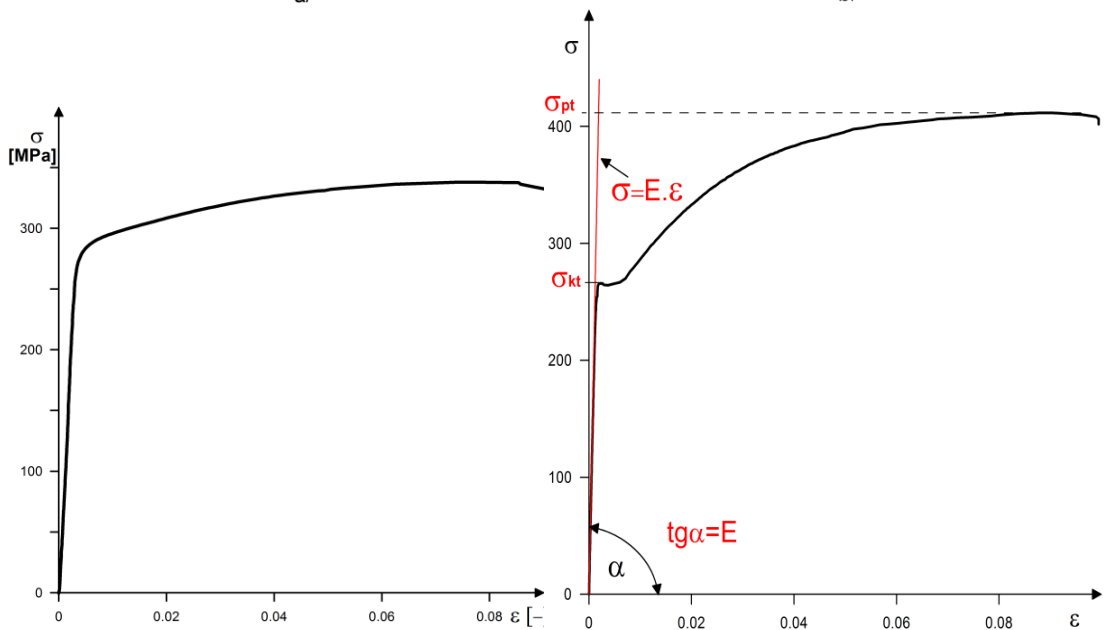
---

\* V materiálových normách sa medza klzu označuje  $R_e$  a medza pevnosti  $R_m$ . V mechanike sa písmenom  $R$  označujú silové reakcie, preto používame symbol pre napätie.



a/

b/



c/

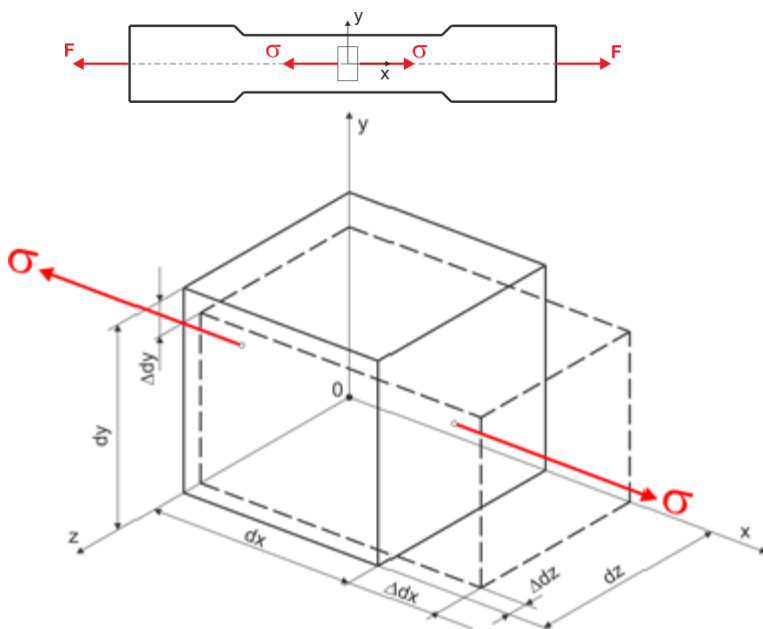
d/

Obr 9. Ťahové diagramy a) nelegovaná ocel; b) legovaná ocel; c) hliníková zliatina  
d) charakteristiky materiálu v ťahovom diagrame

Fyzikálny rozmer Youngovho modulu pružnosti je zhodný s rozmerom napätia, pretože pomerné predĺženie je bezrozmerná veličina. Ak v rovnici (1.5) položíme  $\varepsilon = 1$ , tak modul pružnosti  $E = \sigma$ , t. j. Youngov modul pružnosti je sila delená počiatočnou veľkosťou prierezu, potrebná na predĺženie priamej tyče sledovaného materiálu na dvojnásobnú dĺžku (vtedy  $\varepsilon = 1$ ).

Ak je modul pružnosti určitého materiálu vo všetkých smeroch rovnaký, hovoríme o **izotropnom materiáli**. Pri anizotropných materiáloch je naopak modul pružnosti závislý od smeru zaťažovania. Ocele môžeme vo všeobecnosti považovať za izotropné a homogénne materiály.

Pri skúške ťahom sa však materiál nielen predĺži, ale aj zúži (deformuje sa aj v dvoch kolmých smeroch). Situáciu možno dobre zobrazit' a opísať na elementárnom hranole o rozmeroch  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , vybratého zo skúšobnej tyče (Obr. 10.).



Obr. 10. Priestorová deformácia pri jednoosovom ťahu

Deformácia v smere zaťaženia je daná Hookovým zákonom

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}$$

Deformácie v kolmých smeroch možno vyjadriť vzťahmi

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

kde konštanta  $\nu$  sa nazýva Poissonovo číslo materiálu a je definované ako záporne vzatý pomer priečného zúženia k pozdĺžnemu predĺženiu

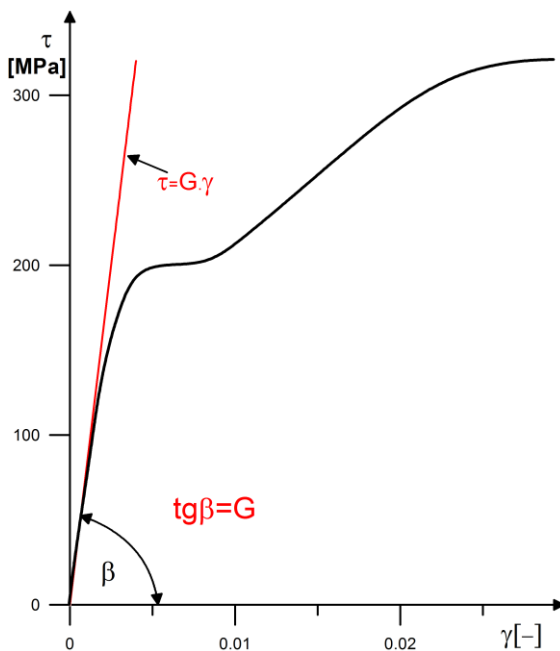
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (1.10)$$

Poissonovo číslo je vždy kladné a bezrozmerné a pre ocele má hodnotu 0,3. Hodnoty tejto druhej dôležitej materiálovej konštanty pre ostatné kovové a nekovové materiály sú uvedené v *Tab. 1*.

Podobný diagram ako pri skúške ťahom možno získať pri skúške krútením, kde je potrebné súčasne merať zaťažujúci krútiaci moment a zodpovedajúci uhol skrútenia. Na závislosti šmykového napätia a uhlového pretvorenia (*Obr. 11.*) je potom vidieť charakteristiky materiálu v krútení – medzu klzu v krútení, medzu pevnosti v krútení. Lineárna oblasť diagramu sa dá rovnako opísať rovnicou

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (1.11)$$

ktorá je pre izotropné materiály len priamym dôsledkom Hookovho zákona. Konštanta  $G$  sa označuje ako modul pružnosti v šmyku a pre oceľ nadobúda hodnotu  $G = 80\,000$  MPa.



*Obr. 11. Diagram pri zaťažení ocelevej trubky krútením*

Hodnoty Youngovho modulu pružnosti a pevnostných vlastností kovových a niektorých nekovových materiálov sú v *Tab. 1*.

*Tabuľka 1. Pevnostné charakteristiky a materiálové konštanty kovových materiálov*

	$\sigma_{kt}$ (Re) [MPa]	$\sigma_{pt}$ (Rm) [MPa]	E [ $10^5$ MPa]	G [ $10^5$ MPa]	$\nu$ [-]
Oceľ	200-1000	350-1500	2,1	0,8	0,3
Tvárna liatina	210-480	330-800	1,7	0,45	0,275
Sivá liatina	100-250	120-300	0,75-1,3	0,45	0,26
Meď	60	220	1,1	0,48	0,34
Hliník	25-70	65-100	0,69	0,26	0,345
Horčík	-	-	0,45	0,17	0,29
Dural	140-310	190-580	0,7	0,27	0,35
Bronz	100-500	210-730	0,7-1,05	0,4	0,31-0,35
Mosadz	150-500	200-800	1,05	0,35	0,3 - 0,4
Titan	250	340	1,1	0,4	0,32
Wolfrám	525÷800	720÷3000	4,11	1,61	0,28
Platina	480	800	1,68	0,61	0,38
Nikel	140	320	1,7-2,1	0,76	0,31
Mangán	400	475	2,0	0,8	0,24
Vanád	776	800	1,26	0,47	0,32- 0,36
Chróm	-	282	2,79	1,15	0,21
Iridium	234	623	5,28	2,1	0,26
Molybdén	-	784÷980	3,29	2,0	0,5
Striebro	-	150	0,83	0,3	0,37
Zlato	-	229	0,78	0,27	0,44
Cín	-	30	0,5	0,18	0,39
Platina	-	350	1,68	0,61	0,38

*Pevnostné charakteristiky a materiálové konštanty nekovových materiálov*

	$\sigma_{kt}$ (Re) [MPa]	$\sigma_{pt}$ (Rm) [MPa]	E [ $10^5$ MPa]	G [ $10^5$ MPa]	$\nu$ [-]
Drevo	-	95-225	0,1-0,12(0,005-0,01 - rovnob)	0,006	0,3
Guma	-	3-25	10-100MPa	-	0,45-0,5
Plast	-	25-65	0,015-0,035	-	
Sklenené vlákna	-	2400-4500	0,7-0,8	0,28	0,24
Uhlíkové vlákna	-	3900-5500	2,4-4,3	-	-
Betón (ťah)	-	0,5-5	0,15-0,25	0,42.E	0,2
Epoxy	-	55-80	0,035-0,1	-	-

## 1.4 Pevnostná kontrola, dimenzovanie

Cieľom každého konštruktéra je navrhovať funkčné konštrukcie, ktoré sú aj bezpečné a spoľahlivé. Posúdenie bezpečnosti konštrukcie robíme formou **pevnostnej kontroly**, v prípade návrhu konštrukcie uplatňujeme tzv. **dimenzovanie**.

Pevnostná kontrola súčiastky alebo konštrukcie vyžaduje znalosť dvoch rozhodujúcich hodnôt napätí:

- maximálnej hodnoty napätia v najviac namáhanom priereze súčiastky, resp. konštrukcie
- hodnotu dovoleného napätia pre použitý materiál

Nájdenie najviac namáhaného prierezu súčiastky alebo konštrukcie bude výsledkom určovania priebehu vnútorných síl v jednotlivých prierezoch súčiastok, ktoré postupne ukážeme pre všetky základné druhy namáhania. V jednotlivých prierezoch odvodíme rozloženie každej z vnútorných síl, t. j. napätia.

Hodnotu dovoleného napätia označujeme  $\sigma_{dov}$ . Je daná pomerom medzného napätia pre daný materiál a typ konštrukcie a miery bezpečnosti pre danú konštrukciu. Medzným napätím v reálnej prevádzke strojných konštrukcií býva najčastejšie uvažovaná medza klzu  $\sigma_{kt}$  ako hranica medzi pružnými a trvalými deformáciami <sup>2</sup>, pretože v prevádzke strojov a ich častí nie je prípustná trvalá zmena rozmerov. Voči medznej hodnote napätia musí mať konštrukcia požadovanú rezervu, ktorú označujeme ako miera bezpečnosti  $s$ . Pevnostná podmienka má potom tvar

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dov} \quad \text{resp.} \quad \sigma_{max} \leq \frac{\sigma_{kt}}{s}. \quad (1.12)$$

Pomocou rovnice (1.12) vykonávame tzv. *pevnostnú kontrolu* súčiastky alebo konštrukcie v najviac namáhanom priereze. Z tejto podmienky v štádiu návrhu resp. projektovania konštrukcie možno určiť rozmer prierezu alebo niektorú charakteristiku prierezu, čomu hovoríme *dimenzovanie*.

Uvedený postup sa zvyčajne označuje ako metóda dovolených napätí. V praxi sa niekedy používa aj metóda dovolených zaťažení, keď sú normou predpísané maximálne dovolené hodnoty vnútorných síl pre posudzované konštrukcie, resp. konštrukčné prvky. t. j.

---

<sup>2</sup> V niektorých prípadoch sa ako medzné napätie používa aj medza pevnosti materiálu, napr. pri tlakových nádobách, tlakových potrubíach a pod.



$$F_{max} \leq F_{dov} \text{ resp. } F_{max} \leq \frac{F_N}{s} \quad , \quad (1.13)$$

kde  $F_N$  je normované zaťaženie a  $s$  je miera bezpečnosti.

S týmto prístupom sa stretáme pri strate stability prútov v poslednej kapitole tejto učebnice.

Miera bezpečnosti je spravidla daná normou pre príslušný typ konštrukcie, resp. súčiastky a charakter jej prevádzky. Vo všeobecnosti miera bezpečnosti pokrýva preťaženie konštrukcie, ktoré okolnosti v prevádzke dovoľia. Napríklad miera bezpečnosti nosných prvkov výťahov býva vysoká ( $s \approx 10$ ), aby vylúčila ohrozenie života. Na druhej strane miera bezpečnosti nosných prvkov mostových konštrukcií býva relatívne nízka ( $s \approx 1,2 \div 1,5$ ), pretože rozhodujúcu časť zaťaženia predstavuje vlastná tiaž mosta, ktorá sa v prevádzke nemôže zmeniť.

## 2 ŤAH, TLAK

### 2.1 Úlohy prostého ťahu

Namáhanie ťahom resp. tlakom vzniká pri pôsobení zaťažujúcej sily v smere normály prierezu, resp. v smere spojnice ťažísk prierezov. V dôsledku tohto zaťaženia vzniká v priereze jediná vnútorná sila – normálová (osová) sila **N**.

V praxi sa so zaťažením jednoduchým ťahom prípadne tlakom stretávame pri nosných pilieroch, prvkoch strešných a žeriavových konštrukcií, skrutkových spojoch, rotujúcich ramenách a pod.

Od osových síl počítame v priereze normálové napätie. V priereze pôsobí toto napätie na elemente plochy v smere normály a čo do veľkosti musí platiť

$$\int_{(S)} \sigma_{(x)} \cdot dS = N_{(x)}$$

Pretože osová sila pôsobí ako výsledná vnútorná sila v priereze telesa, spôsobí rovnakú deformáciu (posunutie) celého prierezu. Veľkosť normálového napätia tak musí byť v každom bode prierezu rovnaká (Obr. 2.1b), t. j.

$$\sigma \cdot \int_{(S)} dS = N \Rightarrow \sigma = \frac{N}{S} \quad (2.1)$$

Deformáciou pri namáhaní ťahom (tlakom) je predĺženie (skrátene), ktoré odvodíme z definície pomerného predĺženia (Obr. 1.6.):

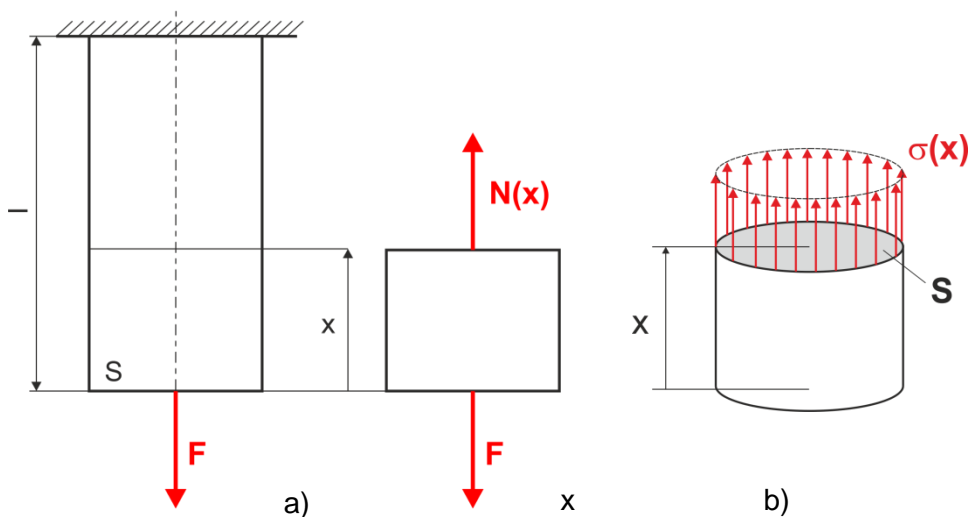
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx$$

Celkové predĺženie vypočítame ako súčet elementárnych predĺžení

$$\int_{(l)} \Delta dx = \int_{(l)} \varepsilon_x \cdot dx \Rightarrow \Delta l = \int_{(l)} \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_{(l)} \frac{N_x}{S_x E} dx \quad (2.2)$$

**Príklad 1:** Pre tyč na Obr. 2.1. vypočítajte priebeh normálových síl a priebeh napätia na celej dĺžke  $l$  a vypočítajte jej celkové predĺženie.

Priebeh vnútorných veličín vyšetrujeme **metódou myslenného rezu**, ktorá spočíva vo vložení prislúchajúcich vnútorných veličín do potrebného počtu rezov a ich určenie z podmienky rovnováhy odrezanej časti. Potrebný počet myslenných rezov závisí od počtu skokových zmien zaťaženia, prierezu, prípadne materiálu.



Obr. 2.1. Myslený rez a napätia v prúte namáhanom ťahovou silou

V našom prípade stačí urobiť jeden myslený rez vo vzdialenosti  $x$  od voľného konca, ako je na Obr. 2.1., do ktorého je potrebné vložiť kladnú osoú silu  $N(x)$  (pôsobí v smere normály von z rezu). Podmienka rovnováhy pre odrezanú časť je

$$N_{(x)} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{(x)} = F$$

Výsledok mysleného rezu platí na celej dĺžke tyče  $x \in (0, l)$ , pretože sa zaťaženie, prierez ani materiál pozdĺž tyče nemenia.

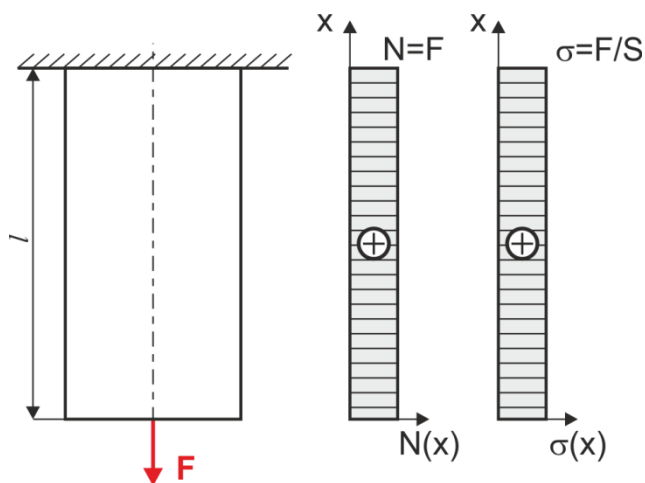
Tento postup použitia metódy mysleného rezu sa dá unifikovať do postupu vyšetrovania ktorejkoľvek vnútornej veličiny:

**Osová sila (pričná sila, moment) v danom myslenom reze sa rovná súčtu všetkých vonkajších osových síl (pričných síl, momentov) po jednej strane mysleného rezu.**

V prípade určovania osových síl v priereze platí dohoda, že pokiaľ vonkajšia zaťažujúca sila smeruje von z mysleného rezu, spôsobuje ťahové namáhanie a dávame jej znamienko plus, v opačnom smere spôsobuje tlak a dávame jej znamienko mínus.

Priebeh napätia pozdĺž rezu je potom

$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{S_{(x)}} = \frac{F}{S}$$

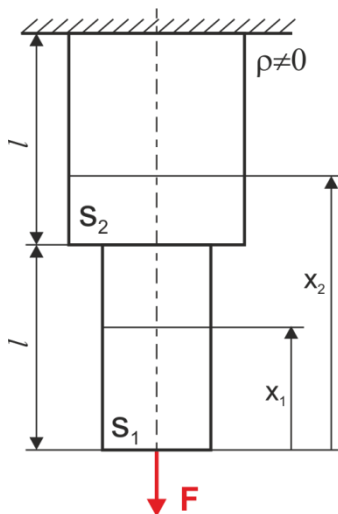


Obr. 2.2. Priebehy osových síl a napätí k príkladu 1

Celkové predĺženie vypočítame zo vzťahu (2.2)

$$\Delta l = \int_{(l)} \frac{N_x}{S_x E} dx = \int_{(l)} \frac{F}{SE} dx = \frac{Fl}{SE}$$

**Príklad 2.** Vypočítajte a znázornite priebeh osových síl a napätí pozdĺž tiahla na Obr. 2.3., pri ktorom je potrebné uvažovať aj vlastnú tiaž  $\rho$ . Vypočítajte aj celkové predĺženie tiahla.



Obr. 2.3. Tiahlo k príkladu 2

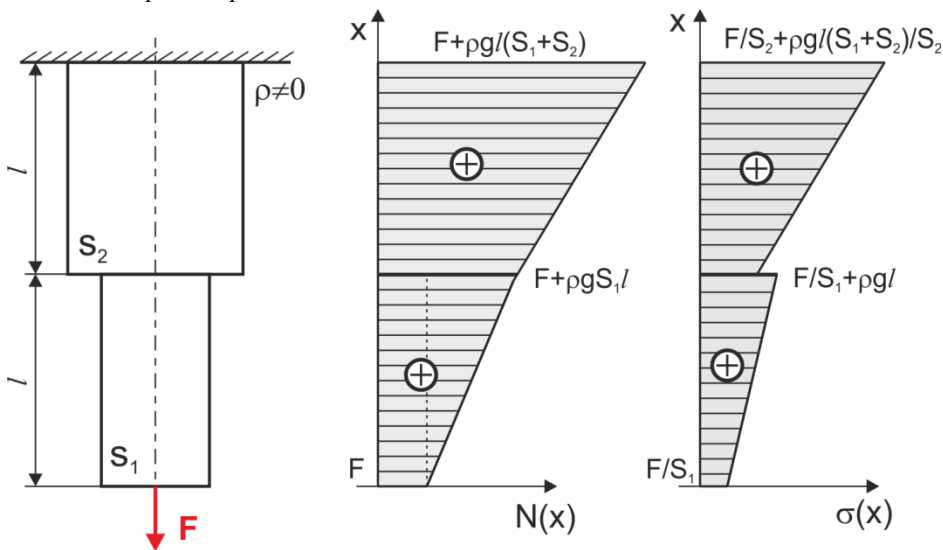
Priebeh osových síl vyšetríme v dvoch myšlených rezoch:

$$x_1 \in (0, l): N_{(x_1)} = F + \rho g S_1 x_1$$

$$x_2 \in (l, 2l): N_{(x_2)} = F + \rho g S_1 l + \rho g S_2 (x_2 - l)$$

Priebeh napätí v týchto rezoch bude

$$\sigma_{(x_1)} = \frac{N_{(x_1)}}{S_1} = \frac{F}{S_1} + \rho g x_1$$



Obr. 2.4 .Priebehy namáhania

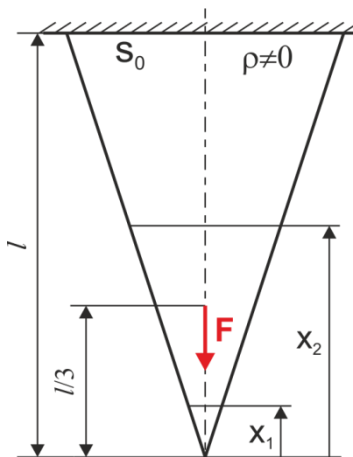
$$\sigma_{(x_2)} = \frac{N_{(x_2)}}{S_2} = \frac{F}{S_2} + \rho g \frac{S_1}{S_2} l + \rho g (x_2 - l)$$

Celkové predĺženie tiahla je potrebné vypočítať integrovaním rovnice (2.2) pre obidva úseky, t. j.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \int_0^l \frac{F + \rho g S_1 x_1}{E S_1} dx_1 + \int_l^{2l} \frac{F + \rho g S_1 l + \rho g S_2 (x_2 - l)}{E S_2} dx_2$$

$$\Delta l = \frac{F l}{E} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) + \frac{\rho g l^2}{E} \left( 1 + \frac{S_1}{S_2} \right)$$

**Príklad 3.** Vypočítajte a znázornite priebeh osových síl a napätí pozdĺž tiaha kužeľového prierezu na Obr. 2.5., ktoré je zaťažené vlastnou tiažou a vonkajšou silou **F**. Vypočítajte aj celkové predĺženie tiaha.



Obr. 2.5. Tiaho s lineárnou zmenou prierezu k príkladu 3

$$x_1 \in (0, l/3): N_{(x_1)} = \frac{1}{3} S_{(x_1)} x_1 \rho g = \frac{S_0 x_1^3}{3l^2}, \text{ kde sme využili podobnosť trojuholníkov}$$

$$x_2 \in (l/3, l): N_{(x_2)} = F + \frac{1}{3} S_{(x_2)} x_2 \rho g = F + \frac{S_0 x_2^3}{3l^2}$$

Priebehy napätí v jednotlivých rezoch sú:

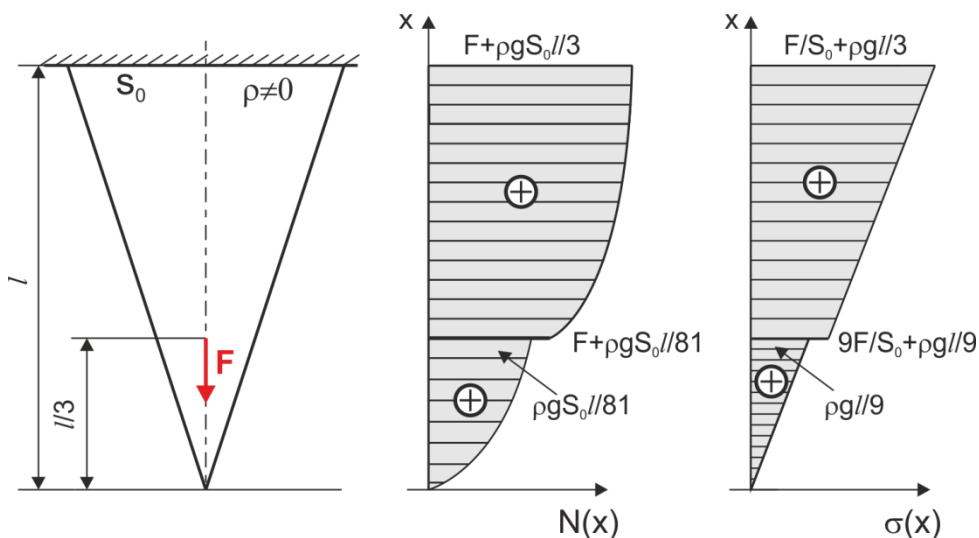
$$\sigma_{(x_1)} = \frac{N_{(x_1)}}{S_{(x_1)}} = \frac{\rho g x_1}{3}$$

$$\sigma_{(x_2)} = \frac{N_{(x_2)}}{S_{(x_2)}} = \frac{Fl^2}{S_0 x_2^2} + \frac{\rho g x_2}{3}$$

Celkové predĺženie získame integráciou na dvoch úsekoch prúta:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_0^{l/3} \frac{N_{(x_1)}}{S_{(x_1)} E} dx_1 + \int_{l/3}^l \frac{N_{(x_2)}}{S_{(x_2)} E} dx_2 = \int_0^{l/3} \frac{\rho g}{3E} x_1 dx_1 + \int_{l/3}^l \left( \frac{Fl^2}{S_0 E x_2^2} + \frac{\rho g}{3E} x_2 \right) dx_2 = \\ &= \frac{\rho g l^2}{6E} + \frac{2Fl}{S_0 E} \end{aligned}$$

Vo výslednom predĺžení prvý člen predstavuje predĺženie spôsobené vlastnou tiažou prúta a druhý člen predstavuje predĺženie spôsobené vonkajšou silou  $F$ .

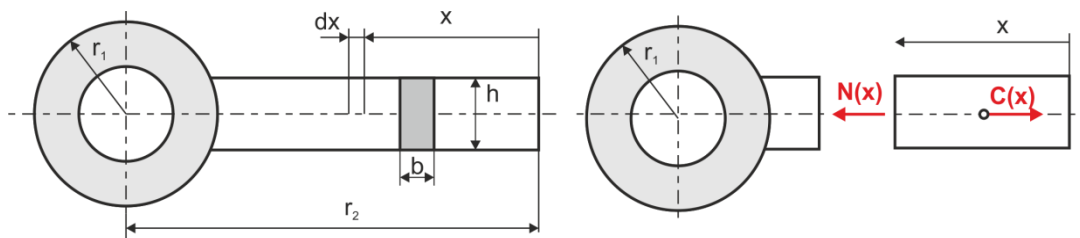


Obr. 2.6. Priebehy osových síl a napätí po výške prúta

## 2.2 Namáhanie odstredivou silou

Jedinú vnútornú silu v priereze pôsobiacu v smere normály – t. j. namáhanie čistým ťahom spôsobuje aj odstredivá sila pôsobiaca napr. na lopatky, rotujúce ramená, resp. na tenkostenný rotujúci prstenec.

**Príklad 4.** Vypočítajte a znázornite priebeh napätia, ktoré vznikne v rotujúcom ramene konštantného prierezu tvaru obdĺžnika  $h \times b$  pri rotácii uhlovou rýchlosťou  $\omega$  (Obr. 2.7). Vypočítajte predĺženie ramena.



Obr. 2.7. Rotujúce rameno

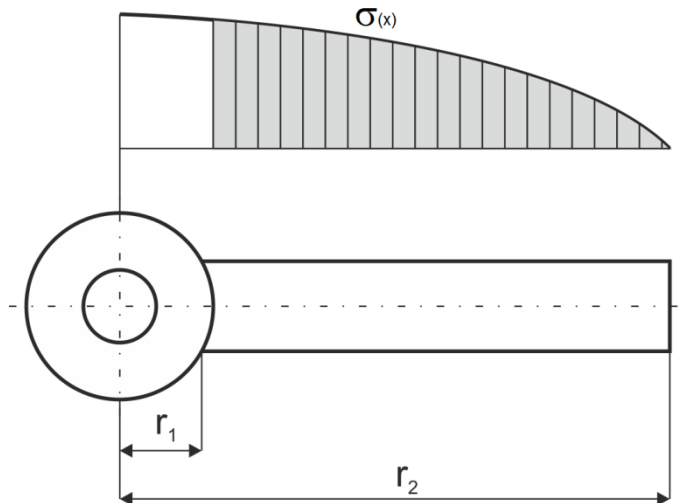
Priebeh normálovej sily určíme pomocou jedného myšlieného rezu:

$$x \in (0, r_2 - r_1): N_{(x)} = C_{(x)} = m_{(x)} r_{(x)} \omega^2 = \rho h b x \left( r_2 - \frac{x}{2} \right) \omega^2$$

Priebeh napätia pozdĺž ramena je potom daný rovnicou

$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{h \cdot b} = \rho \omega^2 x \left( r_2 - \frac{x}{2} \right); \quad \sigma_{(0)} = 0$$

$$\sigma_{(r_2 - r_1)} = \rho \omega^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$$



Obr. 2.8. Grafický priebeh napätia pozdĺž rotujúceho ramena.

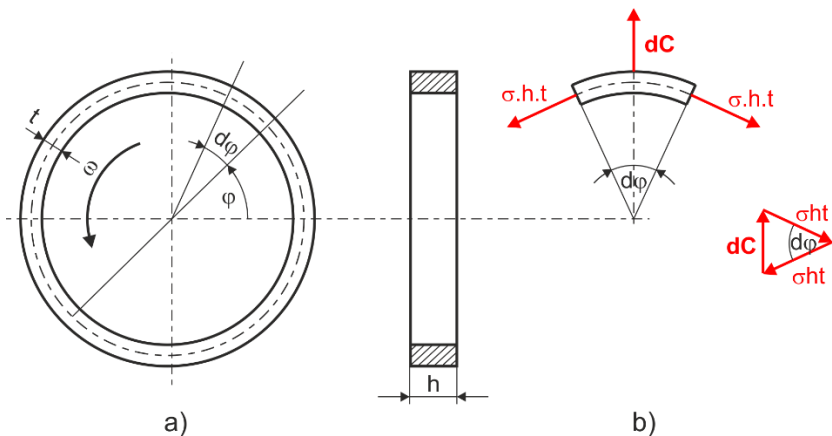
Predĺženie ramena vypočítame z rovnice (2.2):

$$\Delta r = \int_{(l)} \frac{N_{(x)}}{SE} dx = \frac{1}{E} \int_0^{r_2 - r_1} \rho x \left( r_2 - \frac{x}{2} \right) \omega^2 dx = \frac{\rho \omega^2}{2E} \frac{2r_2^3 - 3r_2^2 r_1 + r_1^3}{3}$$

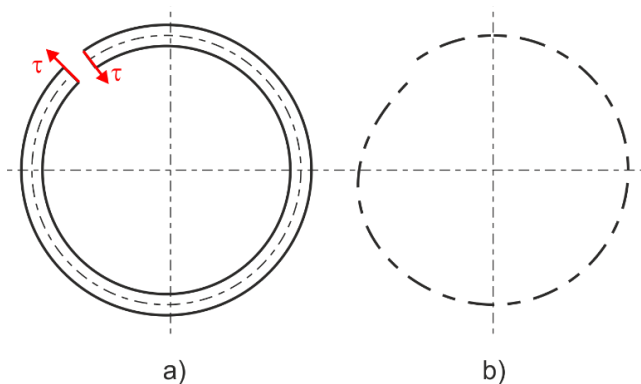
**Príklad 5.** Tenkostenný prstenec rotuje uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Vypočítajte priebeh napätia v stene prstenca (Obr. 2.9.). Vypočítajte zväčšenie polomeru vplyvom rotácie.

Vo venci vznikne len normálové napätie (z Obr. 2.10. je zrejmé, že prítomnosť šmykových napätí by znamenala nespojitú deformáciu a preto sa musia rovnať nule) a pri tenkostennom prstenci ho môžeme považovať za rovnomerne rozložené po hrúbke prstenca.





Obr. 2.9. Rotujúci prstenec a rovnováha síl



Obr. 2.10. Nespojité deformačia rotujúceho prstenca v prípade existencie šmykových napätí

Napätie určíme z rovnováhy síl na elemente vybranom z rotujúceho prstenca (Obr. 2.9b.):

$$dC = \sigma h t d\varphi \Rightarrow \sigma = \frac{dC}{h t d\varphi}$$

Odstredivá sila pôsobiaca na element je

$$dC = dm_{(\varphi)} r \omega^2 = \rho r d\varphi h r \omega^2 = \rho \omega^2 r^2 h d\varphi$$

Po dosadení do predošlej rovnice dostávame veľkosť normálového napätia v stene prstenca

$$\sigma = \rho \omega^2 r^2$$

Je potrebné si všimnúť, že normálové napätie v stene prstenca nezávisí od plochy prierezu. Jeho zníženie tak možno dosiahnuť znížením otáčok prípadne hustoty materiálu, nie však zväčšením prierezu prstenca.

Zväčšenie polomeru prstenca vypočítame zo zväčšenia jeho obvodu. Pre pomerné predĺženie v smere obvodu (tangenciálne) platí

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}$$

Využitím Hookovho zákona dostávame

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{\sigma}{E} r = \frac{\rho \omega^2 r^3}{E}$$

### 2.3 Konštrukcie s prúťovým prvkom

V konštrukčnej praxi sa často vyskytujú prvky, ktoré sú určené na prenos výlučne ťahového, prípadne tlakového namáhania, uložené na koncoch kĺbovými väzbami. Takéto konštrukčné prvky nazývame prúty. Prút namáhaný výlučne normálovou silou je ideálny konštrukčný prvok, ku ktorému sa skutočné prúty len blížia.

Charakteristické vlastnosti prúta sú:

- dĺžka výrazne prevládajúca nad priečnymi rozmermi
- nízka ohybová aj torzná tuhosť
- nízka tuhosť väzieb v koncových bodoch

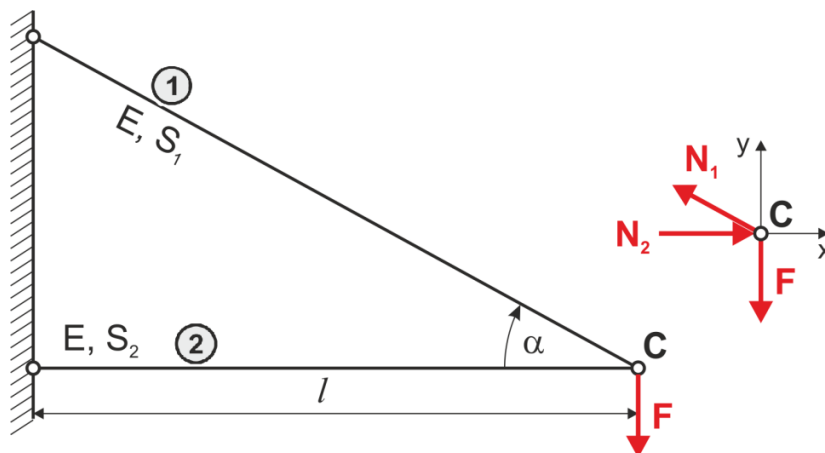
Takéto prvky sa vyskytujú na konštrukciách mostov, striech, žeriavov, rámoch pretekárskych automobilov a pod.

Pre prút konštantného prierezu platí, že jeho predĺženie

$$\Delta l = \int_{(l)} \frac{N_{\dot{a}x}}{S_{(x)} E} dx = \frac{N}{SE} \int_{(l)} dx = \frac{Nl}{SE} \quad (2.3)$$

Prúty bývajú zaťažené osamelými silami resp. spojite rozloženými zaťaženiami (napr. vlastná tiaž), ale aj výrobnou nepresnosťou a nerovnomerným ohriatím konštrukcie.

**Príklad 6:** Vypočítajte sily v prútoch, ktoré vzniknú po zaťažení konštrukcie na Obr. 2.11. silou **F**. Vypočítajte zvislé posunutie styčníka C.



Obr. 2.11. Konštrukcia s prútovými prvkami k príkladu 6

Sústava je staticky určitá. Sily v prútoch určíme po uvoľnení styčníka C tak, že prúty nahradíme silami, ktorými pôsobia na tento spoločný bod. Podmienky rovnováhy styčníka C sú:

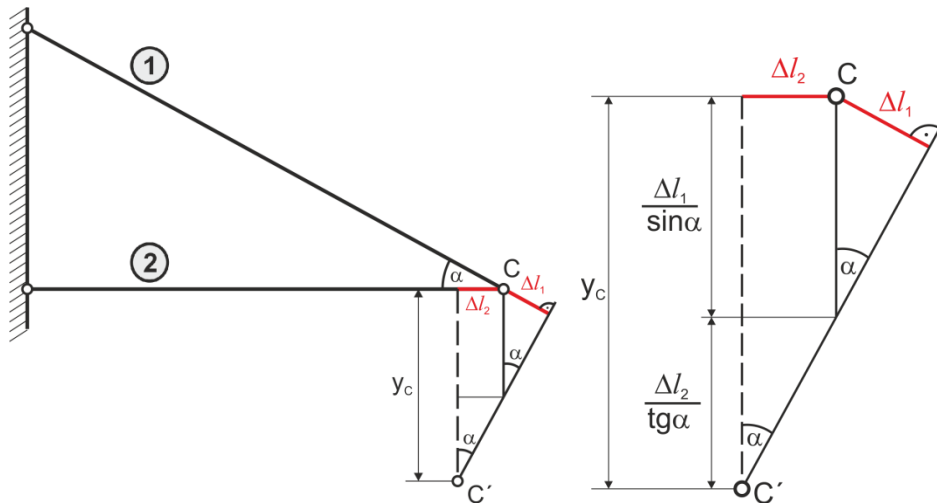
$$\sum F_x = 0 : N_2 - N_1 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 : N_1 \sin \alpha - F = 0$$

Z druhej rovnice je priamo sila v prúte 1:  $N_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$

Po dosadení do prvej rovnice dostávame aj silu v prúte 2:  $N_2 = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha}$

Zvislé posunutie styčníka C určíme z deformačného obrázka. Prúty pri zaťažení sústavy silou **F** opisujú kružnice okolo bodu pripojenia. Predĺženia prútov oproti ich celkovej dĺžke sú však len zlomky percenta a menej, preto ich pohyb nahradzujeme pohybom po dotýčnici ku kružnici, čím sa celý deformačný obrázok aj výpočet síl v prútoch výrazne zjednoduší (Obr. 2.12). Prút 1 sa teda po zaťažení predlžuje o  $\Delta l_1$  a prút 2 sa skracuje o  $\Delta l_2$ .



Obr. 2.12. Deformačná podmienka

Z deformačného obrázka vidieť, že zvislé posunutie styčníka C môžeme vypočítať ako súčet dvoch strán vo vyznačených trojuholníkoch:

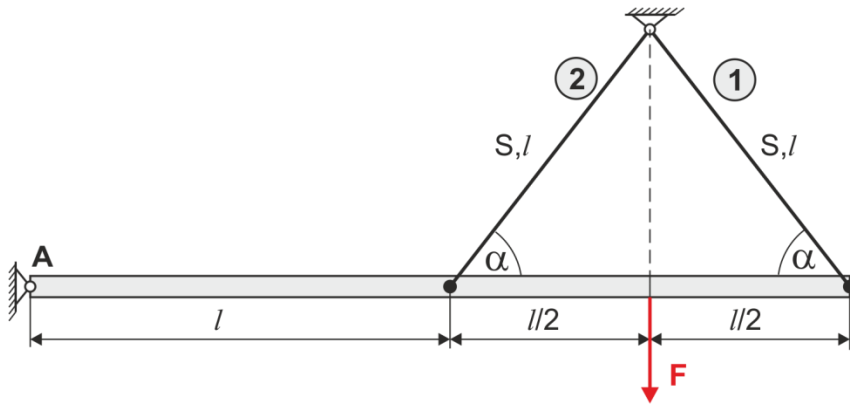
$$y_c = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} + \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Po dosadení za predĺženia prútov dostávame:

$$y_c = \frac{Fl}{ES_1 \sin^3 \alpha} + \frac{Fl}{ES_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{Fl}{E} \left( \frac{1}{S_1 \sin^3 \alpha} + \frac{1}{S_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

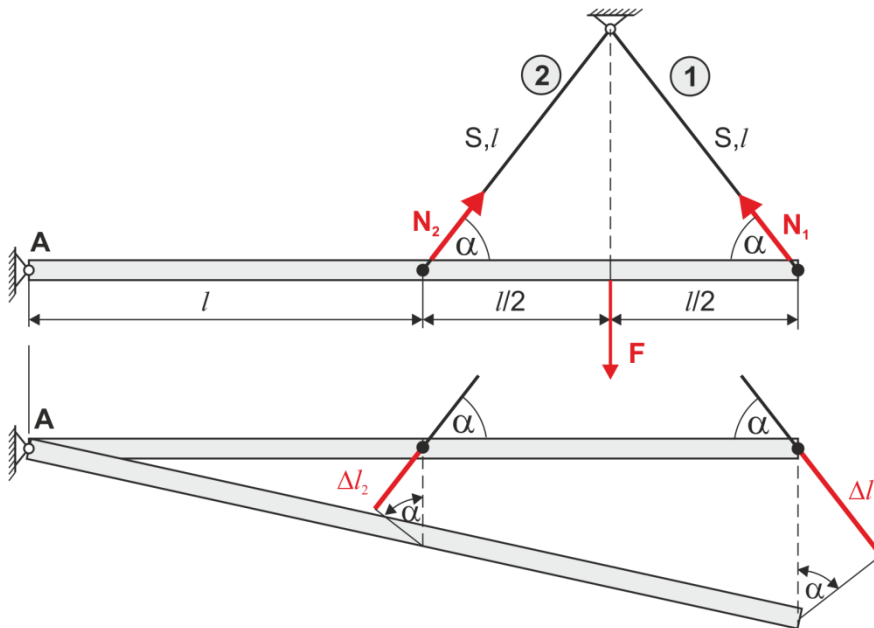
## Prútové prvky spojené tuhým telesom

**Príklad 7:** Dokonale tuhé teleso je okrem kĺbovej podpory zavesené na dvoch prútoch podľa Obr. 2.13. Vypočítajte sily v prútoch pri zaťažení celej sústavy silou **F**.



Obr. 2.13. Konštrukcia s prútovými prvkami k príkladu 7

Sústava s dvoma prútovými prvkami je staticky neurčitá, nie je však potrebné uvoľniť všetky väzby. Sústavu uvoľníme len čiastočne – tuhé teleso necháme vľavo v bode A ukotvené a uvoľníme ho od prútov, t. j. nahradíme účinky prútov na tuhé teleso silami (sily pôsobia v smere prútov, pretože prút prenáša len osové zaťaženie) – Obr. 2.14.



Obr. 2.14. Uvoľnenie a deformácia sústavy

Pre takto čiastočne uvoľnené tuhé teleso môžeme napísať jednu podmienku rovnováhy – rovnováhu momentov k podpere A:

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 \sin \alpha \cdot 2l + N_2 \sin \alpha \cdot l - F \frac{3}{2}l = 0 \quad (a)$$

Druhú podmienku potrebnú na výpočet síl v prútoch zostavíme z deformácie sústavy:

Z podobnosti trojuholníkov, ktoré vytvára natočené tuhé teleso môžeme napísať:

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \alpha \cdot 2l} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha \cdot l}$$

Táto rovnica je pre danú sústavu **deformačnou podmienkou**. Dosadením za predĺženia prútov (rov. 2.3)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{ES} \quad a \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{ES}$$

dostaneme po úprave vzťah  $N_1 = 2N_2$  (b)

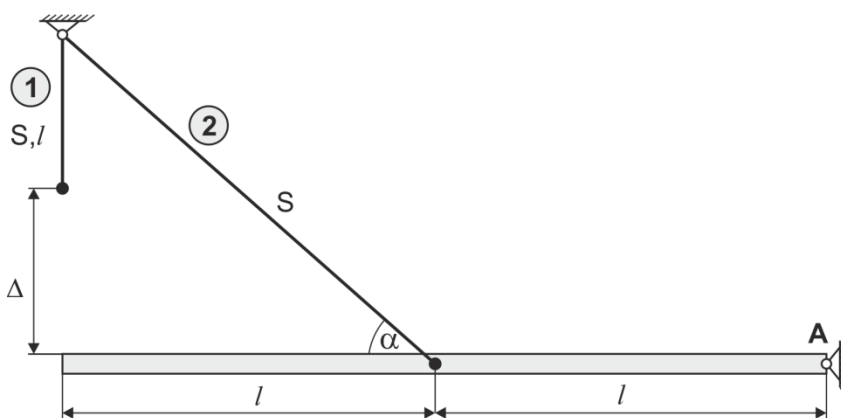
Riešením sústavy rovníc a), b) dostávame sily v jednotlivých prútoch:

$$N_1 = \frac{3F}{5 \sin \alpha} \quad , \quad N_2 = \frac{3F}{10 \sin \alpha}$$

### Zaťaženie silami od výrobných nepresností

Snaha o presnosť výroby má kladný vplyv na prípadné sily, ktoré sú do sústavy vnesené pri jej montáži. Relatívne malé nepresnosti (z pohľadu namáhania skrátene alebo predĺžene prútov) vyvolajú vysoké hodnoty síl po montáži, ktoré sa potom superponujú s dodatočným užitočným zaťažením sústavy.

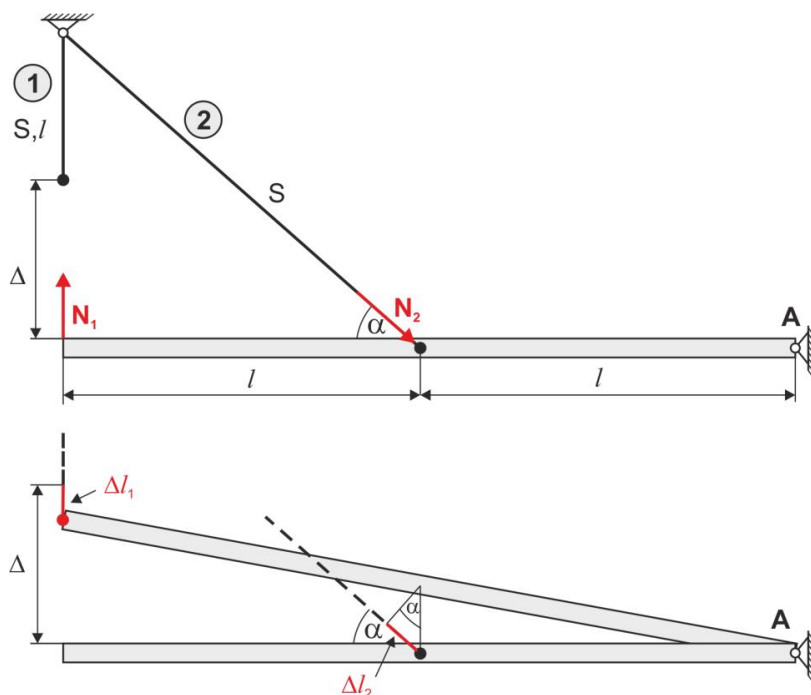
**Príklad 8:** Pre konštrukciu na Obr. 2.15 tvorenú tuhým telesom zavesenom na dvoch prútových prvkoch vypočítajte sily, ktoré vzniknú v prútoch po montáži sústavy, nakoľko prút 1 je vyrobený o  $\Delta$  kratší ( $\Delta$  je na Obr. 2.15 neúmerne zväčšené z dôvodu prehľadnosti, v skutočnosti je oveľa menšie ako  $l$ ).



Obr. 2.15. Konštrukcia s prútovými prvkami s výrobnou nepresnosťou k príkladu 8

Po násilnej montáži vznikne statiky neurčitá sústava s dvoma prútovými prvkami, ktoré sa ustália v polohe podľa Obr. 2.16. Deformačná podmienka sústavy vyjadrená vo forme podobnosti trojuholníkov (vytvorených tuhým telesom pred a po montáži) bude mať tvar

$$\frac{\Delta l_2}{\sin \alpha \cdot l} = \frac{\Delta - \Delta l_1}{2l}$$



Obr. 2.16. Uvoľnenie a deformácia sústavy

Po dosadení za predĺženia prútov a úprave dostávame rovnicu

$$\frac{N_2}{\sin^2 l} = \frac{\Delta ES}{2l} - \frac{N_1}{2}, \quad (a)$$

kde dĺžka prúta 2 je z geometrie sústavy rovná  $l/\sin\alpha$ .

Podmienka rovnováhy momentov k bodu A pre čiastočne uvoľnenú sústavu s tuhým telesom je

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 2l - N_2 \sin \alpha \cdot l = 0 \quad (b)$$

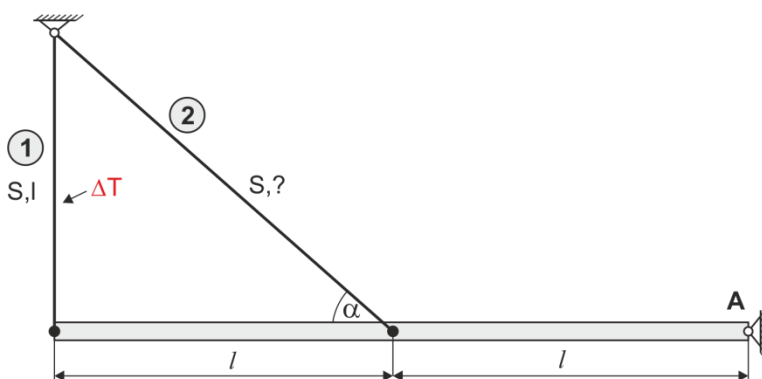
Riešením tejto sústavy rovníc dostávame sily v prútových prvkoch po montáži o veľkosti

$$N_1 = \frac{\Delta ES}{l \left( \frac{4}{\sin^3 \alpha} + 1 \right)}, \quad N_2 = \frac{\Delta ES}{2l \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{4} \right)}$$

### Zat'azenie od teploty

Ak je časť sústavy, resp. konštrukcie pod vplyvom zvýšenej alebo zníženej teploty, tepelná rozťažnosť môže spôsobiť prídavné namáhanie celej konštrukcie. Zmenu teploty môže spôsobiť prúdenie tekutiny s rozdielnou teplotou oproti ostatným častiam konštrukcie, chemická reakcia s uvoľnením tepla, ohriatie slnkom po odstránení časti izolácie a pod.

**Príklad 9:** Vypočítajte sily v prútoch, ktoré vzniknú v sústave na Obr. 2.17 po ohriatí prúta 1 o teplotu  $\Delta T$ .



Obr. 2.17. Konštrukcia s prútovými prvkami k príkladu 9



Ohriatím prúta 1 odpojeného od sústavy sa tento predĺži o hodnotu danú teplotnou rozťažnosťou materiálu

$$\Delta l_T = \alpha \Delta T$$

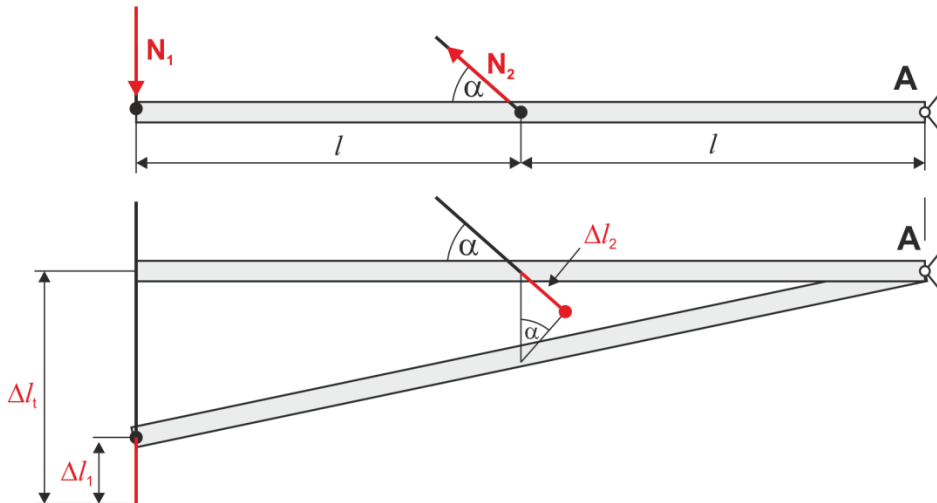
kde  $\alpha$  je teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti (Tab. 2).

*Tabuľka2 Hodnoty súčiniteľov dĺžkovej rozťažnosti pre niektoré kovy*

Materiál	$\alpha_t$ [ $\times 10^{-5} / ^\circ\text{C}^1$ ]	Materiál	$\alpha_t$ [ $\times 10^{-5} / ^\circ\text{C}^1$ ]
Hliník	2,25	Mosadz	1,85
Bronz	1,75	Oceľ	1,2
Meď	1,65	Liatina	1,04

Prút je po predĺžení vyvolanom ohriatím dlhší a naspäť do sústavy ho pripojíme za cenu vnesenia síl do nej. Stav deformácie sústavy po ohriatí prúta je na Obr. 2.18. a môžeme napísať deformačnú podmienku sústavy v tvare

$$\frac{\Delta l_T - \Delta l_1}{2l} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha \cdot l}$$



Obr. 2.18. Uvoľnenie a deformácia sústavy

Po dosadení za predĺženia prútov a úprave dostávame rovnicu

$$\alpha ES \Delta T - N_1 = \frac{2N_2}{\sin \alpha}$$

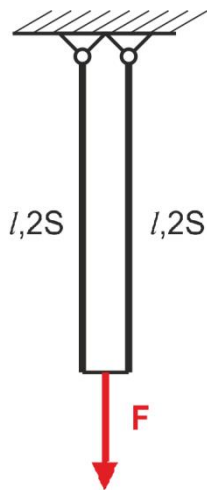
Momentová podmienka rovnováhy sústavy k bodu A po jej čiastočnom uvoľnení má tvar

$$\sum M_A = 0: -N_1 2l + N_2 \sin \alpha \cdot l = 0$$

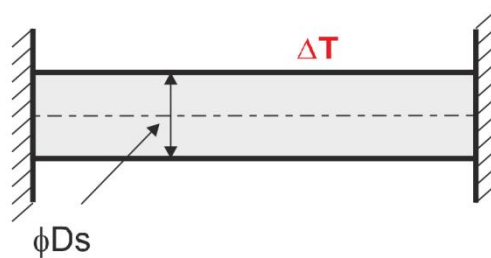
Riešením tejto sústavy rovníc dostávame sily v prútových prvkoch vyvolaných ohrevom prúta 1 o veľkosti

$$N_1 = \frac{\alpha ES \Delta T \sin^2 \alpha}{4 + \sin^2 \alpha}, \quad N_2 = \frac{2\alpha ES \Delta T \sin \alpha}{4 + \sin^2 \alpha}$$

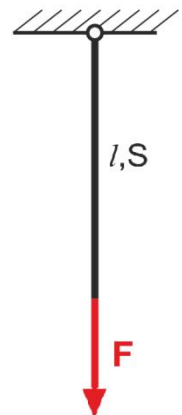
### Autotest



Obr. a)



Obr. b)



Obr. c)

1. Vypočítajte veľkosti síl v prútoch spoločne zaťažených silou **F** na Obr. a).
2. Po odkopaní krátkeho úseku potrubia a odkrytí izolácie sa potrubie ( $D_S = 500$  mm, hrúbka steny  $t = 20$  mm) ohreje o  $\Delta T = 25$  °C. Aké sily a aké napätia vzniknú v potrubí (Obr. b) ?
3. Definujte veličinu  $\nu$  (Poissonovo číslo) graficky aj analyticky.
4. Definujte veličinu **E** (Youngov modul pružnosti) graficky aj analyticky.

5. Navrhnete potrebný priemer prúta kruhového prierezu zaťaženého na konci silou  $F$  (Obr. c). O koľko treba prút ohriať ( $\Delta T = ?$ ), aby sa predĺžil o rovnakú veľkosť ako od sily  $F$  ( $\varepsilon_T = \varepsilon_F$ )? Aké napätie vznikne v prúte pri ohiatí o  $\Delta T = ?$

1.  $N_1 = 2/3F$ ,  $N_2 = F/3$

2.  $\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T = 63 \text{ MPa}$ ,  $F = 1978 \text{ kN}$

5.  $d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma_D}}$ ,  $\Delta T = \frac{E \cdot S \cdot F}{\alpha}$ ,  $\sigma_T = 0$

### 3 KVADRATICKÉ MOMENTY PLÔCH

Pre určenie napätia v priereze, jeho veľkosti a rozloženia, budeme potrebovať aj iné charakteristiky prierezu, ako bola veľkosť plochy pri namáhaní ťahom a tlakom. Pri ďalších druhoch namáhania budú potrebné kvadratické momenty plôch.

V dynamike sa používajú momenty zotrvačnosti telies, ktoré sú tzv. hmotnými momentmi zotrvačnosti (závisia od hmotnosti telies). Tieto momenty vyjadrujú mieru zotrvačných vlastností pri pohybe telies. V náuke o pružnosti a pevnosti sa niekedy nesprávne označujú kvadratické momenty plôch ako momenty zotrvačnosti. Toto označenie vyplynulo z ich podstaty, ktorá je podobná ako pri momentoch v dynamike – vyjadrujú zotrvačnosť v zaťažujúcom stave alebo mieru odporu voči zmene stavu zaťaženia. Vhodnejšie pomenovanie je preto kvadratické momenty plôch.

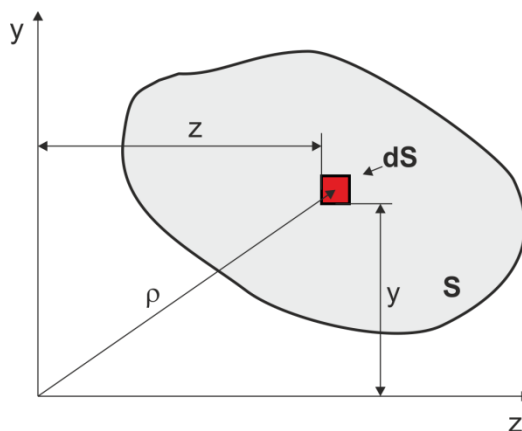
Pre plochu (rovinnú) sú definované štyri základné kvadratické momenty (Obr. 3.1):

$$J_z = \int_{(S)} y^2 dS$$

$$J_y = \int_{(S)} z^2 dS$$

$$J_p = \int_{(S)} \rho^2 dS$$

$$D_{zy} = \int_{(S)} yz dS \quad (3.1)$$



Obr. 3.1. Definícia kvadratických momentov plôch

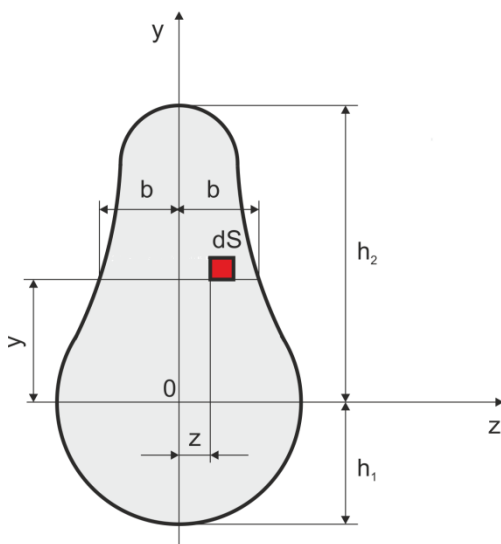
Kvadratické momenty plochy  $J_z$  a  $J_y$  charakterizujú rozloženie plochy okolo osi  $z$  resp.  $y$ . S ohľadom na ich ďalšie použitie možno povedať, že kvadratické momenty  $J_z$  resp.  $J_y$  kvantifikujú odpor prierezovej plochy voči ohybu okolo príslušnej osi  $z$  resp.  $y$ .

Kvadratický moment  $J_p$  sa nazýva polárny kvadratický moment plochy. Z Obr. 3.1 je zřejmé, že  $\rho^2 = y^2 + z^2$  a teda

$$J_p = \int_S (y^2 + z^2) dS = \int_S y^2 dS + \int_S z^2 dS = J_z + J_y \quad (3.2)$$

Polárny kvadratický moment plochy charakterizuje rozloženie plochy okolo vzťažného bodu (vzťažným bodom O a sprievodičom je daný polárny súradnicový systém) a vyjadruje tak odpor plochy voči krúteniu (dvojica síl so stredom O).

Deviačný moment  $D_{yz}$  je zmiešaný moment plochy a môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty (na rozdiel od kvadratických momentov  $J_z$  a  $J_y$ , ktoré môžu byť len kladné). Ak aspoň jedna z osí  $z, y$  je osou symetrie, deviačný moment plochy sa rovná nule (Obr. 3.2):



Obr. 3.2. Symetrický prierez k osi  $y$

$$D_{zy} = \int_S yz dS = \int_{-h_1}^{h_2} \int_{-b}^b yz dy dz = \int_{-h_1}^{h_2} y dy \int_{-b}^b z dz = \int_{-h_1}^{h_2} y dy [b^2 - (-b)^2] = 0$$

Z definície kvadratických momentov plôch vyplývajú niektoré ich zaujímavé vlastnosti:

- integrál je aditívna funkcia, t. j. integrál súčtu členov sa rovná súčtu integrálov jednotlivých členov – ak plochu rozdelíme na viacero častí, celkový kvadratický moment sa bude rovnať súčtu momentov jednotlivých častí, teda

$$J_z = \sum_{i=1}^n J_{zi} \quad , \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_{yi} \quad , \quad J_p = \sum_{i=1}^n J_{pi} \quad , \quad D_{zy} = \sum_{i=1}^n D_{zyi}$$

- kvadratický moment  $J_z$ , resp.  $J_y$  sa posúvaním plochy pozdĺž osi  $z$ , resp.  $y$  nemení,
- k osiam symetrie plochy je deviačný moment nulový.

Ak osi  $z$  alebo  $y$  budú prechádzať ťažiskom plochy, budeme ich nazývať centrálné osi zotrvačnosti a kvadratické momenty k týmto osiam ako centrálné kvadratické momenty plochy.

Osi prechádzajúce ťažiskom, ku ktorým budú kvadratické momenty nadobúdať extrémne hodnoty (najväčšia hodnota, najmenšia hodnota) nazývame hlavné centrálné osi zotrvačnosti a hodnoty kvadratických momentov k týmto osiam ako hlavné centrálné kvadratické momenty plochy.

Ak os, ku ktorej určujeme kvadratický moment plochy, je osou symetrie a prechádza ťažiskom – je zároveň aj hlavnou centrálnou osou zotrvačnosti a druhá takáto os je na ňu kolmá. Napríklad kruhová plocha alebo štvorec majú všetky osi prechádzajúce ťažiskom osami symetrie a ku všetkým osiam je hodnota kvadratického momentu plochy rovnaká. Obdĺžniková plocha má dve osi symetrie prechádzajúce ťažiskom, preto sú to zároveň hlavné centrálné osi zotrvačnosti a momenty k nim hlavné centrálné kvadratické momenty plochy.

Hodnoty týchto kvadratických momentov teraz odvodíme.

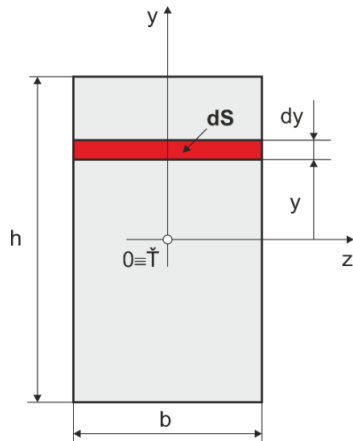
### Kvadratický moment obdĺžnika

V ploche tvaru obdĺžnika so stranami  $b \times h$  vyberieme elementárnu plochu o šírke  $dy$  vo vzdialenosti  $y$  od osi  $z$  prechádzajúcej ťažiskom (Obr. 3.3). Kvadratický moment k osi  $z$  vyjadríme z definície rov.(3.1) ako integrál momentov takýchto elementárnych plôch, t. j.

$$J_z = \int_{(S)} y^2 dS = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = 2b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} = 2b \frac{h^3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{12} b h^3$$

Rovnakým postupom odvodíme kvadratický moment obdĺžnikovej plochy k osi  $y$ , t. j.

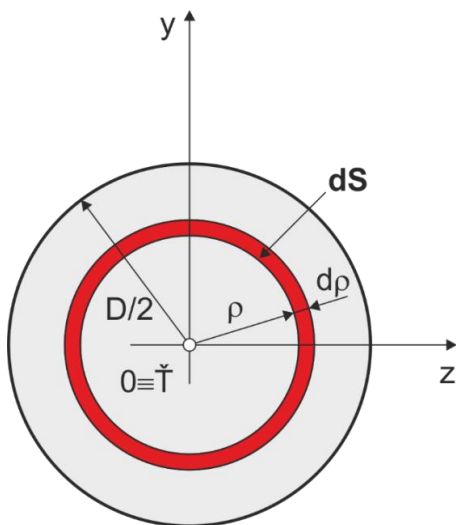
$$J_y = \int_{(S)} z^2 dS = 2 \int_0^{b/2} z^2 h dz = 2h \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{b/2} = 2h \frac{b^3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{12} h b^3$$



Obr. 3.3. Kvadratický moment obdĺžnikového prierezu

Z odvodených vzťahov je zrejmé, že veľkosť kvadratického momentu obdĺžnika k osi rastie s treťou mocninou kolmej strany k tejto osi.

### Kvadratický moment kruhu



V ploche tvaru kruhu so stredom  $O$  a priemerom  $D$  vyberieme elementárnu plochu tvaru prstenca s elementárnou hrúbkou  $d\rho$  a polomerom  $\rho$  (Obr. 3.4). Kvadratický polárny moment k bodu  $O$  vyjadríme z definície (3.1) ako integrál momentov takýchto elementárnych plôch, t. j.

Obr. 3.4. Kvadratický moment kruhového prierezu

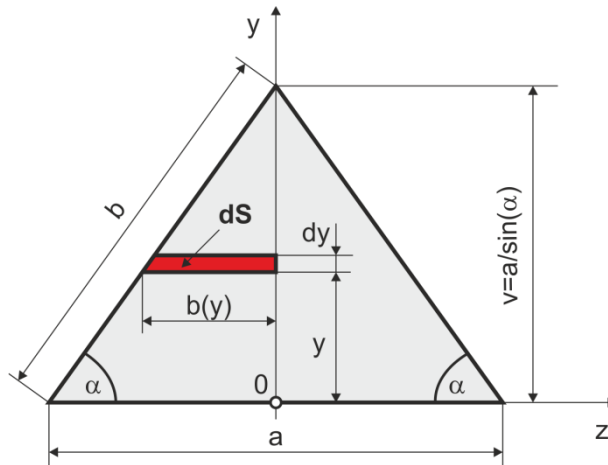
$$J_p = \int_{(S)} \rho^2 dS = \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{D/2} = 2\pi \frac{D^4}{16.4} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Z rovnice (3.2)  $J_p = J_z + J_y$  pre kruhovú plochu, ktorá má ku všetkým osiam rovnaký kvadratický moment, platí

$$J_p = J_z + J_y = 2J_z \quad \Rightarrow \quad J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

### Kvadratický moment trojuholníka

Plochu tvaru rovnoramenného trojuholníka so základňou dĺžky  $a$  a ramenami dĺžky  $b$  s uhlami pri základni o veľkosti  $\alpha$  rozdelíme výškou na dva pravouhlé trojuholníky a vyberieme elementárnu plochu výšky  $dy$  a šírky  $b(y)$  (Obr. 3.5). Z definície kvadratického momentu plochy k osi  $z$  sa kvadratický moment elementárnej plochy rovná



Obr. 3.5. Kvadratický moment trojuholníkového prierezu

$$J_z = \int_{(S)} y^2 dS = \int_0^v y^2 b(y) dy$$

Šírku elementárnej plochy  $dS$  vyjadríme z podobnosti trojuholníkov:

$$\frac{b(y)}{v-y} = \frac{a}{2v} \quad \Rightarrow \quad b(y) = \frac{v-y}{2v} a$$

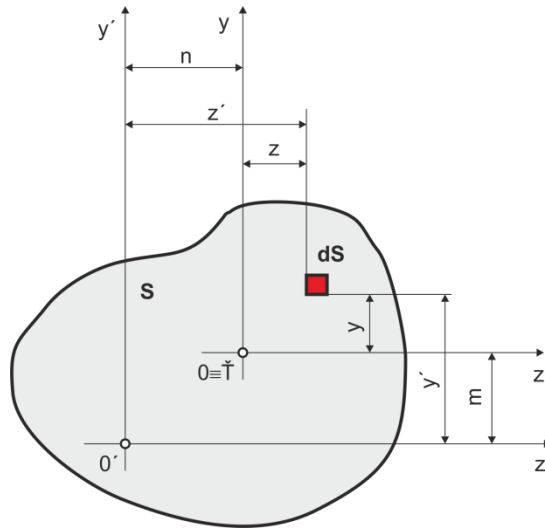
Kvadratický moment rovnoramenného trojuholníka k osi  $z$  potom bude

$$J_z = 2 \int_0^v y^2 \frac{v-y}{2v} a dy = \frac{a}{v} \int_0^v y^2 (v-y) dy = \frac{a}{v} \left[ \frac{y^3}{3} v - \frac{y^4}{4} \right]_0^v =$$



$$\frac{a}{v} \left[ \frac{v^4}{3} - \frac{v^4}{4} \right] = \frac{1}{12} av^3 = \frac{1}{12} ab^3 \sin^3 \alpha$$

### Kvadratické momenty plochy k rovnobežným osiam (Steinerova veta)



Obr. 3.6. Kvadratické momenty plochy k posunutým osiam

Kvadratický moment plochy S k posunutej osi z je podľa definície

$$J_z = \int_{(S)} y^2 dS$$

Z Obr. 3.6 je zrejmé, že os z je posunutá voči osi z rovnobežne o hodnotu m, teda po dosadení za  $y = y + m$  bude

$$J_z = \int_{(S)} (y + m)^2 dS = \int_{(S)} y^2 dS + 2m \int_{(S)} y dS + m^2 \int_{(S)} dS$$

Pretože  $\int_{(S)} dS = S$ ,  $\int_{(S)} y^2 dS = J_z$  a  $\int_{(S)} y dS = 0$  (statický moment plochy k osi

prechádzajúcej ťažiskom sa rovná nule), dostaneme matematické vyjadrenie Steinerovej vety pre kvadratický moment plochy k rovnobežne posunutej osi v tvare

$$J_{z'} = J_z + m^2 S \quad (3.3)$$

Podobne určíme aj vzťah pre deviačný moment k rovnobežne posunutým osiam:

$$D_{z'y'} = \int_{(S)} y'z' dS = \int_{(S)} (y+m)(z+n) dS = \int_{(S)} yz dS + n \int_{(S)} y dS + m \int_{(S)} z dS + mn \int_{(S)} dS$$

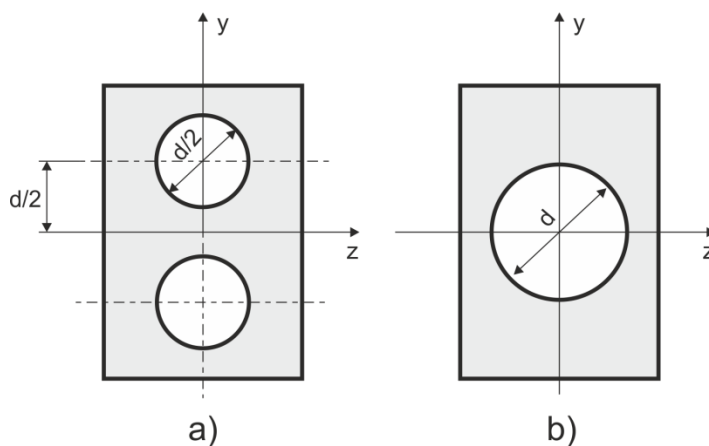
Pretože  $\int_{(S)} dS = S$ ,  $\int_{(S)} yz dS = D_{zy}$  a statické momenty  $\int_{(S)} y dS$  a  $\int_{(S)} z dS$  sú

k osiam symetrie nulové, dostávame matematické vyjadrenie Steinerovej vety pre deviačný moment k rovnobežne posunutým osiam v tvare

$$D_{z'y'} = D_{zy} + mnS \quad (3.4)$$

### Autotest

1. Ktorý profil má väčší  $J_z$ ?



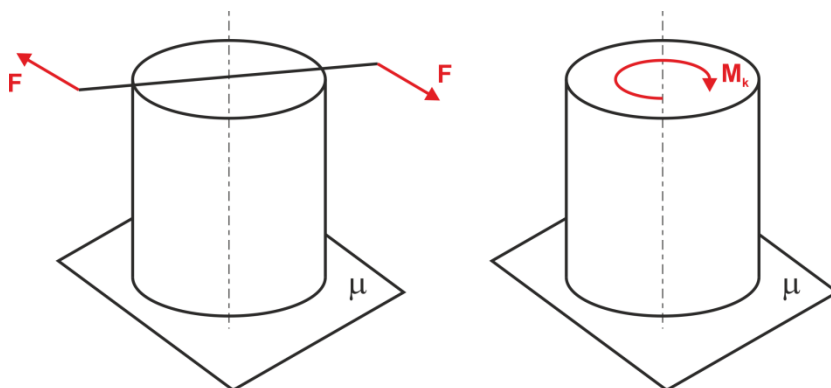
2. Koľkokrát sa zväčší  $J_z$  obdĺžnikového prierezu, ak sa jeho výška zdvojnásobí?

3. Odvodte kvadratický moment medzikruhového prierezu.

Riešenie: 1. druhý, 2. 8-krát, 3.  $J_z = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$

## 4. KRÚTENIE

Krútenie je spôsob namáhania, pri ktorom výslednica zaťaženia tvorí dvojicu síl ležiacu v rovine kolmej na os telesa (Obr. 4.1).



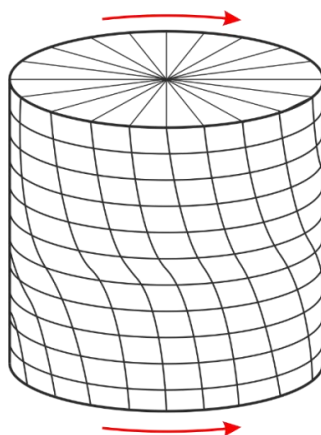
Obr. 4.1. Namáhanie krútením

V praxi sa s krútením stretávame pri hriadeľoch prevodoviek, motorov, náprav vozidiel, rámoch podvozkov, rámových konštrukciách, torzných tyčiach a pod. Problém krútenia je jednoducho riešiteľný len pre tyče kruhového prierezu. Pre nekruhové prierezy je určenie deformačného stavu a napätí v priereze podstatne zložitejšia úloha, riešiteľná pomocou matematickej teórie pružnosti alebo experimentálne.

### 4.1 Krútenie kruhových prierezov

Uvažujme kruhový valec, ktorého spodný koniec je upnutý v tuhej rovine a ktorého voľný koniec je zaťažený dvojicou síl vytvárajúcou moment  $M_k$ . Os valca ostáva pri tomto namáhaní priama. Ak narysujeme na čelnom priereze polomery a pozdĺž plášťa valca im zodpovedajúce povrchové priamky delené sústavou pravidelných obvodových kružníc (Obr. 4.2), možno pri malom uhle skrútenia pozorovať, že:

- všetky povrchové priamky sa pootočia o rovnaký uhol
- čelné prierezy zostanú rovinné rovnako ako obrisy všetkých prierezov (t. j. prierezy sa nebortia, kružnice ostávajú kružnicami s rovnakou dĺžkou polomeru ako pred zaťažením),
- polomery vyznačené na čelnom priereze ostanú priamkové,
- vzdialenosti medzi rovnobežnými prierezmi sa skrútením nezmenia.



Obr. 4.2. Deformácia kruhového prierezu pri krútení

Na základe týchto experimentálnych pozorovaní možno sformulovať pre riešenie krútenia kruhových prierezov nasledujúce predpoklady:

- všetky prierezy ostávajú po skrútení rovinné
- polomery v týchto prierezoch ostávajú priame
- vzdialenosť medzi prierezmi sa skrútením nemení

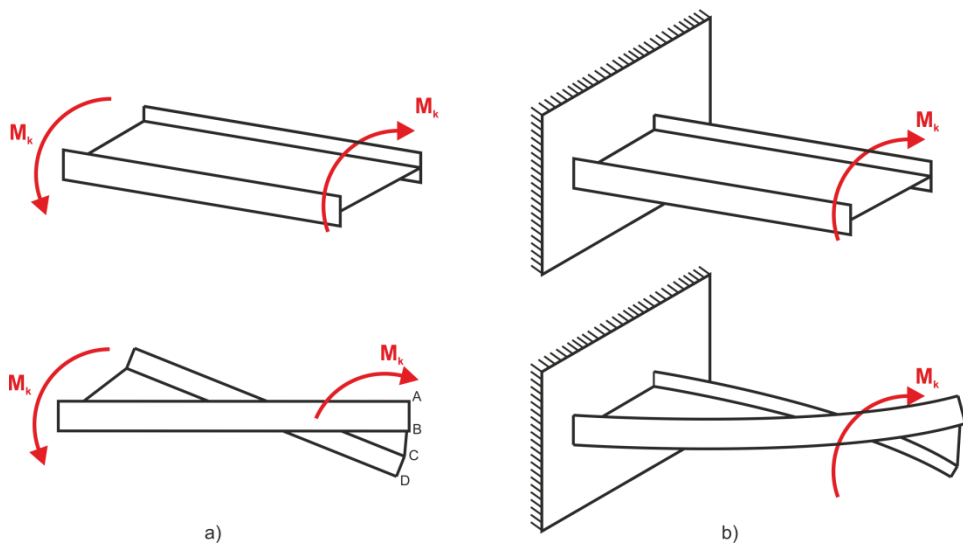
Z týchto predpokladov založených na experimentálnych skúškach vyplýva, že tyč kruhového prierezu sa pri krútení správa ako sústava tuhých krúžkov centrovaných na spoločnej osi hriadeľa. Pri deformácii krútením sa tieto krúžky jeden voči druhému len natočia, pričom nemenia svoj tvar, rozmery ani vzájomnú vzdialenosť. To znamená, že ľubovoľný element v priereze kruhovej tyče nemení pri krútení svoje rozmery, t.j.  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$ .

Z Hookovho zákona potom vyplýva, že aj napätia

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (4.1)$$

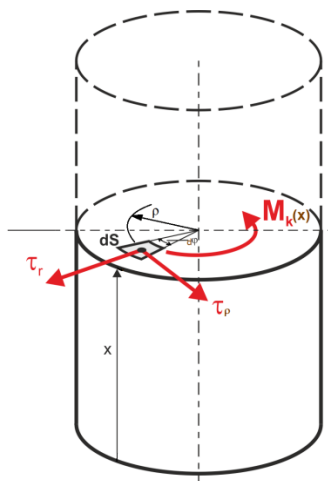
Z tejto úvahy vyplýva záver, že pri voľnom krútení kruhových prierezov sa v priečných rezoch nevyskytujú normálové napätia, ale len napätia šmykové. Treba poznamenať, že predpoklad rovinnosti priečných prierezov pri namáhaní krútením je splnený len pri kruhových a medzikruhových prierezoch. Iné tvary prierezov sa pri krútení boria (nezostávajú rovinné, deplanujú sa). V prípadoch tzv. voľného krútenia sa boria všetky prierezy, v dôsledku čoho nevznikajú normálové napätia v týchto prierezoch. V blízkosti väzieb (votknutie) hovoríme o tzv. stiesnenom krútení, pretože prierezom v jeho blízkosti nie je dovolené voľné natočenie, resp. vystúpenie z rovinnosti priečného rezu (deplanácia), v dôsledku čoho vznikajú aj normálové napätia. Na Obr. 4.3 je dokumentovaný rozdiel medzi voľným a stiesneným krútením

prúta profilu I. Pri voľnom krútení na Obr. 4.3a nastáva zmena vzájomnej polohy pásnic profilu, samotné pásnice však zostanú v pozdĺžnom smere rovinné. Čelá pásnic sa na oboch koncoch natočia, prestanú byť rovnobežné a vystúpia z roviny priečného smeru – voľne sa deplanujú. V prípade votknutia jedného konca prúta je zabránené voľnej deplanácii pásnic v tomto mieste, čo obmedzí deplanáciu aj príľahlých prierezov a preto pásnice nezostanú v pozdĺžnom smere priame – ohýbajú sa (Obr. 4.3b). Preto sa stiesnené krútenie niekedy nazýva aj ohybové krútenie. Prídavné ohybové napätia pri stiesnenom krútení sú významné pri krútení otvorených tenkostenných profilov (L, I, U...), naopak sú zanedbateľné pri krútení plných profilov, relatívne malé pri krútení tenkostenných uzatvorených profilov a vôbec nevznikajú pri krútení kruhových a medzikruhových prierezov.



Obr. 4.3. Voľné a stiesnené krútenie prúta prierezu I.

S cieľom určiť rozloženie šmykového napätia v priečnom priereze kruhovej tyče je potrebné vo vzdialenosti  $x$  urobiť myslenný rez (Obr. 4.4). V reze pri čistom krútení pôsobí z vnútorných veličín len moment (krútiaci) o veľkosti  $M_k(x)$ , reprezentujúci vychýlenie atómov z rovnovážnych polôh. Dôsledkom pôsobenia tohto momentu je šmykové napätie ( $\tau$ ), pôsobiace len v rovine rezu. V jednom bode prierezu na elemente plochy  $dS$  pôsobí toto napätie v smere dotýčnice (kolmo na polomer  $\rho$  k osi kruhovej tyče). Šmykové napätia v smere osi  $x$  na povrchu plášťa musia byť nulové, preto aj šmykové napätia v radiálnom smere ( $\tau_r$ ) musia byť nulové – vyplýva to aj z prvého predpokladu o zachovaní rovinnosti prierezu.



Obr. 4.4. Myslený rez pri krútení kruhovej tyče

Vnútorň moment  $M_k(x)$  vytvorí teda pole napätí v priereze pre ktoré platí

$$M_{k(x)} = \int_{(s)} \tau_{\rho} dS \rho \quad (4.2)$$

Výpočet rozloženia napätia  $\tau(\rho)$  v priereze  $x$  je staticky neurčitá úloha. Deformačnú podmienku získame z deformácie prstenca o hrúbke  $dx$  (Obr. 4.5a): skrútením sa bod  $a$  na povrchu vyšetrovaného prierezu (na polomere  $r$ ) pootočí o uhol  $d\varphi$  a prejde tak vzdialenosť

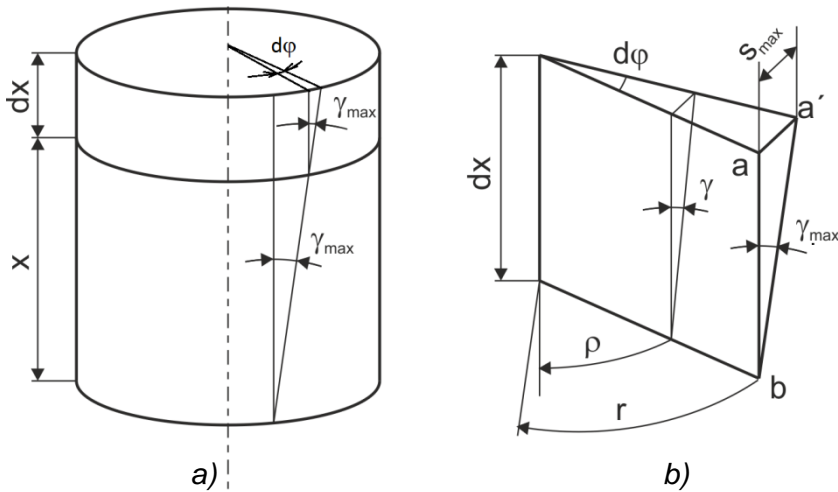
$$s_{max} = rd\varphi.$$

Podobne zodpovedajúci bod na polomere  $\rho$  prejde pri skrútení vzdialenosť

$$s = \rho d\varphi.$$

Tieto vzdialenosti možno vyjadriť aj pomocou uhla  $\gamma_{max}$ , resp.  $\gamma$  ako

$$s_{max} = \gamma_{max} dx \quad \text{resp.} \quad s = \gamma dx.$$



Obr. 4.5. Deformácia kruhového prierezu pri namáhaní krútením

Z rovnosti takto vyjadrených deformačných posunutí bodov  $a$ , resp.  $a'$  dostávame

$$\rho d\varphi = \gamma dx \Rightarrow \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.3)$$

$$\text{resp. } r d\varphi = \gamma_{\max} dx \Rightarrow \gamma_{\max} = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (4.4)$$

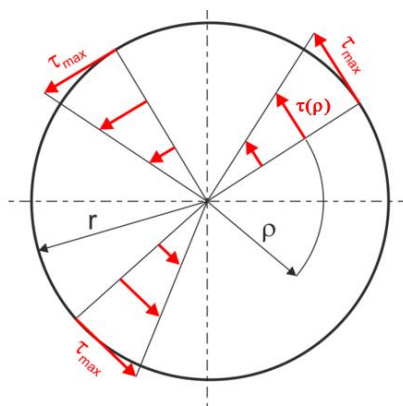
Použitím Hookovho zákona pre šmyk (rov. 1.11) dostávame

$$\tau_{\rho} = \gamma G = \rho \frac{d\varphi}{dx} G \quad a \quad \tau_{\max} = r \frac{d\varphi}{dx} G \quad (4.5)$$

Porovnaním posledných dvoch výrazov už dostávame rovnicu rozloženia šmykového napätia v priereze namáhanom krútiacim momentom v tvare

$$\tau_{\rho} = \tau_{\max} \frac{\rho}{r} \quad (4.6)$$

Šmykové napätie je teda v priereze rozložené lineárne od nulovej hodnoty uprostred po maximálnu hodnotu šmykového napätia na povrchu kruhového prierezu (Obr. 4.6)



Obr. 4.6. Rozloženie šmykových napätí v kruhovom priereze

Keď do rovnice (4.2) dosadíme za  $\tau(\rho)$  z rovnice (4.6), dostávame vzťah medzi šmykovým napätím a krútiacim momentom:

$$M_k = \int_{(S)} \tau_{max} \frac{\rho}{r} dS \rho = \frac{\tau_{max}}{r} \int_{(s)} \rho^2 dS = \frac{\tau_{max}}{r} J_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_k}{W_k} \quad \text{resp.} \quad \tau_\rho = \frac{M_k}{J_p} \rho \quad (4.7)$$

Výraz  $W_k = \frac{J_p}{r}$  sa nazýva prierezový modul v krútení.

Deformáciou pri krútení je uhol skrútenia, ktorý vyjadríme z porovnania rovníc (4.5) a (4.7):

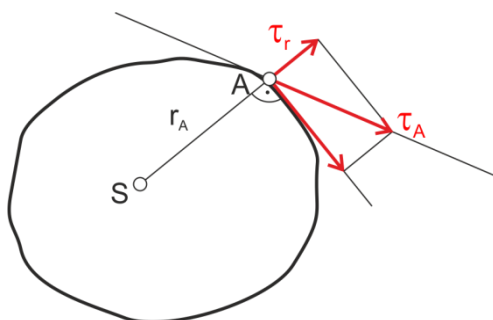
$$\frac{M_k}{J_p} \rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} G \Rightarrow \varphi = \int_l \frac{M_k}{GJ_p} dx \quad (4.8)$$



## 4.2 KRÚTENIE NEKRUIHOVÝCH PRIEREZOV

Priebehy šmykových napätí v priereze pri krútení kruhových hriadeľov sme odvodili za predpokladu, že priečne prierezy sa pri krútení nezbertia (len sa pootočia okolo ťažiska prierezu), čo je vlastne dôsledkom toho, že šmykové napätia sú kolmé na polomer  $r$ .

Ak je však prierez nekruihový, po deformácií krútením nezostanú prierezy rovinné. Stred krivosti má pre každý bod povrchu inú polohu a tá nie je totožná so stredom krútenia ( $S$  – stopa neutrálneho vlákna). Z predchádzajúcich odvodení vieme, že šmykové napätie  $\tau_A$  v ľubovoľnom bode na obvode má smer dotýčnice k obrysovej čiare a preto zložka  $\tau_r$ , vznikajúca pri rozklade do smeru kolmo na sprievodič  $r_A$  vedený so stredom krútenia  $S$ , je nenulová a spôsobuje zbertenie prierezu (Obr. 4.7).



Obr. 4.7. Rozklad napätia pri krútení nekruihového prierezu

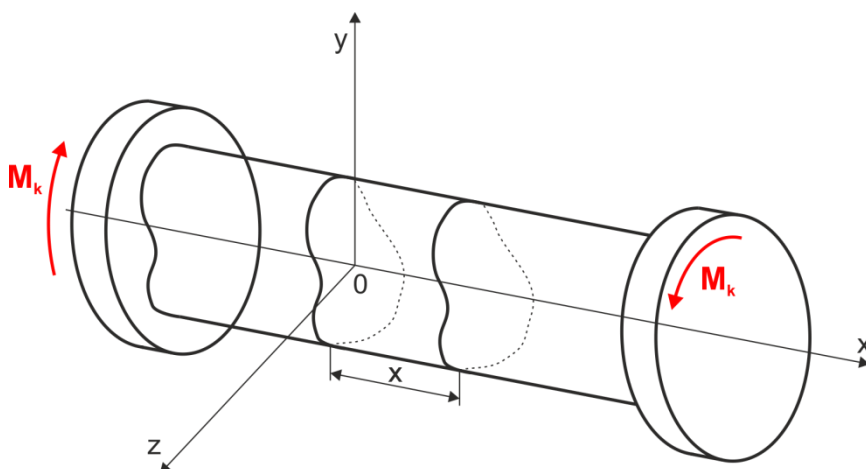
Ďalej budeme uvažovať, že deformácie spôsobené krútením budú veľmi malé, preto

- priemety priečných rezov v smere pozdĺžnej osi prúta ostanú nezmenené
- dĺžka neutrálneho vlákna sa nezmení

Podľa Saint-Venantovho princípu miestnych porúch sa rezy dostatočne vzdialené od pôsobísk momentov pretvoria všetky zhodne a vo všetkých bude pomerný uhol

skrútenia  $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$  rovnaký. Jeden z týchto rezov zvolíme ako vzťažný a vložíme

doň súradný systém (os  $x$  položíme do neutrálneho vlákna – Obr. 4.8).



Obr. 4.8. Zvlňenie nekruhového prierezu namáhaného krútením

Každý rez sa voči vzťažnému prierezu pootočí a okrem toho sa zvlňí. Pretože sa všetky prierezy pretvoria rovnako, posunú sa všetky body ľubovoľného vlákna  $x$  o rovnakú hodnotu  $u(y,z)$ . Platí teda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

Rez vzdialený od vzťažného prierezu o dĺžku  $x$  sa natočí o uhol

$$\varphi = \vartheta \cdot x \quad (4.10)$$

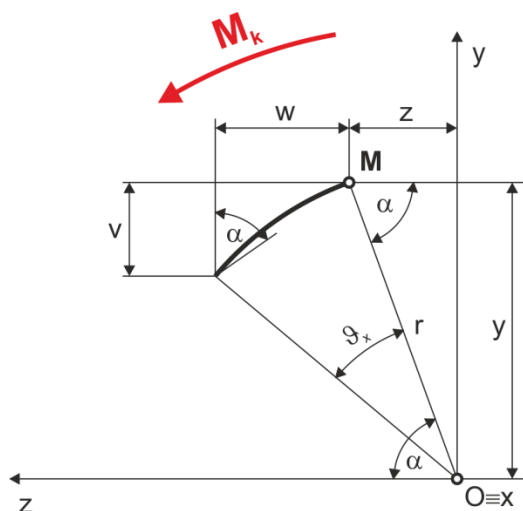
Ľubovoľný bod  $M$  tohto prierezu s pôvodnými súradnicami  $y$  a  $z$  sa pritom posunie po kruhovom oblúku o dĺžku (Obr. 4.9)

$$r \cdot \vartheta_x$$

Pomocou matematickej teórie pružnosti<sup>3</sup> možno ďalej odvodiť základnú rovnicu krútenia v tvare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.11)$$

<sup>3</sup> Vzhľadom na účel a prehľadnosť učebnice matematickú teóriu pružnosti neuvádzame. Podrobnejšie informácie možno nájsť v [3,5,6].



Obr. 4.9. Posunutie bodu M na povrchu nekrhového prierezu

Veľkosť posunutia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y,z)$  v každom bode pričného rezu dostaneme integráciou tejto základnej rovnice krútenia. Z nekonečného počtu riešení rovnice (4.11) platí len to riešenie, ktoré vyhovuje okrajovej podmienke, že šmykové napätie na nezaťaženom povrchu prúta má smer dotýčnice k obrysovej čiare.

Tieto riešenia sú matematicky náročné a presahujú rámec tejto učebnice. Ďalej budú uvedené riešenia len pre vybrané profily, ktoré sa najčastejšie vyskytujú v konštrukčnej praxi.

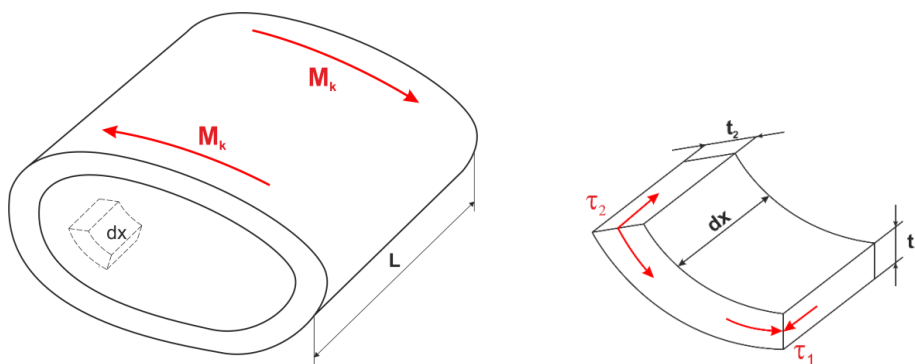
#### 4.2.1 Krútenie tenkostenných uzatvorených priereзов (Bredtove vzťahy)

Budeme uvažovať o voľnom krútení priereзов, ktorých hrúbka steny bude voči ostatným rozmerom malá. Pre presnosť riešenia akceptovateľnú pri inžinierskych výpočtoch je prípustná hrúbka do 1/10 šírky, výšky, resp. iného charakteristického rozmeru priereзу. Pre takéto priereзы môžeme považovať šmykové napätie po hrúbke steny za rovnomerne rozložené (presne by to platilo pre nekonečne tenkú stenu).

Na element steny tenkostenného profilu ľubovoľného tvaru namáhaného krútiacim momentom pôsobia napätia  $\tau_1$  a  $\tau_2$  na čelných aj pozdĺžnych rovinách ako združené šmykové napätia (Obr. 4.10). V oboch smeroch musí byť splnená podmienka rovnováhy. V pozdĺžnom smere (smer  $x$ )

$$\sum F_x = 0: \quad \tau_1 t_1 dx - \tau_2 t_2 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \text{konšt}$$

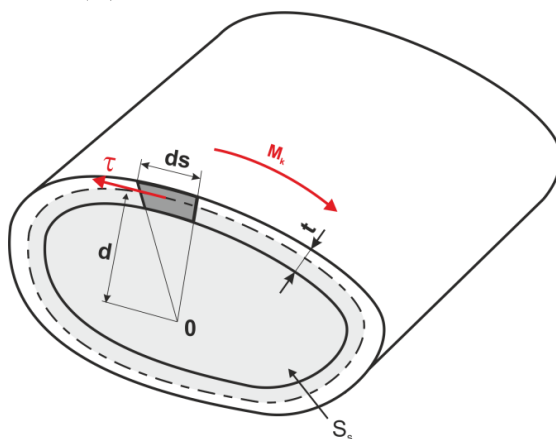


Obr. 4.10. Element tenkostenného prierezu namáhaného krútením

Súčin veľkosti šmykového napätia a prislúchajúcej hrúbky steny je konštantný, t. j. čím menšia je hrúbka steny, tým väčšie je šmykové napätie a naopak. Napätie tak v stene tenkostenného profilu vytvára šmykový tok, preto sa rovnica (4.12) nazýva tiež rovnica continuity šmykového toku.

Pri vyšetrowaní rovnováhy v smere čelnej roviny (kolmej na os  $x$ ) vytýčime v nej element s dĺžkou  $ds$ , v ktorom šmykový tok  $\tau \cdot t$  vytvára na dĺžke  $ds$  s ramenom  $d$  k stredu krútenia moment vnútorných síl (Obr. 4.11)

$$\int_{(S)} \tau t ds d = M_k$$



Obr. 4.11. Element čelnej roviny tenkostenného prierezu

Využitím rovnice (4.12) možno odvodiť vzťah medzi krútiacim momentom a vnútorným šmykovým napätím:

$$M_k = \tau \int_{(S)} ds \cdot d = 2S_S \tau \cdot t \Rightarrow \tau = \frac{M_k}{2S_S t} \quad (4.13)$$

kde  $\int_{(S)} ds \cdot d$  predstavuje dvojnásobok plochy uzatvorenej strednicou profilu.

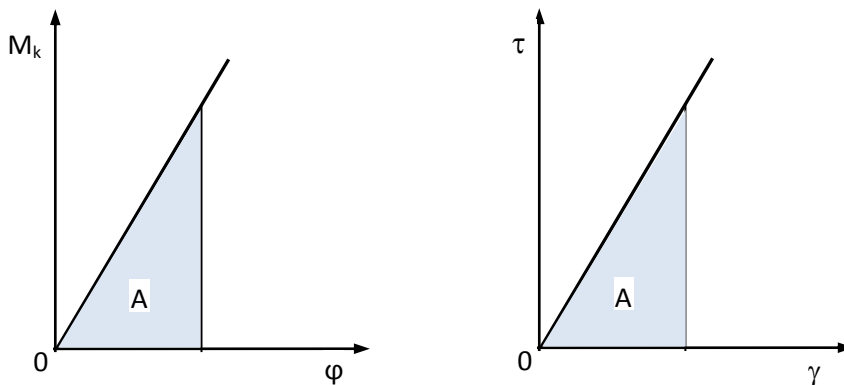
Rovnica (4.13) je prvým Bredtovým vzťahom. Uplatnením rovnice (4.12) môžeme napísať, že

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{2S_S t_{min}} \quad (4.14)$$

a vzťah v menovateli označiť ako prierezový modul v krútení tenkostenného uzatvoreného profilu

$$W_k = 2S_S t_{min} \quad (4.15)$$

Deformáciu tenkostenného uzatvoreného profilu namáhaného krútiacim momentom (uhol skrútenia) určíme z porovnania deformačnej práce vykonanej vonkajším krútiacim momentom a energie vnútorných síl (Obr. 4.12).



Obr. 4.12. Pracovný diagram vonkajšieho krútiaceho momentu a vnútorných síl

Prácu vonkajšieho krútiaceho momentu môžeme vyjadriť z diagramu skúšky v krútení, podľa ktorej je uhol skrútenia až po medzu úmernosti lineárne závislý od veľkosti krútiaceho momentu, v tvare

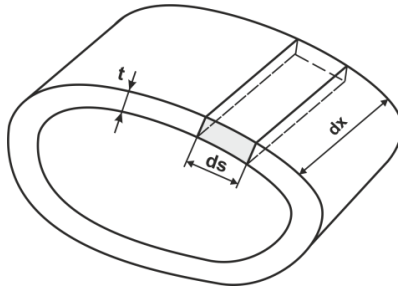
$$A = \frac{1}{2} M_k \varphi$$

V našom prípade na natočenie elementu tenkostenného prierezu, vytvoreného dvoma rovnobežnými rezmi vzdialenými  $dx$ , o uhol  $d\varphi$  je potrebná deformačná práca

$$dA = \frac{1}{2} M_k d\varphi \quad (4.16)$$

Práca šmykového napätia vyvolaného krútiacim momentom na element objemu  $ds \cdot dx$  o hrúbke  $t$  (Obr. 4.13) je rovná

$$dA_\tau = A_{1\tau} dV = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma dV = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} t \cdot ds dx$$



Obr. 4.13. Element objemu tenkostenného profilu

Integráciou tejto rovnice po dĺžke strednice profilu a jej rozšírením vyjadríme prácu vnútorných síl v tvare

$$dA = \frac{dx}{2G} \oint_{(s)} \tau^2 t \cdot ds \frac{t}{t} = \frac{dx \tau^2 t^2}{2G} \oint_{(s)} \frac{ds}{t} \quad (4.17)$$

Z rovnice (4.13) vyjadríme súčin  $S_s$

$$\tau \cdot t = \frac{M_k}{2S_s} ,$$

a po dosadení do rovnice (4.17) dostaneme

$$dA = \frac{M_k^2 dx}{8GS_s^2} \oint_{(s)} \frac{ds}{t} \quad (4.18)$$

Porovnaním rovníc (4.16) a (4.18)

$$\frac{1}{2} M_k d\varphi = \frac{M_k^2 dx}{8GS_s^2} \oint_{(s)} \frac{ds}{t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta = \frac{M_k}{4GS_S^2} \int_{(s)} \frac{ds}{t} \quad (4.19)$$

dostávame vzťah pre pomerný uhol skrútenia  $\vartheta$  tenkostenného uzatvoreného profilu, známy ako II.Bredtov vzťah. V zmysle rovnice (4.8) je moment tuhosti tenkostenného prierezu

$$J_k = \frac{4S_S^2}{\int_{(s)} \frac{ds}{t}} \quad (4.20)$$

Výraz  $\int_{(s)} \frac{ds}{t}$  predstavuje geometrickú charakteristiku prierezu vo forme integrálu

funkcie zmeny hrúbky steny po dĺžke jeho strednice. V prípade konštantnej hrúbky steny pozdĺž celej strednice sa bude uhol natočenia rovnať

$$\varphi = \frac{M_k}{4GS_S^2} \frac{s}{t} \int_{(l)} dx = \frac{M_k l}{4GS_S^2} \frac{s}{t} \quad .$$

Ak sa hrúbka steny nemení spojitě, ale je na konečných úsekoch konštantná, prejde integrál v rovnici (4.19) na súčet

$$\int_{(s)} \frac{ds}{t} = \sum_i \frac{\Delta s_i}{t_i} \quad (4.21)$$

#### 4.2.2 Krútenie obdĺžnikových prierezov

Ako vidieť z rovníc (4.7) a (4.14), pre rôzne tvary prierezov je možné šmykové napätia a uhol skrútenia vyjadriť podľa unifikovaných vzťahov

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$$

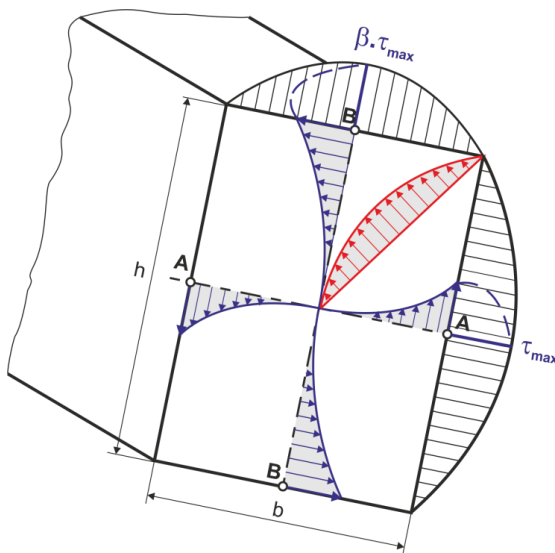
$$\varphi = \int_l \frac{M_k}{GJ_k} dx \quad (4.22)$$

v ktorých vystupujú veličiny  $W_k$  – prierezový modul v krútení a  $J_k$  – moment tuhosti prierezu v krútení.

Pre obdĺžnikový prierez možno ich hodnoty odvodiť podľa Saint-Venantovej teórie krútenia riešením rovnice (4.11) v tvare

$$W_k = \alpha \cdot b^2 h \qquad J_k = \gamma \cdot b^3 h \qquad (4.23)$$

Priebeh napätí po výške resp. šírke obdĺžnika, získaný experimentálne, je na Obr. 4.14.



Obr. 4.14. Priebeh šmykových napätí v obdĺžnikovom priereze.

Maximálna hodnota šmykového napätia sa nachádza v strede dlhšej strany obdĺžnika, ku ktorej je hodnota prierezového modulu v krútení daná rovnicou (4.17). Hodnota šmykového napätia v strede kratšej strany je

$$\tau'_{max} = \beta \cdot \tau_{max}$$

Koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sú závislé od pomeru strán obdĺžnika  $h/b$ , ich hodnoty sú uvedené v Tab.3.

Tab.3. Koeficienty pre krútenie obdĺžnikových prierezov

$h/b$	1	1,5	2	3	5	10	>10
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,291	0,313	0,333
$\beta$	1	0,859	0,795	0,753	0,744	0,742	0,742
$\gamma$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,312	0,333

Na lepšie priblíženie nelineárneho priebehu šmykových napätí od krútenia v obdĺžnikovom priereze slúži napr. tzv. membránová analógia, odvodená

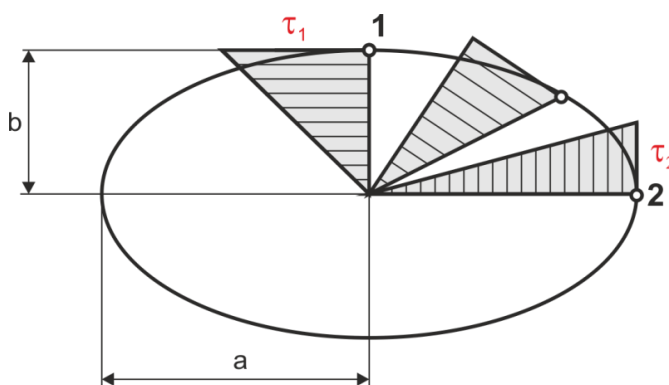


Prandtlom (1903), ktorá vychádza z diferenciálnej rovnice prihybovej plochy membrány natihnutej nad prierezom zaťaženej pričným tlakom – táto je analogická s rovnicou určujúcou rozloženie šmykových napätí od krútenia tohto prierezu. Podľa tejto analógie sa dvojnásobok objemu uzatvoreného pod napnutou membránou rovná veľkosti krútiaceho momentu, pôsobiaceho v priereze a uhol sklonu dotýčnice k tejto membránovej ploche udáva priebeh šmykového napätia v príslušnom vlákne prierezu. Podrobnejšie sa s touto analógiou možno oboznámiť v [1,3].

#### 4.2.3 Krútenie eliptických prierezov

Najväčšia hodnota šmykového napätia pri krútení eliptického prierezu sa nachádza na koncoch vedľajšej (kratšej) osi (Obr. 4.15) a rovná sa

$$\tau_{max} = \frac{16M_k}{\pi a^2 b} \quad (4.24)$$



Obr. 4.15. Priebeh šmykových napätí od krútenia v eliptickom priereze

Uhol skrútenia tyče eliptického prierezu je

$$\varphi = \int_l \frac{M_k 4\pi^2 J_p}{GS^4} dx \quad (4.25)$$

kde  $J_p = \frac{\pi}{64}(a^3b + ab^3)$  je polárny moment prierezu elipsy

a  $S = \frac{\pi ab}{4}$  je plocha prierezu elipsy.

V zmysle rovníc (4.13) je moment tuhosti elipsy daný vzťahom

$$J_k = \frac{\pi a^3 b^3}{16(a^2 + b^2)} \quad (4.26)$$

a prierezový modul ku vedľajšej (kratšej), resp.hlavnej (dlhšej) osi sa rovná

$$W_{k1} = \frac{\pi a^2 b}{16} \quad \text{resp.} \quad W_{k2} = \frac{\pi a b^2}{16} \quad (4.27)$$

#### 4.2.4 Krútenie trojuholníkových prierezov

Pri krútení rovnostranného trojuholníka so stranou  $a$  vzniká najväčšie šmykové napätie v strede strán a sa rovná

$$\tau_{\max} = \frac{20M_k}{a^3} \quad (4.28)$$

Uhol skrútenia rovnostranného trojuholníka možno vyjadriť ako

$$\varphi = \int_l \frac{M_k}{0,6GJ_p} dx = \int_l \frac{46,2M_k}{Ga^4} dx \quad (4.29)$$

Charakteristiky trojuholníkového prierezu v krútení teda sú

$$W_k = \frac{1}{20} a^3 \quad \text{a} \quad J_k = \frac{a^4}{46,2} \quad (4.30)$$

#### 4.2.5 Krútenie šesťuholníkových prierezov

Pri krútení pravidelného šesťuholníka vzniká najväčšie šmykové napätie v strede strán a sa rovná

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,217.Sd} \quad (4.31)$$

Uhol skrútenia pravidelného šesťuholníka je možné vyjadriť ako

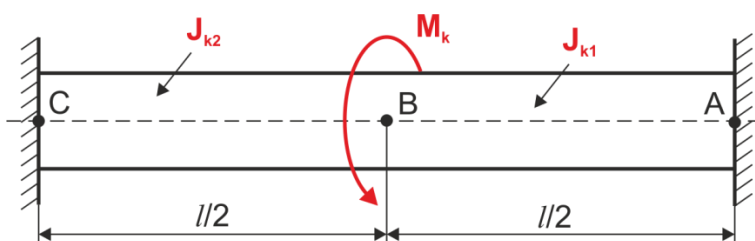
$$\varphi = \int_l \frac{M_k}{G.0,133.Sd^2} dx = \int_l \frac{6,44M_k}{Gd^4} dx \quad (4.32)$$

kde  $S$  je plocha prierezu pravidelného šesťuholníka a  $d$  je priemer kružnice vpísanej do prierezu.

Charakteristiky pravidelného šesťuholníkového prierezu v krútení teda sú

$$W_k = \frac{1}{0,217 \cdot Sd} \quad a \quad J_k = \frac{d^4}{6,44} \quad (4.33)$$

**Príklad 1:** Vypočítajte a znázornite priebeh krútiacich momentov pozdĺž hriadeľa na Obr. 4.16 Vypočítajte uhlové natočenie v mieste pôsobenia krútiaceho momentu.

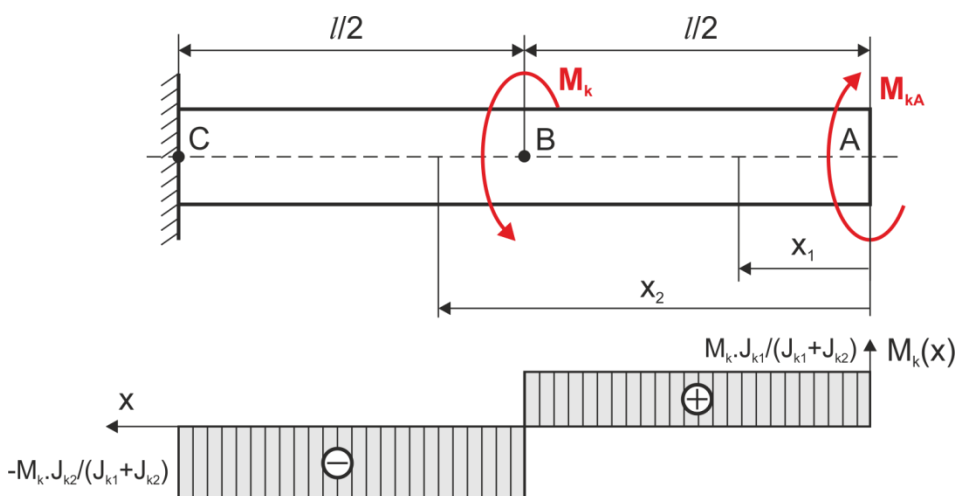


Obr. 4.16. Hriadeľ k príkladu 1

Priebeh krútiaceho momentu je potrebné vyšetriť v dvoch myšlených rezoch (Obr. 4.17):

$$x_1 \in (0, l/2): M_k(x_1) = M_{kA}$$

$$x_2 \in (l/2, l): M_k(x_2) = M_{kA} - M_k$$



Obr. 4.17 Výsledný priebeh krútiacich momentov

Z uloženia hriadeľa je zrejmé, že vzájomné natočenie jeho koncových prierezov musí byť rovné nule (deformačná podmienka):

$$\varphi_{AB} = 0, \quad \text{t.j.} \quad \int_0^{l/2} \frac{M_{kA}}{GJ_{k1}} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{M_{kA} - M_k}{GJ_{k2}} dx_2 = 0$$

Po integrácií a úprave je možné vyjadriť neznámy krútiaci moment v tvare

$$M_{kA} = \frac{J_{k1}}{J_{k1} + J_{k2}} M_k$$

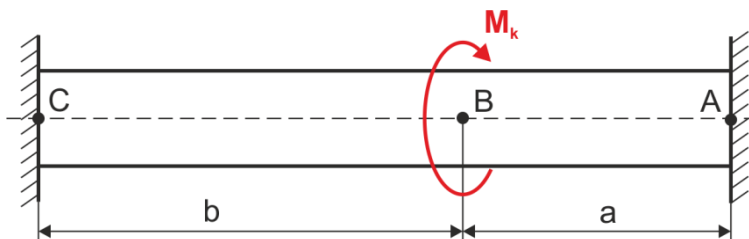
Z výsledku vidieť, že reakcie vo forme krútiacich momentov sa čo do veľkosti zhodujú s tuhosťami jednotlivých prierezov, t. j. na strane s menšou torznou tuhosťou bude aj menší moment v uložení a naopak.

Uhlové natočenie v mieste pôsobenia krútiaceho momentu je

$$\varphi_{M_k} = \int_0^{l/2} \frac{M_{kA}}{GJ_{k1}} dx = \dots = M_k \frac{l}{2G(J_{k1} + J_{k2})}$$

Ak v prípade rovnakej tuhosti pozdĺž celého hriadeľa pôsobiaci moment rozdeľuje jeho celkovú dĺžku na dva úseky nerovnakej dĺžky (Obr. 4.18), bude postup riešenia obdobný. Neznámy krútiaci moment v pravom uložení bude

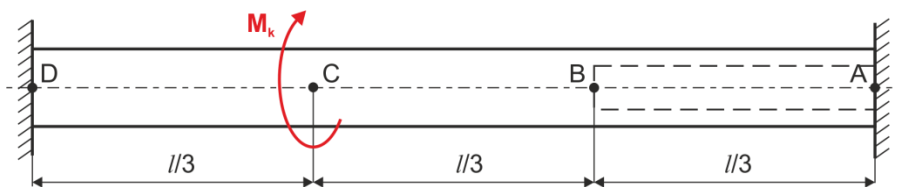
$$M_{kA} = \frac{b}{a+b} M_k$$



Obr. 4.18. Hriadeľ nesymetricky zaťažný krútiacim momentom

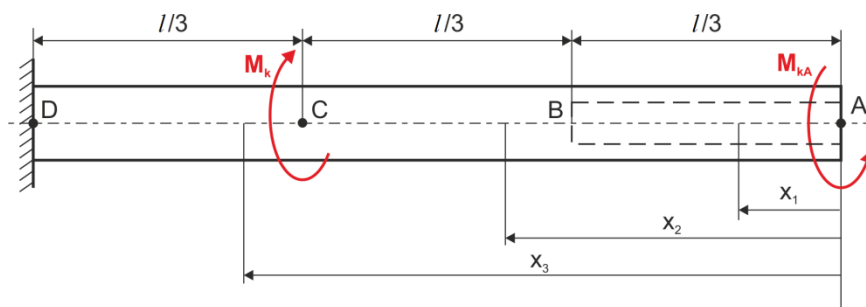
Teda väčšia reakcia vznikne na bližšom konci hriadeľa od miesta pôsobenia momentu.

**Príklad 2:** Vypočítajte a znázornite priebeh krútiacich momentov pozdĺž hriadeľa na Obr. 4.19.



Obr. 4.19. Hriadeľ k príkladu 2

Priebeh krútiaceho momentu je potrebné vyšetriť v troch myšlených rezoch (Obr. 4.20):



Obr. 4.20. Uvoľnenie a myšlené rezy hriadeľa k príkladu 2

$$x_1 \in (0, l/3): M_k(x_1) = M_{kA}$$

$$x_2 \in (l/3, 2l/3): M_k(x_2) = M_{kA}$$

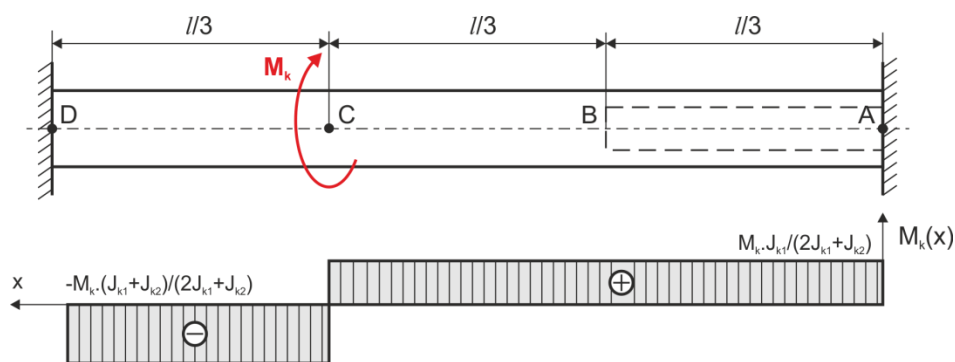
$$x_3 \in (2l/3, l): M_k(x_3) = M_{kA} - M_k$$

Z uloženia hriadeľa je zrejmé, že vzájomné natočenie jeho koncových prierezov sa musí rovnať nule (deformačná podmienka):

$$\varphi_{AB} = 0, \quad t. j. \quad \int_0^{l/3} \frac{M_{kA}}{GJ_{k1}} dx_1 + \int_{l/3}^{2l/3} \frac{M_{kA}}{GJ_{k2}} dx_2 + \int_{2l/3}^l \frac{M_{kA} - M_k}{GJ_{k2}} dx_3 = 0$$

Po integrácií a úprave možno vyjadriť neznámy krútiaci moment v tvare

$$M_{kA} = \frac{J_{k1}}{2J_{k1} + J_{k2}} M_k$$



Obr. 4.21. Výsledný priebeh krútiacich momentov

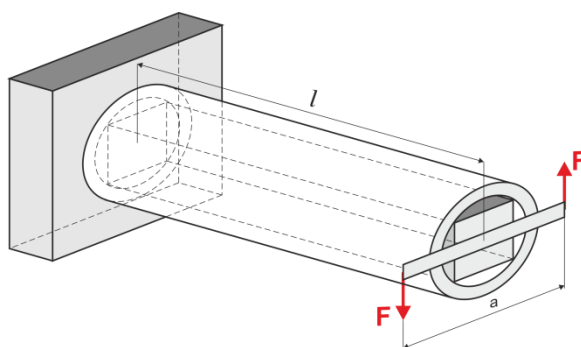
**Príklad 3:** Vo vnútri hlavného nosníka nápravy je uložená torzná tyč z rovnakého druhu materiálu. Sústava je spoločne namáhaná dvojicou síl (Obr. 4.22). Vypočítajte veľkosti krútiacich momentov prenášaných jednotlivými profilmi a každý pevnostne skontrolujte.

Krútiaci moment od zaťažujúcej dvojice síl krúti dva prierezy, preto platí

$$M_k = F \cdot a = M_k^1 + M_k^2 \quad (a)$$

Pretože obidva prierezy sú krútené súčasne k tomu istému miestu, platí deformačná podmienka rovnosti uhlov skrútenia

$$\varphi^1 = \varphi^2 \Rightarrow \frac{M_k^1 l}{GJ_k^1} = \frac{M_k^2 l}{GJ_k^2} \quad (b)$$



Obr. 4.22. Krútenie vložených prierezov k príkladu 3

Riešením sústavy rovníc (a), (b) vychádza krútiaci moment prenášaný vonkajším, resp. vnútorným prierezom v tvare

$$M_k^1 = F \cdot a \frac{J_k^1}{J_k^1 + J_k^2} \quad \text{resp.} \quad M_k^2 = F \cdot a \frac{J_k^2}{J_k^1 + J_k^2}$$

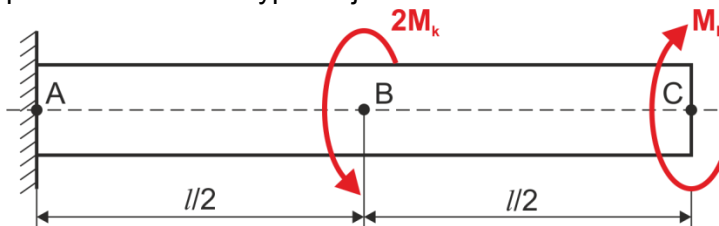
Pevnostná podmienka pre jednotlivé prierezy je

$$\tau_{max}^1 = \frac{M_k^1}{W_k^1} \leq \tau_{dov} \quad \text{resp.} \quad \tau_{max}^2 = \frac{M_k^2}{W_k^2} \leq \tau_{dov}$$

Vloženie vnútorného profilu do hlavného nosníka nápravy nemusí mať vždy nosnú funkciu, môže slúžiť ako pružiaci člen, stabilizátor, atď.

### Autotest

1. Vypočítajte priebeh krútiaceho momentu hriadeľa zaťaženého a uloženého podľa Obr. 4.23 a vypočítajte uhol skrútenia koncového bodu C.



Obr. 4.23 Hriadeľ k príkladu 1 Autotestu

2. Vypočítajte potrebný uhol skrútenia na dosiahnutie maximálneho šmykového napätia  $\tau_{kt}$  v medenom drôte ( $\sigma_{kt} = 60\text{MPa}$ ,  $G = 48\text{GPa}$ ) prierezu  $1\text{mm}^2$  dĺžky  $1\text{m}$ .
3. Koľkonásobne sa zväčší uhol skrútenia pri rozrezaní (prerušení strednice) medzikruhového prierezu vonkajšieho priemeru  $D$  a hrúbky steny  $t = 0,1D$ ?
4. Navrhňte vyhovujúci priemer  $d$  pre votknutý hriadeľ zaťažený na voľnom konci krútiacim momentom  $M_k = 10\text{N.m}$ . Aký bude vtedy zodpovedajúci uhol skrútenia voľného konca hriadeľa? ( $\tau_{kt} = 100\text{MPa}$ ,  $l = 0,1\text{m}$ )
5. Nahraďte torznú tyč plného kruhového prierezu s priemerom  $D$  rúrkou pri zachovaní rovnakej torznej tuhosti ( $t = 0,1D$ ).

Výsledky:

1.  $M_{k(x1)} = M_k$  ,  $M_{k(x2)} = -M_k$  ,  $\varphi = 0$

2.  $71^\circ$

3. 61,5-krát

4.  $D > 3,7 \text{ mm}$  ,  $\varphi = 0,68 \text{ rad}$

5.  $D_{tr} = 1,141.D$



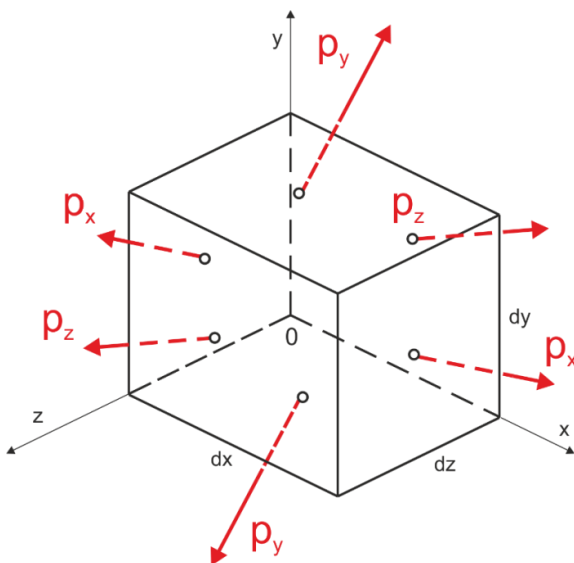
## 5 NAPÄTOSŤ A PRETVORENIE

Napätie, definované ako časť vnútornej sily pripadajúca na jednotkovú plochu (rov.1.4), sa z bodu na bod mení. Preto napätia sledujeme na elementárnych plochách resp. elementárnych hranoloch, ktorými nahrádzame bod. Jednej roviny vo všeobecnosti prislúcha dvojica napätí – normálové a šmykové. V každej rovine elementárneho hranolčeka, resp. v každom smere elementárnej plochy nadobúdajú napätia iné hodnoty – také, aké vyvolalo vonkajšie zaťaženie. Tento mechanický stav zaťaženého telesa označujeme ako napätosť telesa a súhrn napätí vo všetkých rovinách elementu objemu materiálu nazývame napätosťou v bode. Na kompletne poznanie napätosti v bode bude stačiť poznať napätia pôsobiace v rovinách elementu objemu. Všetky ostatné hodnoty napätí, ale aj deformácií sa budú dať matematicky vyjadriť.

Napätosť vo všeobecnosti delíme na:

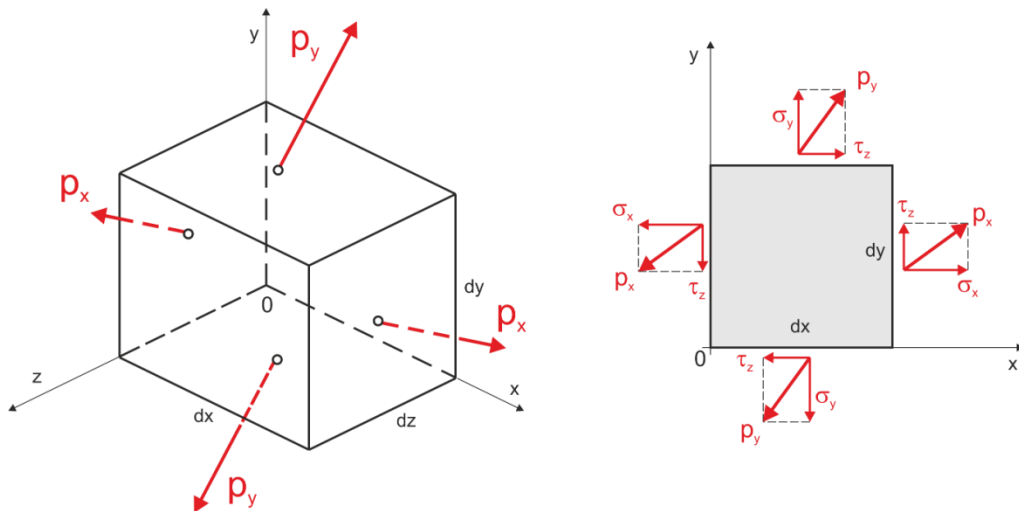
- priestorovú (trojosovú) napätosť,
- rovinnú (dvojosovú) napätosť,
- priamkovú (jednoosovú) napätosť.

Na Obr. 5.1 je objemový element materiálu s vnútornými silami pripadajúcimi na jednotku príslušnej plochy (t. j. napätiami), ktoré prechádzajú ťažiskami jeho jednotlivých plôšok. Ak sú všetky napätia nenulové, ide o priestorovú napätosť.



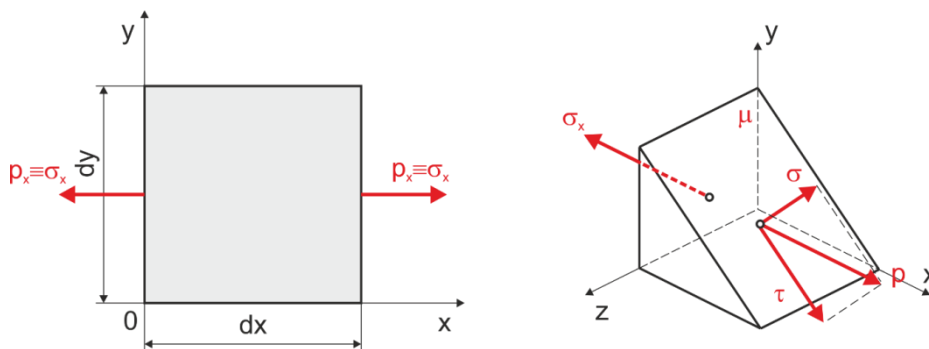
Obr. 5.1. Objemový element – priestorová napätosť

Ak v dvoch protifaľných rovinách sa budú napätia (napr.  $p_z$ ) rovnať nule a v ostatných stenách budú napätia nenulové, ide o rovinnú napätosť (Obr. 5.2).



Obr. 5.2. Objemový element – rovinná napätosť

Priamková napätosť je stav, keď napr. napätia  $p_x$  a  $p_z$  sa rovnajú nule a nenulové napätie musí byť  $p_x = \sigma_x$  (Obr. 5.3).

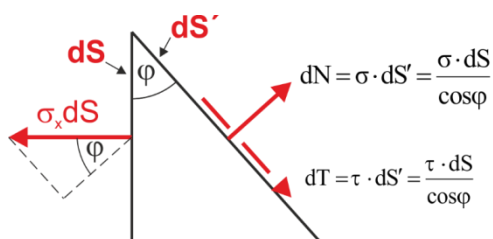


Obr. 5.3. Objemový element – priamková napätosť

### 5.1 Priamková (jednoosová) napätosť

Výsledný účinok vnútorných síl na elementárnu plochu označený ako  $p$  je výhodné rozložiť vzhľadom k rovine  $\mu$  do smeru normály –  $\sigma$  (normálové napätie), a do smeru dotyčnice  $\tau$  (šmykové napätie) – ako je to už na elementárnom

hranolčeku na Obr. 5.3. Podmienky rovnováhy vnútorných síl na elemente do smeru normály a do smeru dotyčnice k ploche  $dS$  (Obr. 5.4) majú tvar



Obr. 5.4. Rozklad priamkovej napätosti do šikmej roviny

$$\sum F_n = 0 : \quad \sigma \cdot \frac{dS}{\cos \varphi} - \sigma_x \cdot dS \cdot \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0 : \quad \tau \cdot \frac{dS}{\cos \varphi} - \sigma_x \cdot dS \cdot \sin \varphi = 0$$

Hľadané hodnoty normálového a šmykového napätia vyjadríme ako

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi \quad , \quad \tau = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

S ohľadom na ďalšiu výhodnosť použijeme vzťahy pre transformáciu druhej mocniny funkcií uhla na funkcie dvojnásobného argumentu:

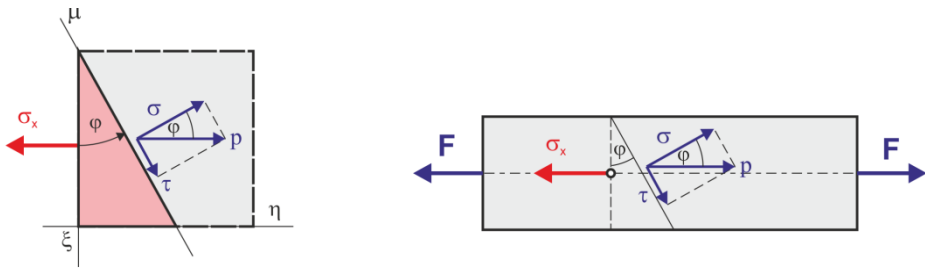
$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \quad \text{resp.} \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\varphi \tag{5.1}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Z rovníc (5.1) je vidieť, že maximálnu hodnotu nadobúda normálové napätie v rovine  $\varphi = 0$  (vtedy je šmykové napätie rovné nule) a šmykové napätie v rovine  $\varphi = 45^\circ$ .

Najčastejší prípad jednoosovej napätosti je namáhanie tyče čistým ťahom alebo tlakom (Obr. 5.5)



Obr. 5.5 .Tyč namáhaná čistým ťahom – situácia v šikmej rovine

Názornú a užitočnú grafickú interpretáciu napätí v jednotlivých rovinách elementu dostaneme nasledujúcou úpravou rovníc (5.1) – najprv ich prepíšeme do tvaru

$$\sigma - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi$$

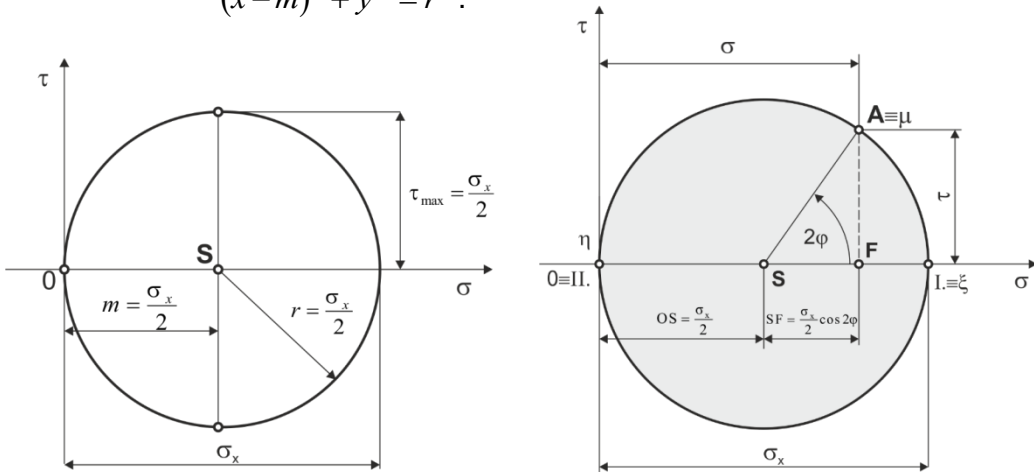
$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$$

Umocnením a sčítaním rovníc dostaneme

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \quad (5.2)$$

Ak na osi x budeme znázorňovať normálové napätia  $\sigma$  a na osi y šmykové napätia  $\tau$ , potom rovnica (5.2) je rovnicou kružnice

$$(x - m)^2 + y^2 = r^2 .$$



Obr. 5.6. Mohrova kružnice jednoosovej napätosti a jej použitie

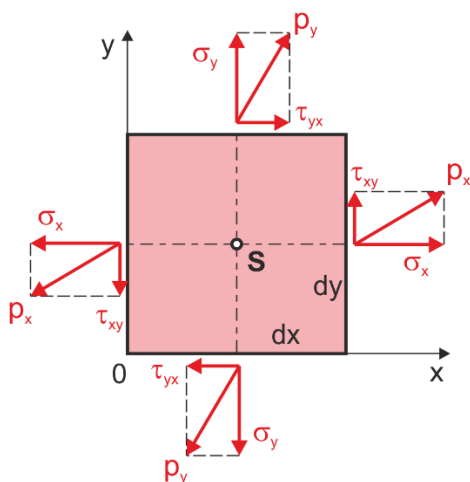
Táto kružnica sa podľa jej autora nazýva **Mohrova kružnica**, jej stred leží na osi  $\sigma$  posunutý o hodnotu  $m = \frac{\sigma_x}{2}$  od počiatku a jej polomer je  $r = \frac{\sigma_x}{2}$ .

Použitie Mohrovej kružnice jednoosovej napätosti:

- každému rezu elementárneho hranola (t. j. každej roviny s prislúchajúcimi napätiami  $\sigma$  a  $\tau$ ) zodpovedá bod na Mohrovej kružnici so súradnicami  $[\sigma, \tau]$ ,
- roviny pôsobenia napätia  $\sigma_x$  zodpovedá na kružnici bod I – od neho sa stredovým uhlom o dvojnásobnej veľkosti  $2\varphi$  ako v hranolčeku dostávame do roviny označenej  $\mu$ , v ktorej hľadáme veľkosti napätí  $\sigma$  a  $\tau$ .

## 5.2 Rovinná (dvojosová) napätosť

Rovinná napätosť predstavuje prípad, kedy na elementárny hranol pôsobia napätia  $p_x$  a  $p_y$  ( $p_z = 0$ ). Tieto napätia je výhodné rozložiť do smeru normály a do smeru dotyčnice k príslušnej rovine. Šmykové napätie  $\tau_{xy}$  označuje šmykové napätie pôsobiace v plôške kolmej na os  $x$  a rovnobežnej s osou  $y$ . Z rovnováhy momentov ku stredu  $S$  elementárnej plôšky dostaneme (Obr. 5.7):



$$\sum M_S = 0:$$

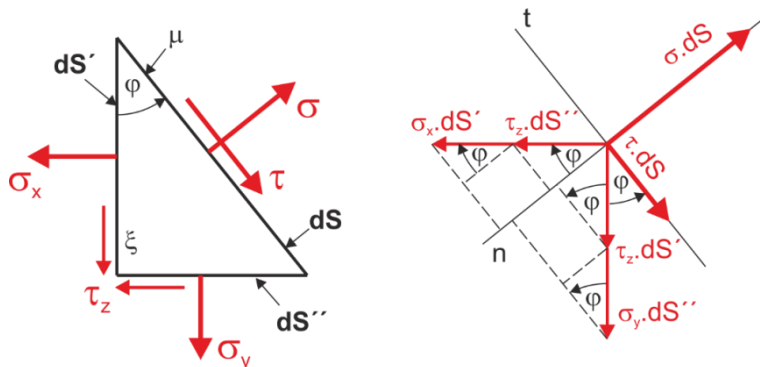
$$2 \cdot \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - 2 \cdot \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$$

Obr. 5.7. Zákon združených šmykových napätí

Výsledok podmienky rovnováhy je vlastne vyjadrením zákona združených šmykových napätí, t. j. šmykové napätia vo vzájomne kolmých rovinách elementu objemu (nahradzujúceho bod) sú rovnaké.

Ďalej je potrebné určiť rovnice napätí vo všeobecnej rovine  $\mu$  – podobne ako pri priamkovej napätosti pomocou podmienok rovnováhy vnútorných síl na elementárnom hranolčeku do smeru normály a dotyčnice k tejto rovine (Obr. 5.8):



Obr. 5.8. Rovinná napätosť – situácia vo všeobecnej rovine

$$\sum F_n = 0:$$

$$\sigma dS - \sigma_x dS' \cos \varphi - \sigma_y dS'' \sin \varphi - \tau_z dS'' \cos \varphi - \tau_z dS' \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0:$$

$$\tau_z dS - \sigma_x dS' \sin \varphi + \sigma_y dS'' \sin \varphi - \tau_z dS'' \sin \varphi + \tau_z dS' \cos \varphi = 0$$

Z obrázka 5.8 je vidieť, že

$$dS' = dS \cos \varphi \quad a \quad dS'' = dS \sin \varphi$$

Dosadením týchto vzťahov do podmienok rovnováhy môžeme vyjadriť napätia  $\sigma$  a  $\tau$  vo všeobecnej rovine takto:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_z \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi + \tau_z \sin^2 \varphi - \tau_z \cos^2 \varphi$$

Pomocou známych vzťahov z matematiky môžeme mocniny goniometrických funkcií nahradiť funkciami dvojnásobného uhla

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

a rovnice pre napätia  $\sigma$  a  $\tau$  upraviť do tvaru:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi\end{aligned}\tag{5.3}$$

Najdôležitejšie hodnoty napätí sú ich extrémne hodnoty – tzv. hlavné napätia, ktorých polohu (smer  $\varphi_0$ ) určíme z podmienky extrému funkcie napätia  $\sigma$  v rovnici (5.3):

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d\sigma}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_0} = 0: & \quad -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\varphi_0 - 2\tau_z \cos 2\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Dosadením za uhol  $\varphi_0$  do prvej rovnice (5.3) dostaneme veľkosti hlavných napätí. V rovniciach (5.3) vystupujú funkcie sinus a cosinus, preto využijeme z matematiky známú súvislosť medzi trigonometrickými funkciami

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi_0 &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y} \right)^2}} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}} \\ \sin 2\varphi_0 &= \frac{\pm \operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \dots\dots\dots = \pm \frac{2\tau_z}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}}\end{aligned}$$

Aby sme mohli rozhodnúť, ktoré znamienko vyhovuje pre extrém (maximum), potrebujeme druhú deriváciu funkcie napätia z rovnice (5.3):

$$\left[ \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_0} = 0: \quad -2(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi_0 - 4\tau_z \sin 2\varphi_0 \quad .$$

Po dosadení za  $\cos 2\varphi_0$  a  $\sin 2\varphi_0$  a po úprave dostaneme výraz

$$\left[ \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} \right]_{\varphi=\varphi_0} = 0: \quad - \left[ \pm 2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \right] \quad .$$

Aby mala funkcia napätia  $\sigma(\varphi)$  maximum (t. j. hľadané hlavné napätia), musí byť jej druhá derivácia záporná (funkcia je vtedy konkávna). V poslednom výraze to nastane vtedy, keď pri člene v zátvorke bude kladné znamienko, teda

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}} \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}}$$

Dosadením týchto vzťahov do prvej rovnice (5.3) a po jej úprave dostávame hľadané extrémny funkcie napätia v elementárnom hranolčeku rovinnej napätosti v tvare

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} \quad (5.5)$$

Dosadením do druhej z rovníc (5.3) za funkcie uhla  $\varphi_0$  zistíme, že v rovinách hlavných napätí sú šmykové napätia nulové.

Rovnakým postupom odvodenia extrémnych hodnôt šmykových napätí by sme dostali ich veľkosť v tvare

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} \quad (5.6)$$

Extrémne hodnoty šmykových napätí pôsobiace v dvoch vzájomne na seba kolmých rovinách sa líšia len znamienkom, čo do veľkosti sú rovnaké – to potvrdzuje zákon združených šmykových napätí (Obr. 5.4). V rovinách maximálnych šmykových napätí pôsobia súčasne aj nenulové normálové napätia.

Ak urobíme súčet hlavných napätí definovaných rovnicou (5.5), dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{konšt} \quad (5.7)$$

To dokazuje dôležitý fakt, že súčet normálových napätí v dvoch na seba kolmých rovinách je konštantný sa rovná súčtu hlavných napätí. Nazýva sa **invarianta napätí**.



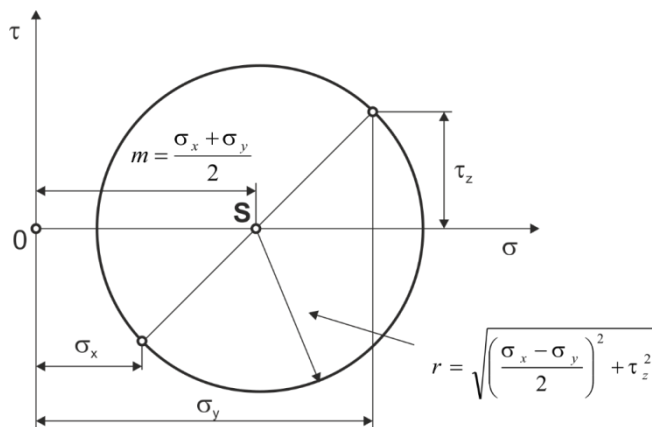
Rovnako ako pri jednoosovej napätosti možno upraviť rovnice (5.3) na rovnicu kružnice. Rovnice (5.3) najprv upravíme, potom umocníme a sčítame:

$$\left. \begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi & /^2 \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi & /^2 \end{aligned} \right\} +$$

$$\left( \sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_z^2$$

Porovnaním s rovnicou kružnice v tvare  $(x-m)^2 + y^2 = r^2$  vidieť, že stred kružnice leží na osi  $\sigma$  vo vzdialenosti

$$m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ a polomer je } r = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_z^2} \quad (\text{Obr. 5.9}).$$

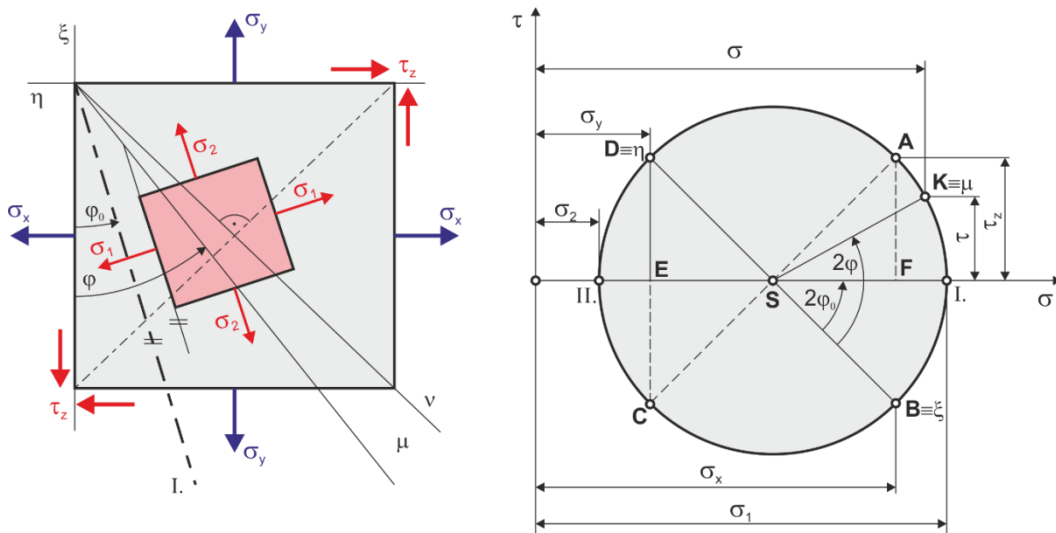


Obr. 5.9. Mohrova kužnica rovinnej napätosti

Použitie Mohrovej kružnice rovinnej napätosti:

- každému rezu elementu objemu (t. j. každej rovine s prislúchajúcimi napätiami  $\sigma$  a  $\tau$ ) zodpovedá bod na Mohrovej kružnici so súradnicami  $[\sigma, \tau]$ ,

- roviny  $\xi$  (pôsobia v nej napätia  $\sigma_x$  a  $\tau_z$ ) zodpovedá na kružnici bod so súradnicami  $[\sigma(\varphi=0), \tau(\varphi=0)]$ , t. j. podľa rovníc (5.3) bod  $[\sigma_x - \tau_z]$  – označený na Obr. 5.10 ako B za predpokladu, že  $\tau_z$  má kladnú hodnotu,
- roviny hlavného napätia  $\sigma_1$  zodpovedá bod I pootočený o stredový uhol  $2\varphi_0$  oproti bodu B napätí  $\sigma$  a  $\tau$
- ľubovoľnej roviny  $\mu$ , ktorá je pootočená oproti rovine  $\xi$  o uhol  $\varphi$  zodpovedá na kružnici bod K pootočený o uhol  $2\varphi$ .



Obr. 5.10. Použitie Mohrovej kružnice rovinnej napätosti

Priestorovú napätosť a jej grafické znázornenie v tejto učebnici neuvádzame, podrobne je popísaná v [3,4].

Stavu napätosti prislúcha konkrétny stav pretvorenia, ktorý znamená súbor všetkých deformácií (predĺžení a skosení) v elemente objemu reprezentujúcom určitý bod telesa. Ako bolo spomenuté už v kap.1 Obr. 10, je deformácia vždy trojosová, dokonca aj pri jednoosovom ťahu. V praxi sa často vyhodnocuje na povrchu telies rovinný stav deformácie, ktorého rovnice sú analogické s rovnicami rovinnej napätosti (5.3):

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\varphi + \frac{\gamma_z}{2} \sin 2\varphi$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\varphi - \frac{\gamma_z}{2} \cos 2\varphi$$
(5.8)

Hlavné pomerné predĺženia sa dajú vypočítať podľa vzťahu

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \quad (5.9)$$

a pôsobia v rovine pod uhlom

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (5.10)$$

V rovniciach napätosti, resp. pretvorenia sú analogické veličiny

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \varepsilon & \tau &\rightarrow \frac{\gamma}{2} & \sigma_1 &\rightarrow \varepsilon_1 \\ \sigma_x &\rightarrow \varepsilon_x & \tau_z &\rightarrow \frac{\gamma_z}{2} & \sigma_2 &\rightarrow \varepsilon_2 \\ \sigma_y &\rightarrow \varepsilon_y & & & & \end{aligned}$$

Vzťahy (5.3) až (5.6) pre napätosť a (5.8) až (5.10) pre pretvorenie nie sú závislé od materiálových konštánt, t. j. platia pre všetky materiály a pre deformácie elastické aj plastické. Vzhľadom na zanedbaný vplyv skosenia na zmenu dĺžky strán elementu objemu platia tieto vzťahy tým presnejšie, čím sú deformácie menšie.

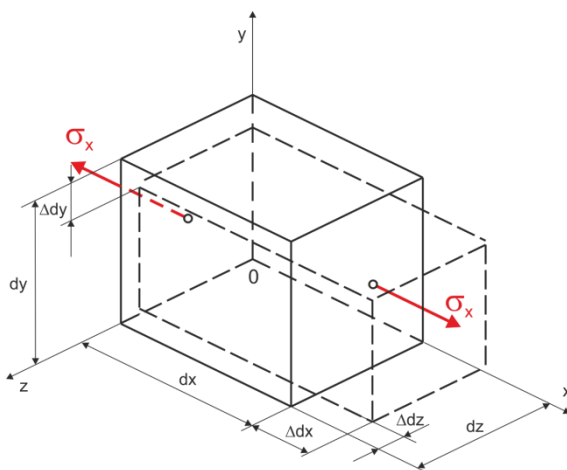
### 5.3 Súvis medzi napätosťou a pretvorením

Vzťah medzi napätím a pomernou deformáciou je v lineárnej oblasti správania sa materiálu definovaný Hookovým zákonom. Pri jednoosovej napätosti pre pomerné predĺženie v smere osi  $x$  platí

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

Priečne zúženia sú definované pomocou Poissonovho čísla (*Obr. 5.11*) rovnicami

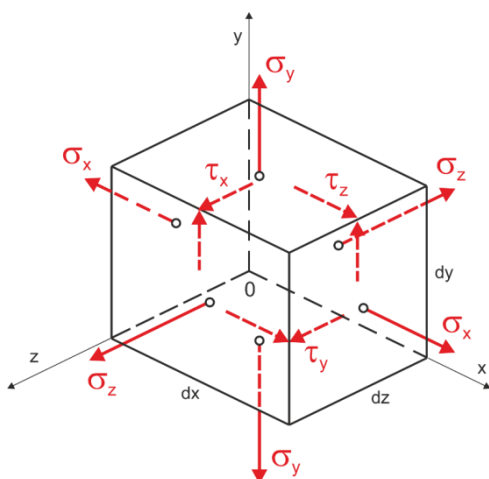
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{a} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (5.11)$$



Obr. 5.11. Priamková napätosť vyvoláva priestorové pretvorenie

### Hookov zákon pri priestorovej napätosti

Vyšetríme pretvorenie elementu objemu, ktorý je v stave priestorovej napätosti podľa Obr. 5.12.



Obr. 5.12. Priestorová napätosť

Deformácie elementu objemu určíme za predpokladu platnosti Hookovho zákona a zákona superpozície účinkov pre izotropné teleso. Najprv necháme pôsobiť napätie  $\sigma_x$ , ktoré vyvolá v smere osí  $x$  pomerné predĺženie a v smere osí  $y$  a  $z$  pomerné skrútenie:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon'_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon'_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Pri pôsobení samotného napätia  $\sigma_y$  budú pomerné predĺženia

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon''_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Pri pôsobení samotného napätia  $\sigma_z$  budú pomerné predĺženia

$$\varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon'''_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

Pri súčasnom pôsobení napätí v troch smeroch dostaneme výsledné pomerné predĺženia algebraickým súčtom jednotlivých predĺžení, t. j.

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x \quad \varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y \quad \varepsilon_z = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z$$

Po dosadení a úprave dostávame rovnice

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pri spolupôsobení šmykových napätí treba k týmto rovniciam pridať vzťahy pre uhlové pretvorenia (skosenia) v tvare

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G} ; \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G} ; \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \quad (5.13)$$

Rovnice (5.12) a (5.13) sú tzv. **rovnice elasticity priestorovej napätosti**.

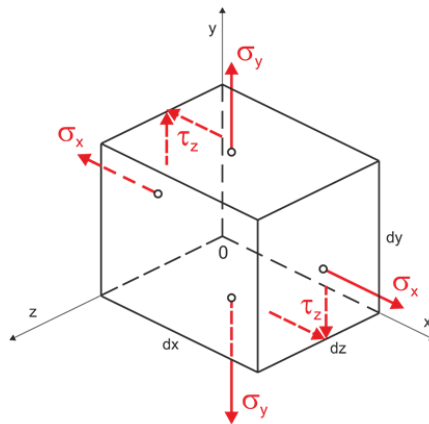
V praxi je na výpočet napätí niekedy potrebné použiť tzv. recipročné rovnice elasticity v tvare

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x - \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_z - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]\end{aligned}\tag{5.14}$$

Prípád rovinnej napätosti (Obr. 5.13.) je špeciálnym prípadom priestorovej napätosti, keď  $\sigma_z = 0$  – vtedy **rovnice elasticity pre rovinnú napätosť** budú mať tvar

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \varepsilon_z = \frac{-\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}\tag{5.15}$$

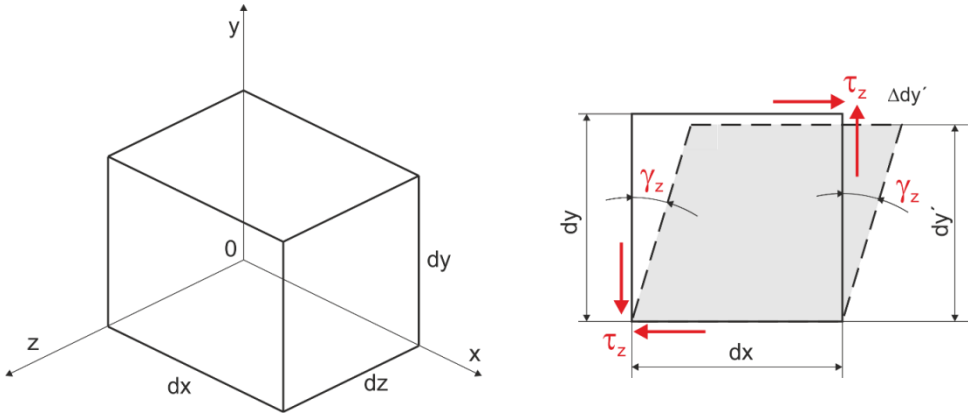


Obr. 5.13. Rovinná napätosť

### Pomerná zmena objemu

Skutočnosť, že pôsobením vonkajších síl sa telesá deformujú a menia sa ich rozmery má za následok aj zmenu ich objemu. Pretvorenie elementu objemu na Obr. 5.14 je dané pomernými predĺženiami  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  a pomernými skoseniami  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,

$\gamma_z$ . Zmeny uhlov (t. j. zmena kolmosti strán vplyvom šmykových napätí) bývajú v porovnaní so zmenou strán elementu objemu malé, preto ich vplyv na zmenu dĺžky strán zanedbávame, t. j.  $dy \doteq dy'$  (Obr. 5.14).



Obr. 5.14. Element objemu a vplyv skosenia na dĺžku strany

Ak pôvodný objem elementu objemu je  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , potom po pretvorení sa bude objem elementu objemu rovnáť

$$dV' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = dx(1 + \varepsilon_x)dy(1 + \varepsilon_y)dz(1 + \varepsilon_z)$$

Po vynásobení malé veličiny vyššieho rádu (súčiny  $\varepsilon$ ) zanedbáme a dostaneme

$$dV' = dx \cdot dy \cdot dz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Zmena objemu (t. j. objem pretvoreného elementu mínus pôvodný objem elementu) je

$$\Delta dV = dV' - dV = dV(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

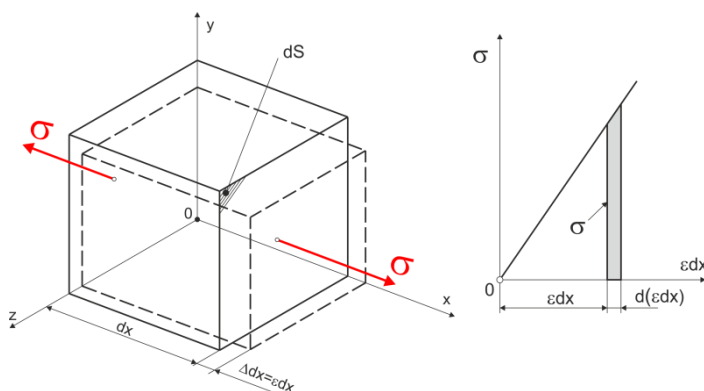
Pomernú zmenu objemu vyjadríme v tvare

$$\theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (5.16)$$

## 5.4 Energia napätosti

### *Energia napätosti normálových napätí.*

Pod pojmom energia napätosti rozumieme energiu, ktorá sa v telese akumuluje v dôsledku práce vonkajších síl. V medziach pružných deformácií (platí Hookov zákon) sa práca vonkajších síl (sily, posunutia) rovná práci vnútorných síl (napätia, deformácie), t. j. energii napätosti. Pre hranolček na Obr. 5.15 možno prácu vnútornej sily  $F = \sigma \cdot dS$  vyjadriť takto:



Obr. 5.15 Práca normálového napätia na elemente objemu

$$dA_{\sigma} = \int_0^s F \cdot ds = \int_0^{\Delta dx} \sigma \cdot dS \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = \int_0^{\Delta dx} \sigma \cdot dy \cdot dz \cdot d(\varepsilon \cdot dx)$$

Pretože  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  sú konštanty, môžeme po dosadení za  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  energiu napätosti upraviť na tvar

$$dA_{\sigma} = dy \cdot dz \cdot E \int_0^{\varepsilon \cdot dx} \varepsilon \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = dy \cdot dz \cdot E \frac{1}{dx} \int_0^{\Delta dx} \varepsilon \cdot dx \cdot d(\varepsilon \cdot dx) = \frac{dy \cdot dz \cdot E}{dx} \frac{(\varepsilon \cdot dx)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dA_{\sigma} = \frac{1}{2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot E \cdot \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E \cdot dV$$

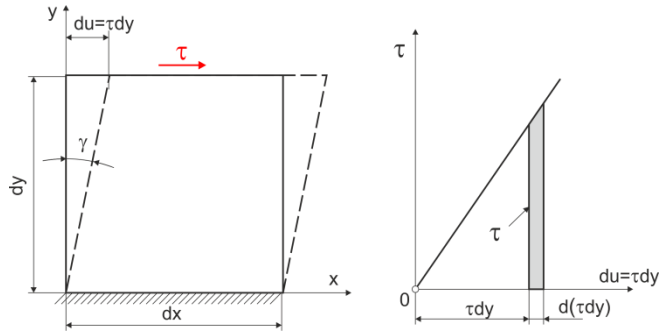
kde  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  je element objemu telesa. Energia napätosti pripadajúca na jednotku objemu bude potom

$$A_{\sigma} = \frac{dA_{\sigma}}{dV} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \Rightarrow \boxed{A_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon} \quad (5.17)$$



## Energia napätosti šmykových napätí

V medziach pružných deformácií, t. j. platnosti Hookovho zákona je aj závislosť medzi šmykovým napätím a skosením lineárna, ako to vidieť na Obr. 5.16 (pozri tiež kap.1).



Obr. 5.16. Práca šmykového napätia na elemente telesa

Postup odvodenia vzťahu pre energiu napätosti šmykových napätí pripadajúcu na jednotku objemu je rovnaký ako pri normálových napätíach a vedie k výsledku

$$A_\tau = \frac{dA_\tau}{dV} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \Rightarrow \boxed{A_\tau = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma} \quad (5.18)$$

## Energia napätosti pre priestorovú napätosť

Použitím odvodených vzťahov (5.17) a (5.18) sa energia napätosti elementu objemu na Obr. 5.17 rovná

$$A = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)$$

Obr. 5.17. Priestorová napätosť na elemente objemu

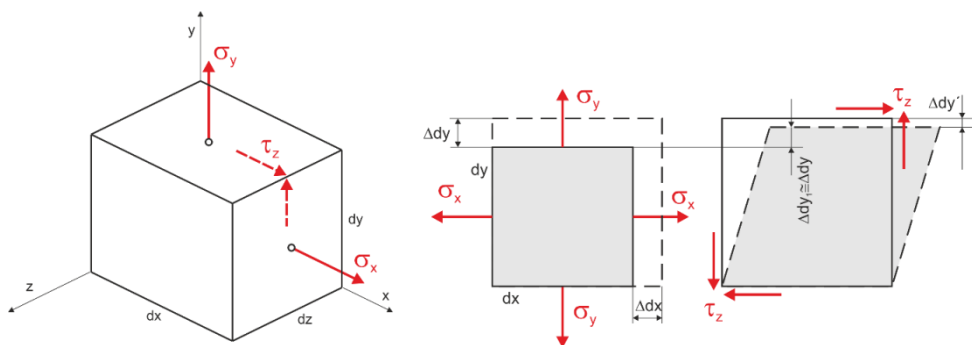
Po dosadení z rovníc elasticity (5.12) a (5.13) za príslušné hodnoty  $\varepsilon$  a  $\gamma$  a úprave dostaneme

$$A = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2] \quad (5.19)$$

Pre priestorovú napätosť danú hlavnými napätiami  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sa budú šmykové napätia rovnať nule a rovnica (5.19) bude mať tvar

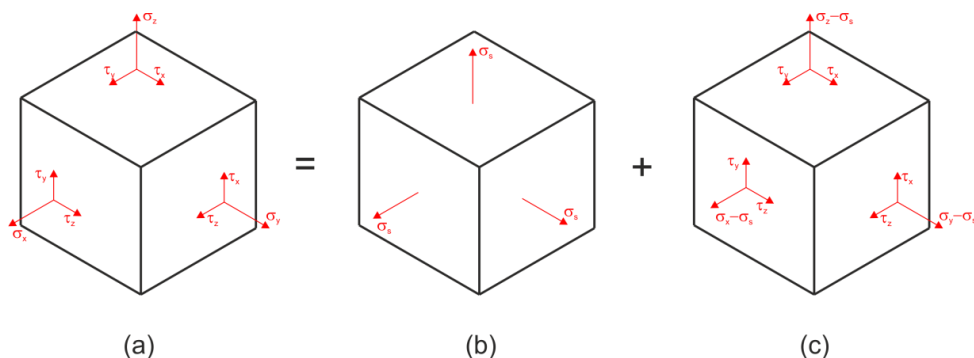
$$A = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] \quad (5.20)$$

Táto energia napätosti je vyvolaná vonkajším zaťažením, ktoré spôsobilo zmenu tvaru telesa aj zmenu jeho objemu, ako to vidieť na Obr. 5.18 pre element objemu zaťažený rovinnou napätosťou.



Obr. 5.18. Zmena objemu a zmena tvaru pri rovinnej napätosti

Pre priestorovú napätosť danú hlavnými napätiami  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  rozdelíme tieto na podiel spôsobujúci zmenu tvaru ( $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ ) a podiel spôsobujúci zmenu objemu ( $\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3$ ) - Obr. 5.19.



Obr. 5.19. Zmena objemu a zmena tvaru pri priestorovej napätosti

Ak na element objemu pôsobia len napätia  $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ , spôsobia len zmenu tvaru a zmena objemu sa musí rovnať nule, čo podľa rovnice (5.16) znamená, že

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0 \quad (5.21)$$

Ak na element objemu pôsobia len napätia  $\sigma_1'', \sigma_2'', \sigma_3''$ , spôsobia len zmenu objemu – t. j. jeho tvar sa nemení a všetky šmykové napätia sú rovné nule. V takom prípade sa Mohrova kružnica zredukuje na bod a musí platiť, že

$$\sigma_1'' = \sigma_2'' = \sigma_3'' = \sigma''$$

a súčet pôsobiacich napätí  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \cdot \sigma''$ .

Zložka celkového napätia spôsobujúca zmenu objemu je

$$\sigma'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (5.22)$$

Celková energia napätosti pripadajúca na jednotku objemu je

$$A = A' + A'',$$

kde  $A'$  je merná energia napätosti potrebná na zmenu tvaru

$A''$  je merná energia napätosti potrebná na zmenu objemu

Energiu napätosti potrebnú na zmenu objemu získame z rovnice (5.20), keď do nej dosadíme z rovnice (5.21) a (5.22) a po úprave

$$A'' = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (5.23)$$

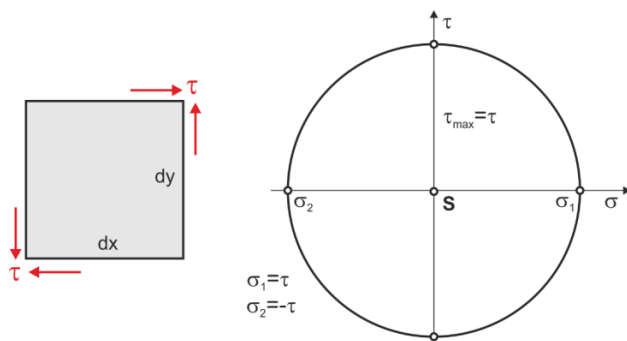
Energiu napätosti potrebnú na zmenu tvaru dostaneme odčítaním energie napätosti z rovnice (5.23) od celkovej energie napätosti a úprave v tvare

$$A' = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] \quad (5.24)$$

Táto časť celkovej energie napätosti sa označuje aj ako **energia napätosti šmykových napätí**.

## Súvislosť materiálových konštant $E$ , $G$ a $\nu$

Medzi doteraz použitými materiálovými konštantami – modul pružnosti v ťahu (tlaku)  $E$ , modulom pružnosti v šmyku  $G$  a Poissonovým číslo  $\nu$  existuje závislosť, ktorú môžeme ľahko odvodiť analýzou energie napätosti čistého šmyku. Elementárny hranolček zaťažený samotnými šmykovými napätiami je špeciálnym prípadom rovinnej napätosti (Obr. 5.20).



Obr. 5.20. Stav napätosti pri čistom šmyku

Energia napätosti šmykových napätí pripadajúca na jednotku objemu (rov. 5.18) je

$$A_\tau = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

Energiu napätosti pripadajúcu na jednotku objemu pre priestorovú napätosť (rov.5.20) môžeme pre prípad rovinnej napätosti prepísať do tvaru

$$A = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \cdot \sigma_1 \sigma_2] \quad (5.25)$$

Napätosť čistého šmyku je špeciálnym prípadom rovinnej napätosti s hlavnými napätiami  $\sigma_1 = \tau$  a  $\sigma_2 = -\tau$ , ako to vyplýva z Mohrovej kružnice na Obr. 5.20. Dosadením za hlavné napätia do rovnice (5.25) dostávame

$$A = \frac{1}{2E} (\tau^2 + \tau^2 + 2\nu \cdot \tau^2) = \frac{\tau^2}{E} (1 + \nu)$$

Porovnaním týchto dvoch vyjadrení energie napätosti rovnakého prípadu čistého šmyku dostávame

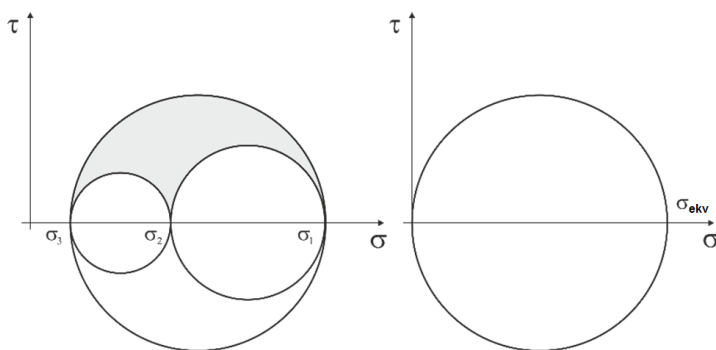
$$\frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} = \frac{\tau^2}{E} (1 + \nu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}} \quad (5.26)$$

## 5.5 Hypotézy pevnosti materiálu

Pevnostné charakteristiky materiálu – medza pevnosti, medza klzu – sa získavajú experimentálne ťahovými skúškami a sú súčasťou hutníckych atestov materiálov. Pomocou týchto medzných hodnôt napätí môžeme posúdiť riziko poruchy pri jednoosovej napätosti.

Pri viacosovej napätosti danej napätiami  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , prípadne aj  $\sigma_3$  môže byť začiatok nebezpečného stavu spôsobený vo všeobecnosti rôznymi veľkosťami hlavných napätí. Každéj kombinácii týchto napätí budú prislúchať vo všeobecnosti iné medzné hodnoty napätí, pri ktorých nastane nebezpečný (nedovolený) stav. Pri určovaní týchto nebezpečných (nedovolených) hodnôt by bolo potrebné namáhať vzorky materiálu pri rôznych pomeroch  $\sigma_1/\sigma_2$  a  $\sigma_1/\sigma_3$ , čo by bolo časovo náročné a neefektívne.

Pre kontrolu pevnosti materiálu alebo nebezpečného (nedovoleného) stavu namáhania slúžia určité predpoklady, založené na fyzikálnych ekvivalentoch viacosovej napätosti a jednoosovej napätosti. Tieto ekvivalentné napätové stavy založené na teoretických a experimentálnych výskumoch sa nazývajú **hypotézy pevnosti**. Predstavujú výpočtovo a experimentálne podloženú transformáciu viacosovej napätosti na jednoosovú napätosť, ktorú už vieme posúdiť pomocou známych parametrov materiálu získaných jednoosovým ťahom (Obr. 5.21).



Obr. 5.21. Transformácia trojosovej napätosti na jednoosovú napätosť

V prevádzke strojných konštrukcií a zariadení považujeme za nebezpečné (nedovolené) vo všeobecnosti dva stavy:

- dosiahnutie medze pevnosti materiálu (nasleduje lom, t. j. porucha),
- prekročenie medze elastických deformácií (t. j. začiatok trvalej zmeny rozmerov).

Dosiahnutie medze pevnosti materiálu konštrukcie sa ako nedovolený stav prakticky používa veľmi zriedkavo (napr. tlakové potrubia s oslabenou stenou). Najčastejšie posudzujeme konštrukciu voči prekročeniu medze elastických deformácií, za ktorú zjednodušene považujeme medzu klzu materiálu. Garantujeme tak konštrukciám stálosť rozmerov bez trvalých deformácií. Voči medzi klzu materiálu používame ešte koeficient, nazývaný miera bezpečnosti  $s$ . Miera bezpečnosti vyjadruje násobok zaťaženia konštrukcie, ktorý by spôsobil nedovolené hodnoty maximálneho napätia (trvalé deformácie materiálu). Pri pevnostnej kontrole konštrukcie sa posudzuje splnenie podmienky:

$$\sigma_{ekv} \leq \frac{\sigma_{kt}}{s},$$

kde  $\sigma_{ekv}$  je napätie ekvivalentnej jednoosovej napätosti (redukované napätie z viacosovej napätosti na jednoosovú napätosť)

a  $\frac{\sigma_{kt}}{s} = \sigma_{dov}$  je maximálne dovolená hodnota napätia v konštrukcii.

Ďalej matematicky vyjadríme vzťahy pre transformáciu viacosovej napätosti na jednoosovú napätosť (t. j. hypotézy pevnosti) pre prípad

- priestorovej napätosti danej napätiami  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,
- špeciálnej rovinnej napätosti danej napätiami  $\sigma$  a  $\tau$ .

## I. Hypotéza maximálneho normálového napätia

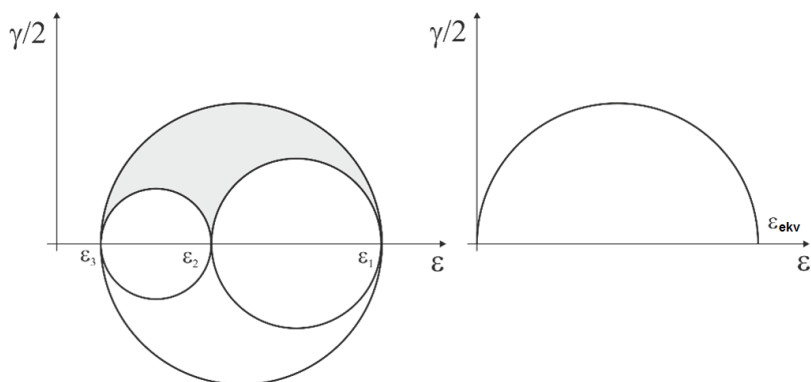
Podľa tejto hypotézy je pre posúdenie bezpečného namáhania pri priestorovej napätosti ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), rozhodujúcim napätím najväčšie hlavné napätie  $\sigma_1$  bez akéhokoľvek vplyvu napätí v ďalších smeroch (Obr. 5.21), t. j.

$$\sigma_{ekv}^I = \sigma_1 \quad (5.27)$$

Táto hypotéza dáva dobré výsledky len pre krehké materiály, keď dovolené napätie v tlaku je oveľa väčšie, ako dovolené napätia v ťahu. V skutočnosti materiály pri všestrannom tlaku vydržia oveľa vyšší všestranný tlak, než aký vyplýva z tejto hypotézy.

## II. Hypotéza maximálneho pomerného predĺženia

Podľa tejto hypotézy je pre posúdenie bezpečného namáhania pri priestorovej napätosti ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), rozhodujúcim také napätie  $\sigma_{ekv}$ , ktoré spôsobí pomerné predĺženie rovné maximálnemu pomernému predĺženiu  $\varepsilon_1$  (Obr. 5.22).



Obr. 5.22. Transformácia stavu trojosovej deformácie na jednoosovú deformáciu

Maximálne pomerné predĺženie od priestorovej napätosti je

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

a rovnaké predĺženie spôsobené  $\sigma_{ekv}$  je

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{ekv}}{E}$$

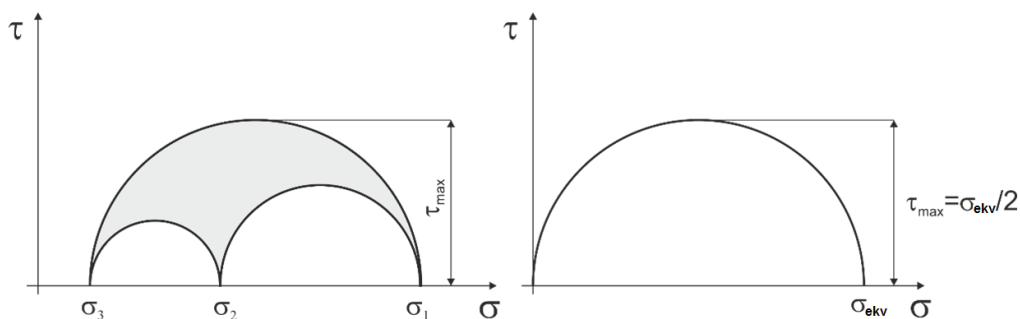
Porovnaním týchto dvoch rovníc dostávame

$$\sigma_{ekv}^H = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (5.28)$$

Táto hypotéza rovnako dáva dobré výsledky len pre krehké materiály.

## III. Hypotéza maximálneho šmykového napätia (Tresca)

Podľa tejto hypotézy je pre posúdenie bezpečného namáhania pri priestorovej napätosti ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), rozhodujúcim také napätie  $\sigma_{ekv}$ , ktoré spôsobí rovnako veľké maximálne šmykové napätie (Obr. 5.23).



Obr. 5.23. Transformácia trojosovej napätosti na napätosť čistého šmyku

Maximálne šmykové napätie pri priestorovej napätosti sa podľa Obr. 5.22 rovná

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

a rovnaké šmykové napätie spôsobené  $\sigma_{ekv}$  je

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{ekv}}{2}$$

Porovnaním týchto dvoch rovníc dostávame

$$\sigma_{ekv}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.29)$$

Táto hypotéza známa aj ako „intenzita napätí“ má dobrú koreláciu so skutočnosťou najmä pri húževnatých materiáloch. Neplatí pre krehké materiály.

#### IV. Hypotéza celkovej energie napätosti

Podľa tejto hypotézy je pre posúdenie bezpečného namáhania pri priestorovej napätosti ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ), rozhodujúcim také napätie  $\sigma_{ekv}$ , pri ktorom dosiahne celková energia napätosti rovnakú hodnotu ako v prípade priestorovej napätosti.

Celková energia napätosti pri priestorovej napätosti sa podľa rovnice (5.20) rovná

$$A_1 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Pri pôsobení napätia  $\sigma_{ekv}$  len v smere jednej osi musí mať energia napätosti využitím tejto rovnice hodnotu



$$A_1 = \frac{\sigma_{ekv}^2}{2E}$$

Porovnaním týchto dvoch rovníc dostávame vzťah pre ekvivalentné redukované napätie v tvare

$$\sigma_{ekv}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad (5.30)$$

Táto hypotéza je v dobrej zhode so skutočnosťou v prípade húževnatých materiálov v stave napätosti, ktorý spôsobuje zväčšenie objemu.

### V. Hypotéza energie napätosti na zmenu tvaru (Huber-Misses-Hencky)

Podľa tejto hypotézy je pre posúdenie bezpečného namáhania pri priestorovej napätosti ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), rozhodujúcim také napätie  $\sigma_{ekv}$ , pri ktorom dosiahne energia napätosti pre zmenu tvaru rovnakú hodnotu ako v prípade priestorovej napätosti.

Energia napätosti pre zmenu tvaru pri pôsobení priestorovej napätosti má podľa rovnice (5.21) hodnotu

$$A_1' = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Pri pôsobení napätia  $\sigma_{ekv}$  len v smere jednej osi musí mať energia napätosti využitím tejto rovnice hodnotu

$$A_1' = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{red}^2$$

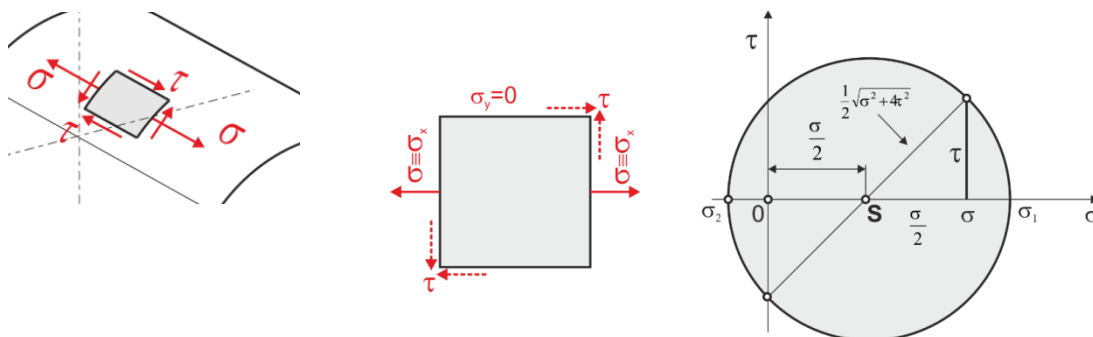
Porovnaním týchto dvoch rovníc dostávame pre hodnotu redukovaného (ekvivalentného) napätia vzťah

$$\sigma_{ekv}^V = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad (5.31)$$

Táto hypotéza, označovaná niekedy ako H-M-H (iniciály autorov) alebo von Mises, je v dobrej zhode so skutočnosťou pre húževnaté materiály s výnimkou všestranného ťahu.

## Hypotézy pevnosti pre špeciálne prípady napätosti

### Rovinná napätosť daná napätiami $\sigma$ a $\tau$ (Obr. 5.24)



Obr. 5.24. Rovinná napätosť daná napätiami  $\sigma$ ,  $\tau$  zobrazená pomocou Mohrovej kružnice.

V strojárskkej praxi sa takýto prípad napätosti vyskytuje pomerne často pri namáhaní ohybom (ťahom, prípadne súčasne ohybom a ťahom) v kombinácii s krútením. V smere  $x$  pôsobí len normálové napätie  $\sigma_x = \sigma$ , napätie v kolmom smere  $\sigma_y = 0$  a šmykové napätie  $\tau_z = \tau$ .

Hlavné napätia určíme pomocou Mohrovej kružnice z rovnice (5.5) v tvare

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

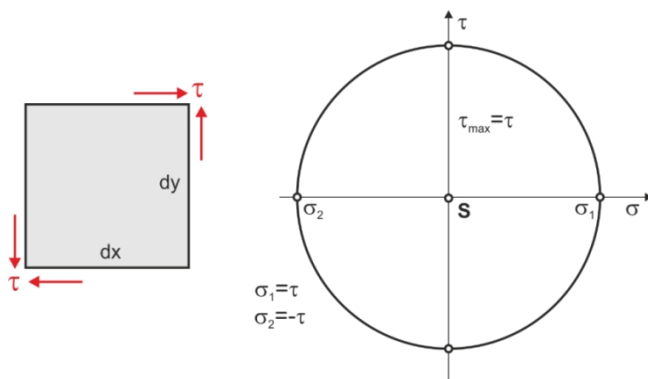
$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (5.32)$$

Pre posúdenie bezpečného namáhania tejto napätosti určíme ekvivalentné (redukované) napätia podľa jednotlivých hypotéz tak, že do rovníc (5.27 až 5.31) dosadíme hodnoty hlavných napätí z rovnice (5.31) a pri hypotéze celkovej energie napätosti aj hodnotu Poissonovho čísla  $\nu = 0,3$ . Výsledné ekvivalentné (redukované) napätia sú v Tab.5.1.

Tabuľka 5.1. Ekvivalentné (redukované) napätia podľa jednotlivých hypotéz pevnosti pre špeciálnu rovinnú napätosť danú napätiami  $\sigma$ ,  $\tau$  (Obr. 5.24)

Hypotéza maximálneho normálového napätia	$\sigma_{ekv}^I = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Hypotéza maximálneho pomerného predĺženia	$\sigma_{ekv}^{II} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Hypotéza maximálneho šmykového napätia	$\sigma_{ekv}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Hypotéza celkovej energie napätosti	$\sigma_{ekv}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2}$
Hypotéza energie napätosti na zmenu tvaru	$\sigma_{ekv}^V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

Napätosť čistého šmyku (Obr. 5.26)



Obr. 5.26. Mohrova kružnica napätí pri čistom šmyku

Z rovnice (5.31) vyplýva, že hlavné napätia pri čistom šmyku ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ) sú rovné

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$

Po dosadení do rovníc (5.27) až (5.31) dostávame hodnoty ekvivalentných napätí pre čistý šmyk, resp. hodnoty dovolených šmykových napätí – Tab.5.2.

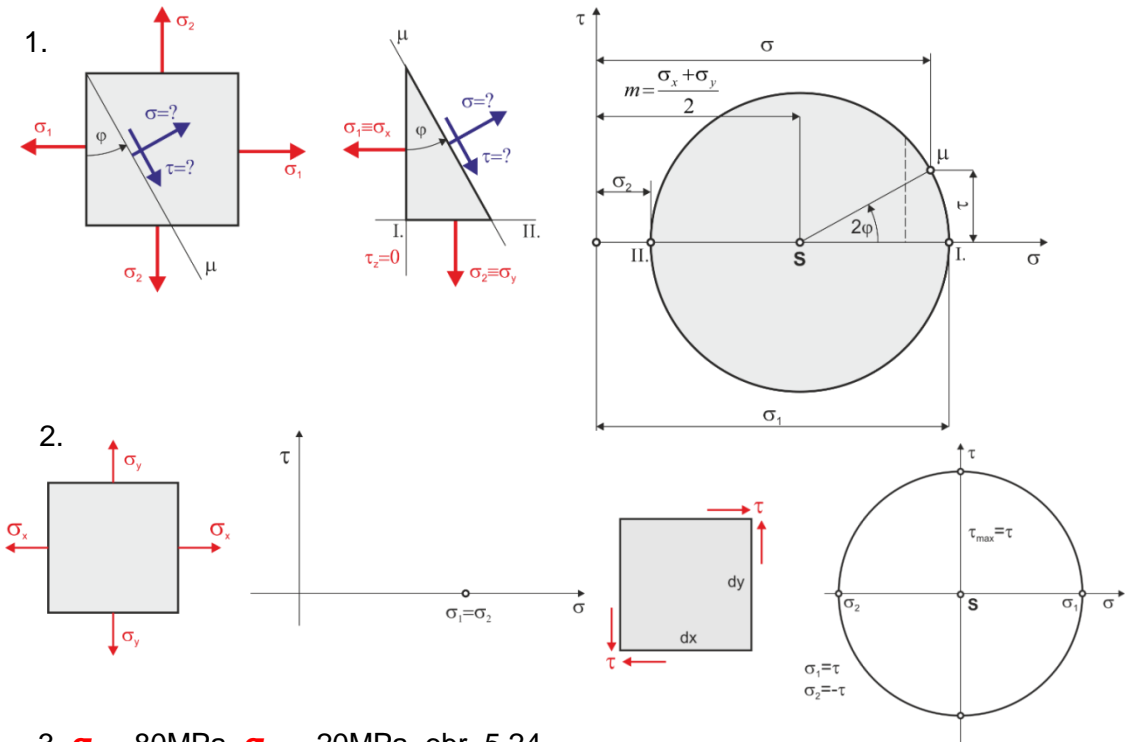
Tabuľka 5.2. Dovoľené ekvivalentné napätia podľa jednotlivých hypotéz pevnosti pre napätosť čistého šmyku  $\tau_{dov}$

Hypotéza maximálneho normálového napätia	$\sigma_{dov} = \tau_{dov}$	$\tau_{dov} = \sigma_{dov}$
Hypotéza maximálneho pomerného predĺženia	$\sigma_{dov} = 1,3\tau_{dov}$	$\tau_{dov} = 0,77\sigma_{dov}$
Hypotéza maximálneho šmykového napätia	$\sigma_{dov} = 2\tau_{dov}$	$\tau_{dov} = 0,5\sigma_{dov}$
Hypotéza celkovej energie napätosti	$\sigma_{dov} = 1,61\tau_{dov}$	$\tau_{dov} = 0,62.\sigma_{dov}$
Hypotéza energie napätosti na zmenu tvaru	$\sigma_{dov} = \sqrt{3}\tau_{dov}$	$\tau_{dov} = \frac{\sigma_{dov}}{\sqrt{3}}$

## Autotest

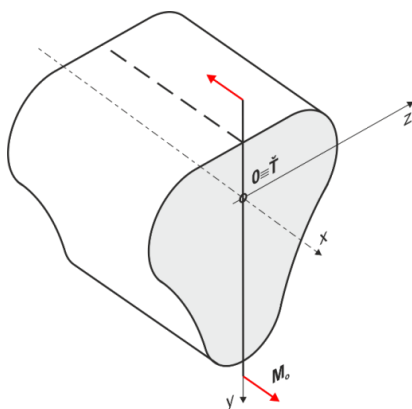
1. Nakreslite Mohrovu kružnicu rovinnej napätosti danej hlavnými napätiami  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  a vyznačte napätia  $\sigma$  a  $\tau$  v rovine  $\mu$ , ktorá je pootočená o uhol  $\varphi$  oproti rovine prvého hlavného napätia.
2. Nakreslite Mohrovu kružnicu čistého šmyku a všestranného ťahu, resp. tlaku.
3. Určte hodnoty hlavných napätí ( $\sigma_x = 60 \text{ MPa}$ ,  $\tau_z = 40 \text{ MPa}$ ) a nakreslite príslušnú Mohrovu kružnicu.
4. Vypočítajte ekvivalentné (redukované) napätia pre napätosť v úlohe 3.

### Výsledky



## 6 OHYB PRIAMYCH NOSNÍKOV

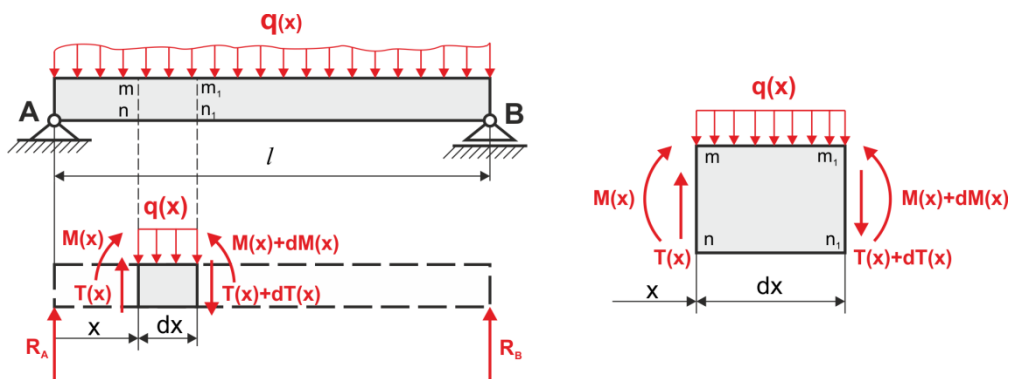
Ohyb je spôsob namáhania, pri ktorom výslednica zaťaženia tvorí dvojicu síl ležiacu v rovine pozdĺžnej osi telesa – rovina  $xy$  na Obr. 6.1.



Obr. 6.1. Namáhanie ohybovým momentom

Ohybové namáhanie sa v praxi vyskytuje asi najčastejšie, napr. pri mostoch, rámoch, hriadeľoch, pri nápravách vozidiel, stavebných konštrukciách a pod. Veľmi častým prvkom konštrukcií namáhaných ohybom sú nosníky. Nosníkom nazývame konštrukčný prvok, ktorého priečne rozmery (šírka, výška) sú aspoň 5-krát menšie, ako ich dĺžka.

Čistý ohyb je v praxi zriedkavý prípad namáhania, najčastejšie sú nosníky zaťažené sústredenými alebo spojitými rozloženými silami, pôsobiacimi v priečnom smere k jeho pozdĺžnej osi. Takéto zaťaženie vyvolá v priečnom reze dve vnútorné veličiny – ohybový moment a priečnu (tangenciálnu) silu. Ich kladná orientácia je vecou konvencie znamienok, ktorá je znázornená na Obr. 6.2. Z pôsobiacich vnútorných síl na element nosníka je zrejmé, že kladný ohybový moment pôsobí v horných vláknoch tlak a v dolných ťah. Kladná priečna sila pôsobí v smere kladnej osovej sily po jej otočení o  $90^\circ$  v smere hodín. Dôležitú súvislosť medzi týmito dvoma vnútornými veličinami získame z podmienok rovnováhy elementu nosníka, ktorý vyznačíme dvoma blízkymi priečnymi rezmi. Ak v ľavom reze pôsobia vnútorné veličiny  $M(x)$  a  $T(x)$ , potom v dôsledku zaťaženia elementu spojitým rozloženým zaťažením  $q(x)$  musia v pravom reze pôsobiť zmenené hodnoty vnútorných veličín:  $T(x)+dT(x)$  a  $M(x)+dM(x)$ .



Obr. 6.2. Vnútorne sily v priechnom reze ohýbaného nosníka

Rovnováha síl do zvislého smeru a momentová podmienka k pravej rovine rezu majú tvar:

$$\sum F_y = 0: T_{(x)} - q_{(x)}dx - (T_{(x)} + dT_{(x)}) = 0$$

$$\sum M = 0: T_{(x)}dx + M_{(x)} - q_{(x)}dx \frac{dx}{2} - (M_{(x)} + dM_{(x)}) = 0$$

Z prvej rovnice vyjadríme vzťah medzi priechnou silou  $T_{(x)}$  a spojitém bremenom  $q(x)$ :

$$-q_{(x)} = \frac{dT_{(x)}}{dx} \quad (6.1)$$

Z druhej podmienky rovnováhy po zanedbaní diferenciálne malých členov vyššieho rádu dostávame vzťah

$$T_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx}$$

Ak by sme mysleli rez pre vyznačenie elementu nosníka volili z jeho pravej strany, vzťah medzi priechnou silou a ohybovým momentom by vyšiel v tvare

$$T_{(x')} = -\frac{dM_{(x')}}{dx'}$$

Vzťah medzi ohybovým momentom a priechnou silou môžeme zovšeobecniť rovnicou

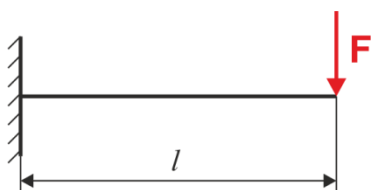
$$\boxed{T_{(x)} = \pm \frac{dM_{(x)}}{dx}} \quad (6.2)$$

ktorú nazývame Žuravského veta. Priečna sila vo vyšetřovanom myslenom reze je teda deriváciou ohybového momentu podľa súradnice  $x$ , pričom znamienko závisí od smeru rezu (kladné je pri smere rezu zľava doprava).

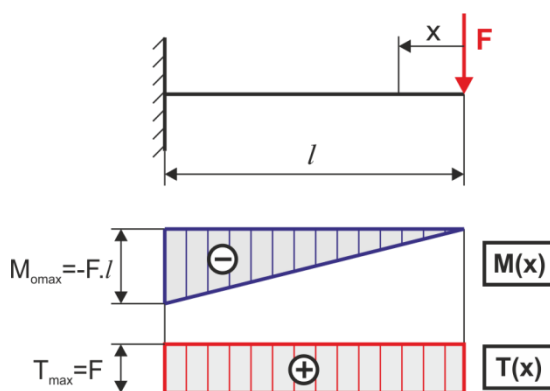
Dosadením rovnice (6.2) do rovnice (6.1) dostaneme vzťah medzi ohybovým momentom a spojitým bremenom v tvare

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = -q_{(x)} \quad (6.3)$$

**Príklad 1:** Vypočítajte a nakreslite priebeh ohybových momentov a priečných síl na nosníku podľa obrázku nižšie. Nájdite najviac namáhaný prierez.



Nosník k príkladu 1



Na určenie priebehu vnútorných veličín (ohybových momentov a priečných síl) stačí urobiť jeden myslený rez z pravej strany. Podľa definície vnútorných veličín v druhej kapitole (str. 20) je:

$$M_{(x)} = -F \cdot x \quad M_{(0)} = 0$$

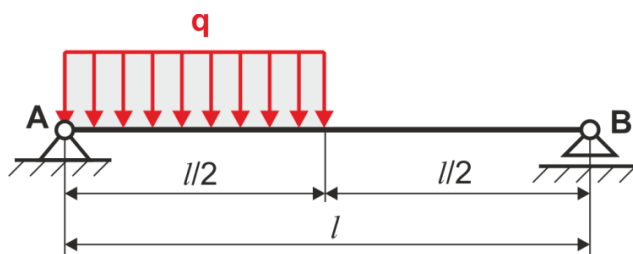
$$M_{(l)} = -F \cdot l$$

$$T_{(x)} = F \quad \left( = -\frac{dM(x)}{dx} \right)$$

Najviac namáhaným prierezom je podľa očakávania miesto votknutia.

**Príklad 2:** Vypočítajte a nakreslite priebeh ohybových momentov a priečných síl na nosníku podľa obrázku nižšie. Nájdite najviac namáhaný prierez.





Nosník k príkladu 2

Pre určenie priebehu ohybových momentov a priečných síl je potrebné najprv nosník uvoľniť a vypočítať veľkosti väzbových reakcií:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0$$

$$\sum M_A = 0: R_B l - \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{ql}{8}$$

$$\sum M_B = 0: R_A l - \frac{ql}{2} \frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3ql}{8}$$

Priebehy vnútorných veličín je potrebné vyšetriť pomocou 2 myslenných rezov:

$x_1 \in (0, l/2)$ :

$$M_{(x_1)} = R_A x_1 \quad M_{(0)} = 0$$

$$M_{(l/2)} = \frac{ql^2}{16}$$

$$T_{(x_1)} = -R_A = -\frac{ql}{8}$$

$x_2 \in (0, l/2)$ :

$$M_{(x_2)} = R_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2}$$

$$M_{(0)} = 0$$

$$M_{(l/2)} = \frac{ql^2}{16}$$

$$T_{(x_2)} = R_B - qx_2$$

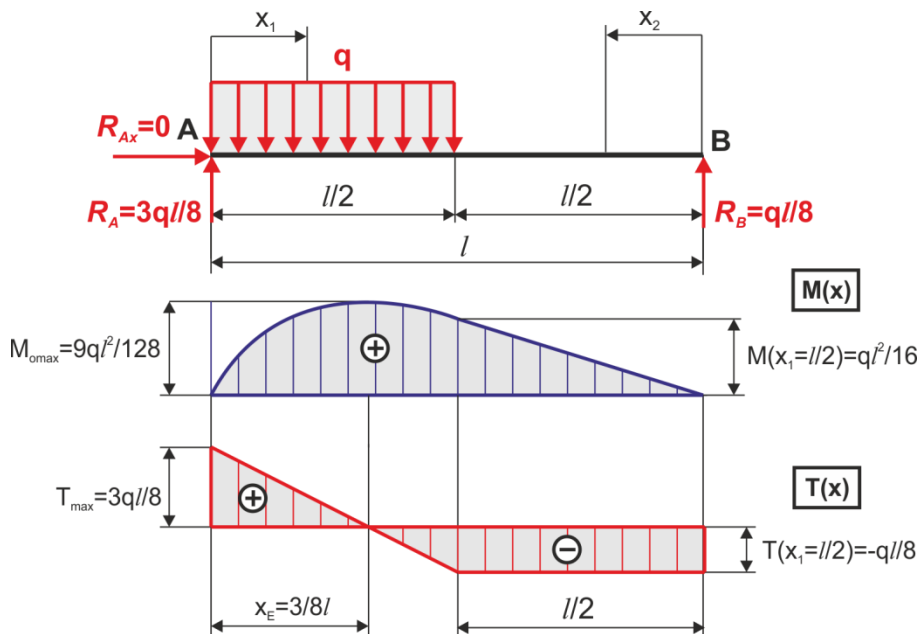
$$T_{(0)} = R_B = \frac{3}{8}ql$$

$$T_{(l/2)} = -\frac{ql}{8}$$

Pretože priebeh ohybových momentov v reze  $x_2$  je parabolický, treba nájsť miesto a hodnotu extrému tejto funkcie:

$$M'_{(x_2)} = 0 \Rightarrow R_B - qx_2 = 0 \Rightarrow x_{2max} = \frac{R_B}{q} = \frac{3}{8}l$$

$$M_{(x_2 = \frac{3}{8}l)} = \frac{3}{8}ql \frac{3}{8}l - q \left( \frac{3}{8}l \right)^2 = \frac{9}{128}ql^2$$

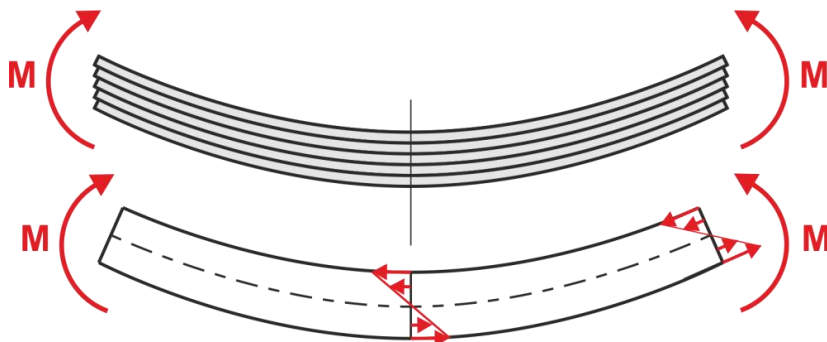


### Riešenie nosníka k príkladu 2

Z grafických priebehov namáhania vidieť, že je nosník namáhaný ohybovým momentom práve v mieste  $x_2 = \frac{3}{8}l$ , priečnou silou v ľavej podpere. Kombinácia týchto dvoch veličín je nepriaznivá v mieste  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}l$ .

## 6.1 Normálové napätia v ohýbanom nosníku

Ak si predstavíme nosník rozrezaný na pozdĺžne tenké pásy, potom jeho tvar pri pôsobení vonkajšieho ohybového namáhania je na Obr. 6.3.



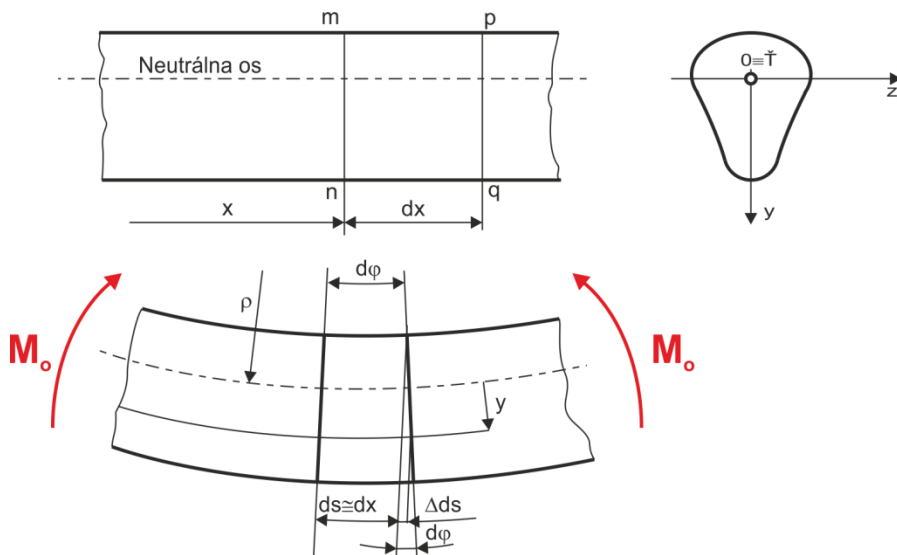
Obr. 6.3. Vznik napätí v ohýbanom nosníku

Nosník je v skutočnosti po výške jednoliate teleso a preto sa pomyslené pozdĺžne pásy musia predlžovať resp. skracovať. Medzi nimi bude musieť existovať vrstva, ktorá nebude ani predlžovaná ani skracovaná – tzv. neutrálna rovina. Ohybový moment teda vytvára v priereze normálové napätia, ktoré nebudú rozložené konštantne. Tieto napätia v pričnom reze v podstate nahrádzujú účinok odstránenej časti a preto musia byť v rovnováhe s vonkajšou sústavou síl – z toho je zrejmé, že na túto rovnováhu nemôžu mať vplyv priečne sily pretože pôsobia v kolmom smere. Normálové napätia preto závisia len od ohybového momentu a ich rozloženie v priereze môžeme odvodiť pre prípad čistého ohybu (nosník zaťažený len ohybovým momentom) pri nasledujúcich predpokladoch:

- priečne rezy ostávajú aj po zaťažení ohybovým momentom rovinné (tento predpoklad je v súlade so skutočnosťou pri nosníkoch, ktorých dĺžka je viac ako päťnásobok výšky),
- pozdĺžne vlákna na seba netlačia, pôsobením ohybového momentu sa len lineárne predlžia alebo skrátia,
- deformácia vlákien nezávisí od ich polohy v šírke prierezu, preto aj normálové napätia, ktoré sa po výške prierezu menia sú po šírke prierezu konštantné,
- materiál nosníka sa riadi Hookovým zákonom, pričom modul pružnosti je v ťahu aj v tlaku rovnaký.

V prípade rovinného ohybu je rovina pôsobenia ohybového momentu súčasne rovinou súmernosti prierezu nosníka, alebo je na ňu kolmá. Pôsobením

ohybového momentu sa nosník prehne, v dôsledku čoho sa pôvodne priamková pozdĺžna os zakriví a vlákna nad ňou sa budú stláčať, resp. vlákna pod ňou naťahovať. Vlákna, ktoré nezmenia svoju dĺžku, spoločne tvoria už spomínanú neutrálnu rovinu. Na Obr. 6.4 je znázornený úsek nosníka pri pôsobení kladného ohybového momentu, pomocou ktorého odvodíme rozloženie ohybového momentu po výške prierezu vo forme priebehu normálových napätí.



Obr. 6.4. Deformácia nosníka

Predĺženie elementu vlákna  $ds$  vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi môžeme vyjadriť ako

$$\Delta ds = y \cdot d\varphi$$

Pôvodná dĺžka vlákna  $ds$ , resp. dĺžka vlákna na neutrálnej osi je

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Pomerné predĺženie vlákna v mieste  $y$  prierezu namáhaného ohybovým momentom je potom z definície

$$\varepsilon_{(y)} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Pretože vlákno je pri čistom ohybe namáhané ťahom prípadne tlakom, môžeme jeho pomerné predĺženie vyjadriť tiež pomocou Hookovho zákona ako

$$\varepsilon_{(y)} = \frac{\sigma_{(y)}}{E}$$

Deformačnú podmienku pre jednotlivé vlákno môžeme teda zapísať ako rovnosť týchto dvoch deformácií v tvare

$$\frac{\sigma_{(y)}}{E} = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{(y)} = \frac{y}{\rho} E \quad (6.4)$$

Pretože veličina **E** je konštanta a polomer krivosti vlákien  $\rho$  je pre daný rez tiež konštantný, potom z rovnice (6.4) je zjavné, že rozloženie napätia po výške prierezu bude lineárne (Obr. 6.5a). Maximálne normálové napätie v priereze bude potom vo vlákne, ktoré má najväčšiu vzdialenosť od neutrálnej osi, t. j.

$$\sigma_{max} = \frac{y_{max}}{\rho} E \quad (6.5)$$

Porovnaním vzťahov (6.4) a (6.5) dostávame

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{y}{y_{max}} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\sigma_{max}}{y_{max}} y \quad (6.6)$$

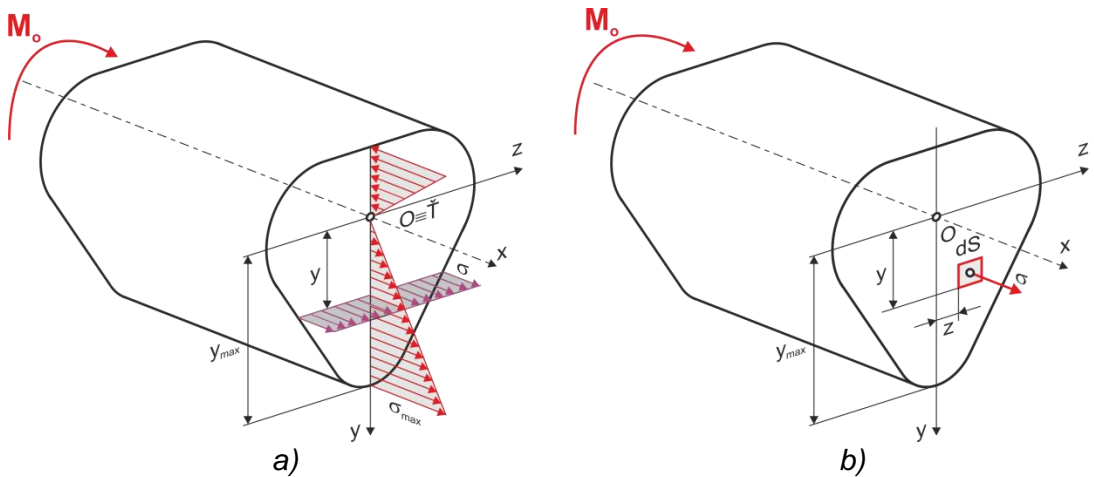
Keď poznáme rozloženie napätia v priereze, jeho veľkosť určíme z podmienok rovnováhy napr. ľavej časti rozrezaného nosníka, v ktorej na ľubovoľne zvolenom elemente prierezovej plochy  $dS$  pôsobí výsledné normálové napätie  $\sigma$  vyvolané vonkajším ohybovým momentom  $M_o$  (Obr. 6.5b):

$$\sum F_x = 0: \quad \int_{(S)} \sigma \cdot dS = 0$$

$$\sum M_z = 0: \quad \int_{(S)} \sigma \cdot dS \cdot y - M_o = 0$$

$$\sum M_y = 0: \quad \int_{(S)} \sigma \cdot dS \cdot z = 0$$

Ostatné podmienky rovnováhy (zo šiestich podmienok rovnováhy v priestore), t.j.  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  a  $\sum M_x = 0$ , sú vopred splnené.



Obr. 6.5. Rez nosníka namáhaného ohybovým momentom

Dosadením za neznámu hodnotu  $\sigma$  z rovnice (6.6) dostaneme

$$\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} \int_{(S)} y \cdot dS = 0$$

$$\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} \int_{(S)} y^2 \cdot dS = M_o \quad (6.7)$$

$$\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} \int_{(S)} y \cdot z \cdot dS = 0$$

Podiel  $\frac{\sigma_{max}}{y_{max}}$  musí byť pri nenulovom vonkajšom zaťažení rôzny od nuly, preto

z prvej a tretej rovnice musí byť

$$\int_{(S)} y \cdot dS = 0 \quad \text{a} \quad \int_{(S)} y \cdot z \cdot dS = 0$$

Prvý integrál predstavuje statický moment plochy prierezu k osi z a nulovú hodnotu nadobúda vtedy, keď os z prechádza ťažiskom prierezu – to znamená, že os z ako neutrálna os prechádza vždy ťažiskom prierezovej plochy. Druhý integrál predstavuje deviačný moment  $D_{zy}$  a ten sa rovná nule v prípade, ak sú z a y hlavné centrálné osi zotrvačnosti.

Výraz  $\int_{(S)} y^2 dS$  v rovnici (6.7) je kvadratický moment plochy k osi z a túto rovnicu

tak môžeme napísať v tvare

$$\frac{\sigma_{max}}{y_{max}} J_z = M_o \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{max} = \frac{M_o}{J_z} y_{max} = \frac{M_o}{W_o}} \quad (6.8)$$

V tomto vzťahu pre maximálne normálové napätie v priereze s kvadratickým momentom  $J_z$  namáhanom ohybovým momentom  $M_o$  predstavuje veličina

$$W_o = \frac{J_z}{y_{max}} \quad \text{tzv. prierezový modul v ohybe.}$$

Dosadením za  $\sigma_{max}$  z rovnice (6.8) do rovnice (6.6) dostávame vzťah pre veľkosť normálového napätia v ľubovoľnom vlákne prierezu, ktoré je vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi v tvare

$$\boxed{\sigma_y = \frac{M_o}{J_z} y} \quad (6.9)$$

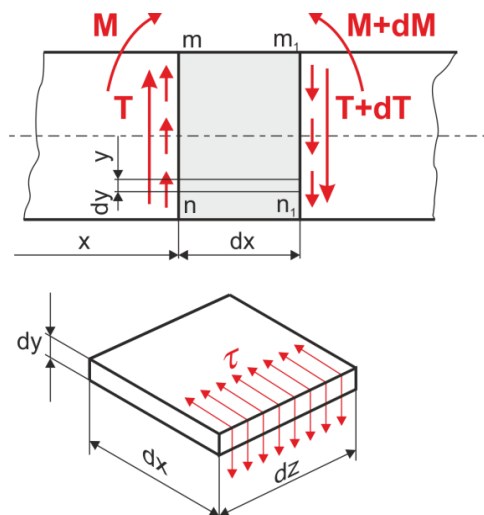
Môžeme teda zhrnúť výsledky, ku ktorým sme dospeli pri vyjadrení napätia v priereze ohýbaného nosníka:

- priebeh normálových napätí po výške prierezu je lineárny,
- nulová hodnota napätia prislúcha tzv. neutrálnej osi, ktorá prechádza ťažiskom prierezu,
- maximálna hodnota napätia je v krajnom vlákne prierezu, ktoré je najviac vzdialené od neutrálnej osi,
- prierez, v ktorom sa maximálne normálové napätie nachádza, je daný miestom maximálneho ohybového momentu na nosníku (v prípade nosníka konštantného prierezu).

## 6.2 Šmykové napätia v ohýbanom nosníku

Ak sa vrátíme ešte raz k predstave nosníka pozdĺžne rozrezaného na pásy (Obr. 6.3), pri ohybe sa tieto pásy rozdielne zakrivujú (majú nerovnaký polomer krivosti) – preto sa v celistvom nosníku jednotlivé vrstvy (vlákna) prierezu predlžujú resp. skracujú. Pretože nosník je jednoliate teleso, bude každá pomyselná vrstva

prenášať aj šmykové napätia, ktoré vzniknú medzi jednotlivými vrstvami. Každá vrstva sa na dosiahnutie celistvosti nosníka predlžuje resp. skraca o inú dĺžku, preto vznikajú medzi nimi šmykové napätia s výnimkou voľných povrchov. Smer šmykových napätí a združených šmykových napätí je na Obr. 6.6.



Obr. 6.6. Šmykové napätia v ohýbanom nosníku

Veľkosť a smer šmykových napätí určíme na elemente nosníka vyznačeného dvoma blízkymi rovnobežnými rezmi. Šmykové napätie vo vlákne  $y$  od neutrálnej osi získame z podmienky rovnováhy pre plochu  $S_1$ , v ktorej je vyznačený element výšky nosníka o hrúbke  $dy_1$  (Obr. 6.7) :

$$\sum F_x = 0: \int_{S_1} (\sigma_{y_1} + d\sigma_{y_1}) dS - \int_{S_1} \sigma_{y_1} dS - \tau \cdot b \cdot dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} d\sigma_{y_1} dS - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

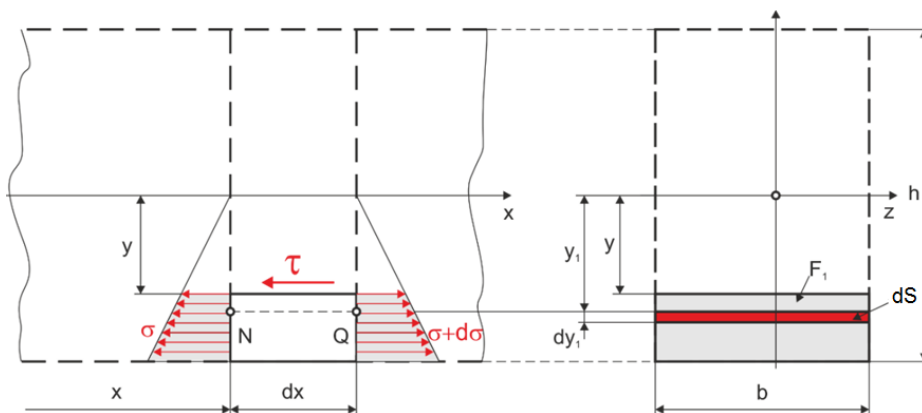
Normálové napätie vo vlákne  $y$  má veľkosť podľa rovnice (6.9)

$$\sigma_y = \frac{M_o}{J_z} y$$

Prírastok normálového napätia v blízkom rovnobežnom reze bude

$$d\sigma_{y_1} = \frac{dM_o}{J_z} y_1$$





Obr. 6.7. Šmykové napätia po výške ohýbaného nosníka

Po dosadení do rovnice rovnováhy dostávame

$$\int_{S_1} \frac{dM}{J_z} y_1 dS = \tau \cdot b \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{b J_z} \int_{S_1} y_1 dS$$

Pretože výraz  $\frac{dM_{o(x)}}{dx} = T_{(x)}$  a  $\int_{S_1} y_1 dS = U_{z(y)}$  (predstavuje statický

moment plochy  $S_1$  k osi  $z$ ), môžeme šmykové napätie po výške prierezu  $y$  vyjadriť v tvare

$$\tau_{z(y)} = \frac{T_{(x)} U_{z(y)}}{b_{(y)} J_z} \quad (6.10)$$

Tvar priebehu šmykových napätí po výške prierezu závisí od tvaru prierezu – od priebehu šírky  $b(y)$ , ktorá sa po výške prierezu môže meniť a statického momentu plochy nad vláknom, v ktorom hľadáme napätie  $U_z(y)$ . Maximálna hodnota šmykového napätia je vo všeobecnosti na neutrálnej osi.

## Šmykové napätia v obdĺžnikovom priereze

Pre obdĺžnikový prierez poznáme kvadratický moment prierezu k osi z (kap. 3)

$$J_z = \frac{1}{12}bh^3.$$

Statický moment  $U_z(y)$ , t. j. plochy vyznačenej vláknom  $y$ , v ktorom počítame napätie a horným obrysom prierezu, sa rovná

$$U_{z(y)} = \int_y^{h/2} y_1 \cdot b \cdot dy_1 = b \left[ \frac{y_1^2}{2} \right]_y^{h/2} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Po dosadení do rovnice 6.10 pre šmykové napätie v obdĺžnikovom priereze dostávame vzťah

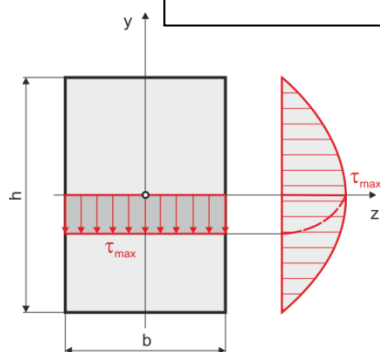
$$\tau_{z(y)} = \frac{T_{(x)}}{b \frac{1}{12} b \cdot h^3} \frac{h}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6T_{(x)}}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{3}{2} T_{(x)} \frac{h^2 - 4y^2}{bh^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{z(y)} = \frac{3}{2} \frac{T_{(x)}}{b \cdot h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h/2} \right)^2 \right]$$

Z tejto rovnice je zrejmé, že priebeh šmykového napätia po výške obdĺžnikového prierezu je parabola – priebeh je znázornený na Obr. 6.8.

Rovnica je upravená do tvaru, z ktorého je vidieť, že najväčšie šmykové napätie je v mieste neutrálnej osi, t. j. pre  $y = 0$  a rovná sa

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(x)}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(x)}{S} \quad (6.11)$$



Obr. 6.8. Priebeh šmykových napätí po výške obdĺžnikového

## Šmykové napätia v kruhovom priereze

Šmykové napätia v obdĺžnikovom priereze majú smer zhodný so smerom priečnej sily a smer združených šmykových napätí je tiež jednoznačne daný (Obr. 6.6). Pri neobdĺžnikovom priereze symetrickom okolo osi  $y$  nemôže byť smer šmykových napätí rovnaký po celej výške prierezu. Náhodne vybraný element na povrchu (Obr. 6.9) ukazuje, že šmykové napätie nemôže mať vertikálny smer (vznikala by radiálna zložka šmykového napätia v prípade zakrivenia obrysu prierezu, takéto napätie však nemá vonkajšiu príčinu svojej existencie), ale smer dotýčnice k obrysu prierezu (radiálna zložka napätia sa vtedy rovná nule). Medzi bodmi obrysu sa podľa predpokladu Grashofa nositeľky šmykových napätí natáčajú a smerujú do bodu P, ktorý je daný priesečníkom dotýčníc v bodoch šírky obrysu. Šmykové napätia od priečnej sily v neobdĺžnikovom priereze preto rozložíme na zložky  $\tau_z$  a  $\tau_y$ . Čo sa týka veľkosti sú šmykové napätia  $\tau_z$  po šírke prierezu konštantné a ich priebeh po výške prierezu je daný rovnicou

$$\tau_{z(y)} = \frac{T_{(x)}U_{z(y)}}{b_{(y)}J_z}$$

Druhú zložku šmykového napätia  $\tau_y$  vypočítame z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{z}{f} = \frac{\tau_y}{\tau_z}$$

Pretože platí:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_y}{2 \cdot f}$  bude  $f = \frac{b_y}{2 \operatorname{tg} \varphi}$  a po dosadení

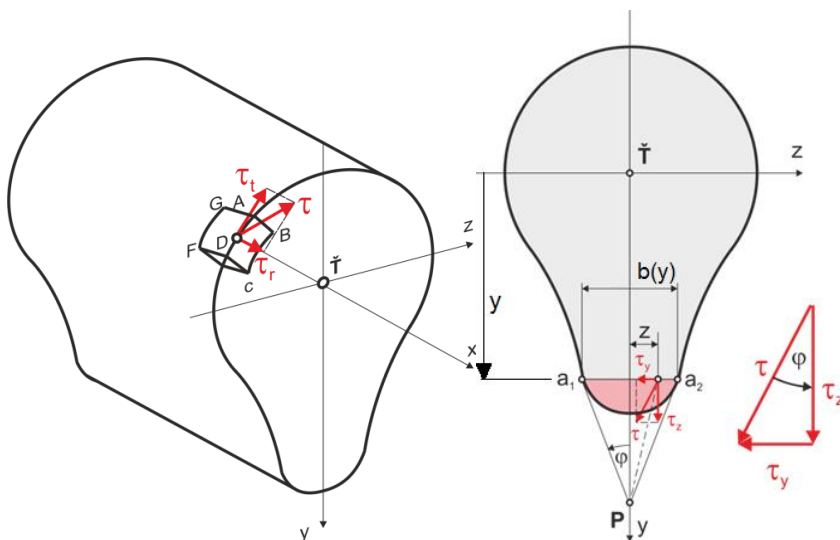
$$A_{1\tau} = \frac{1}{2} \tau \cdot y$$

Výsledné napätie  $\tau$  potom bude

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2} = \tau_z \sqrt{1 + \frac{4z^2}{b_y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Z tejto rovnice je vidieť, že maximálnu hodnotu nadobúda šmykové napätie po šírke prierezu na jeho obvode, kde  $z_{\max} = \pm b/2$ , t. j.

$$\tau = \tau_z \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \tau_z \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{T_{(x)} U_{z(y)}}{b_{(y)} J_z \cos \varphi} \quad (6.12)$$



Obr. 6.9. Smer šmykových napätí od priechnej sily v priereze symetrickom k osi  $y$

Pre kruhový prierez rovnako nositeľky šmykových napätí po šírke prierezu smerujú do bodu P, ktorý je daný priesečníkom dotyčnic v krajných bodoch obrysu. Z Obr. 6.9 je potom jasné, že

$$\frac{b_y}{2} = \sqrt{r^2 - y^2} \quad a \quad \cos \varphi = \frac{b_y}{2r}$$

Statický moment plochy  $S_{(y)}$  (označenej šrafovaním) k osi  $z$  je

$$U_{y(y)} = \int_{S_{(y)}} y_1 dS_1 = 2 \int_y^r y_1 \sqrt{r^2 - y_1^2} dy_1$$

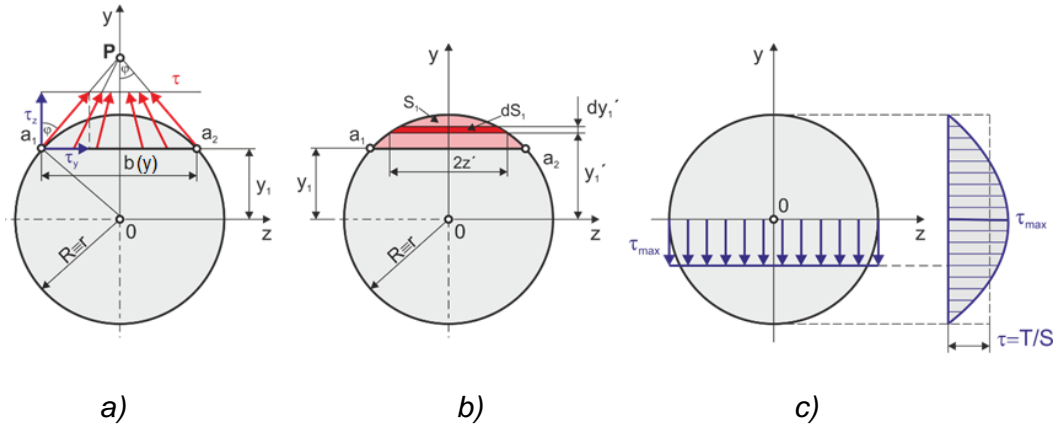
Po dosadení do rovnice (6.12) aj za  $J_z = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$  dostávame

$$\tau_{z(y)} = \frac{T_{(x)} U_{z(y)}}{b_{(y)} J_z \cos \varphi} = \frac{4}{3} \frac{T_{(x)} \sqrt{r^2 - y^2}}{\pi \cdot r^3} \quad (6.13)$$

Odvođený vzťah pre šmykové napätia po výške kruhového prierezu je rovnicou elipsy, ktorá nadobúda maximálnu hodnotu pre  $y = 0$ , t. j.

$$\tau_{max} = \frac{4 T_{(x)} \sqrt{r^2}}{3 \pi r^3} = \frac{4 T_{(x)}}{3 \pi r^2} = \frac{4 T_{(x)}}{3 S} \quad (6.14)$$

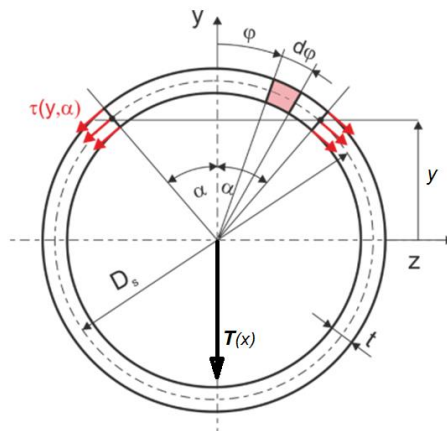
Graficky je tento priebeh šmykového napätia po výške kruhového prierezu znázornený na Obr. 6.10.



Obr. 6.10. Priebeh šmykových napätí od priečnej sily po výške kruhového prierezu

### Šmykové napätia v medzikruhovom priereze

V súlade s priebehom šmykových napätí v kruhovom priereze majú tieto napätia aj v medzikruhovom priereze smer dotýčnice a po hrúbke steny ich môžeme považovať za konštantné. Vo vlákne  $y$  od neutrálnej osi  $z$  sú šmykové napätia (šmykový tok) v stene znázornené na Obr. 6.11.



Obr. 6.11. Pôsobenie šmykových napätí v medzikruhovom priereze

Vzťah (6.10) pre priebeh šmykových napätí vo všeobecnom priereze bude mať pre medzikruhový prierez s priemerom strednice  $D_S$  a hrúbkou steny  $t$  tvar

$$\tau_{z(\alpha)} = \frac{T_{(x)} U_{z(\alpha)}}{b_{(y)} J_p}, \quad (6.15)$$

pretože statický moment  $U_z$  bude výhodné vyjadriť v polárnych súradniciach. Rovnako polárny moment medzikruhového tenkostenného prierezu možno vyjadriť v polárnych súradniciach ako

$$J_p = 2 \int_0^\pi \left( \frac{D_S}{2} \right)^2 \frac{D_S}{2} t d\alpha = \left( \frac{D_S}{2} \right)^2 D_S t \pi$$

Statický moment  $U_{z(\alpha)}$  vyšrafovej plochy na Obr. 6.11 je

$$U_{z(\alpha)} = 2 \int_0^\alpha \frac{D_S}{2} t d\varphi \frac{D_S}{2} \cos \varphi = 2 \left( \frac{D_S}{2} \right)^2 t \sin \alpha$$

Dosadením do rovnice (6.15) dostávame pre priebeh šmykových napätí v tenkostennom medzikruhovom priereze

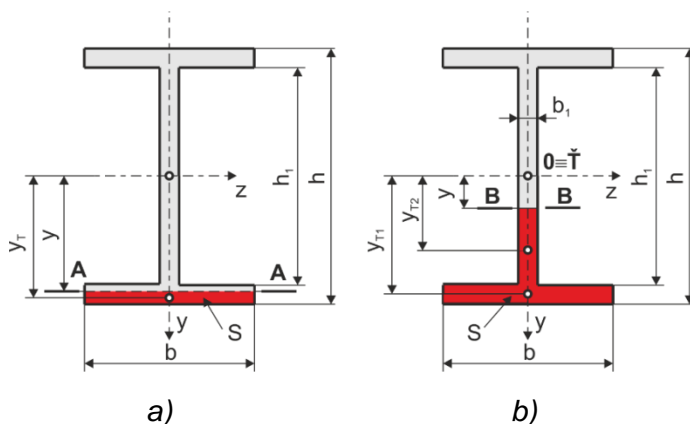
$$\tau_{z(\alpha)} = \frac{T_{(x)} 2 \left( \frac{D_S}{2} \right)^2 t \sin \alpha}{2 t \left( \frac{D_S}{2} \right)^2 D_S t \pi \cdot \frac{1}{2}} = 2 \frac{T_{(x)}}{\pi \cdot D_S \cdot t} \sin \alpha \quad (6.16)$$

Maximálnu hodnotu nadobúda šmykové napätie pre  $\alpha = 90^\circ$

$$\tau_{max} = 2 \frac{T_{(x)}}{\pi \cdot D_S \cdot t} = 2 \frac{T_{(x)}}{S} \quad (6.17)$$

### Šmykové napätia v nosníku I

Priebeh šmykového napätia  $\tau_z$  po výške prierezu I určíme aplikáciou rovnice (6.10) pre pásnicu a stojinu. Premennou veličinou je statický moment  $U_{z(y)}$ , ktorý určíme vždy ako moment plochy medzi miestom y (vláknom prierezu), v ktorom počítame veľkosť napätia a bližším krajným vláknom obrysu prierezu. V reze A-A pásnice (Obr. 6.12a) je statický moment  $U_{z(y)}$  tmavšej plochy



a) b)  
Obr. 6.12 Šmykové napätia v I nosníku

$$U_{z(y)} = S_{(y)} y_T = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

V reze B-B stojiny je statický moment  $U_{z(y)}$  vyšrafovannej plochy (Obr. 6.12b)

$$\begin{aligned} U_{z(y)} &= S_1 y_{T1} + S_2 y_{T2} = b t_1 \left( \frac{h-t}{2} \right) + t_2 \left( \frac{h-t}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h-t}{2} - y \right) \right] = \\ &= b t \left( \frac{h-t}{2} \right) + \frac{t_1}{2} \left[ \left( \frac{h-t}{2} \right)^2 - y^2 \right] \end{aligned}$$

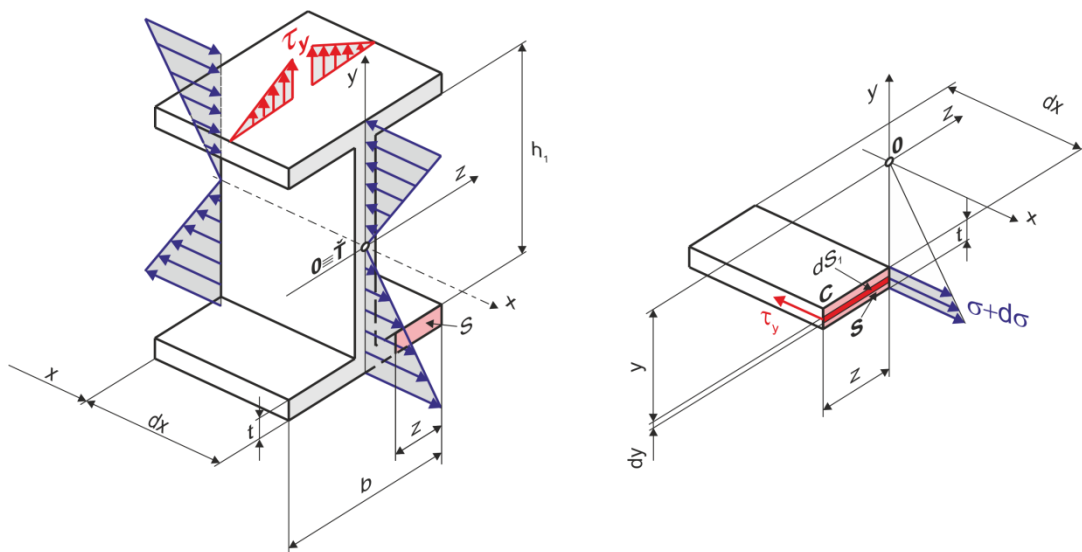
Po dosadení do rovnice (6.10) dostávame pre priebeh šmykových napätí v pásnici

$$\tau_z = \frac{T_{(x)}}{b J_z} \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (6.18)$$

a pre priebeh šmykových napätí v stojine

$$\tau_z = \frac{T_{(x)}}{t_1 J_z} b t \left( \frac{h-t}{2} \right) + \frac{t_1}{2} \left[ \left( \frac{h-t}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (6.19)$$

Obidve rovnice sú rovnicami paraboly a výsledný priebeh šmykových napätí po výške I profilu je na Obr. 6.12c. Najväčšiu hodnotu nadobúda šmykové napätie v strede stojiny ( $y = 0$ ) a nespojite sa mení v prechode pásnice a stojiny z dôvodu skokovej zmeny šírky prierezu.



Obr. 6.13. Šmykové napätia v I nosníku

Šmykové napätia vznikajú pri ohybe I profilu aj po šírke jeho pásnic. Po výške elementu I profilu o šírke  $dx$  sú znázornené normálové napätia na Obr. 6.13.

Ich prírastok  $d\sigma$  na dĺžke  $dx$  bol základom odvodu šmykových napätí podľa Obr. 6.7 a bol aplikovaný aj na odvodenie šmykových napätí  $\tau_z$  po výške I profilu. Na odrezanú časť pásnice pôsobia na jej ľavom konci normálové napätia  $\sigma$  a na jej pravom konci napätia  $\sigma + d\sigma$ . Aby odrezaná časť pásnice zostala v rovnováhe, musia na bočnej ploche rezu v mieste  $z_1$  pôsobiť šmykové napätia  $\tau_y$ . Po hrúbke pásnice budeme ich rozloženie považovať za rovnomerné (vzhľadom na malú hrúbku pásnice je tento predpoklad dostatočne presný). Podmienka rovnováhy sil na odrezanej časti pásnice v smere  $x$  je:

$$\int_{(S)} (\sigma + d\sigma) dS - \int_{(S)} \sigma \cdot dS - \tau_y \cdot t \cdot dx = 0$$

Z tejto rovnice vyjadríme  $\tau_y$  ako

$$\tau_y = \frac{1}{t \cdot dx} \int_{(S)} d\sigma \cdot dS$$

Po dosadení z rovnice (6.9) za  $d\sigma = \frac{dM_{(x)}}{J_z} y$  dostávame pre šmykové napätie v pásnici vzťah



$$\tau_y = \frac{1}{t \cdot dx} \int_{(S)} \frac{dM_{(x)}}{J_z} y \cdot dS = \frac{dM_{(x)}}{dx} \frac{1}{t \cdot J_z} \int_{(S)} y \cdot dS \quad \Rightarrow$$

$$\tau_y = \frac{T_{(x)} U_{z(z)}}{t \cdot J_z} \quad (6.20)$$

pretože podľa Žuravského vety je  $T_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx}$  priečna sila a

$U_{z(z)} = \int_{(S)} y \cdot dS$  je statický moment plochy S pásnice k osi z, ktorého veľkosť je

$$U_{z(z)} = S \cdot y_T = z \cdot t \frac{h-t}{2}$$

Šmykové napätie  $\tau_y$  pôsobí v reze  $z_1$  pásnice, združené šmykové napätie pôsobí v čelnej rovine pásnice a jeho hodnota je

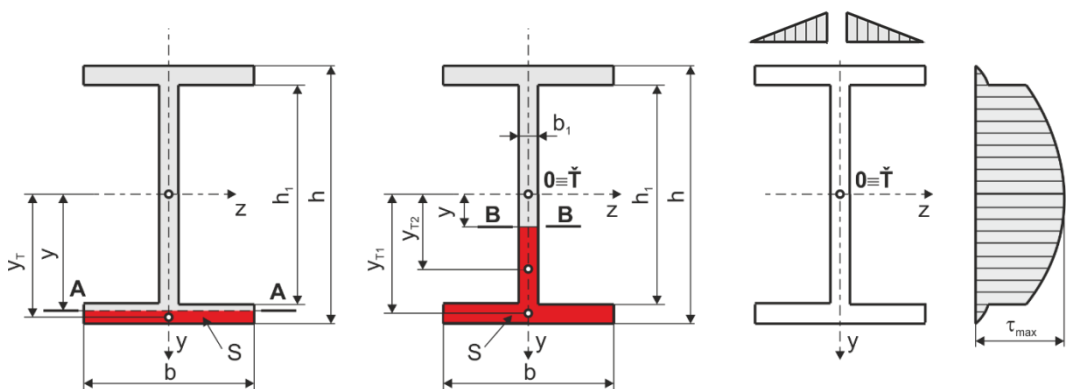
$$\tau_y = \frac{T_{(x)}}{t \cdot J_z} z \cdot t \frac{h-t}{2} = \frac{T_{(x)}(h-t)}{2J_z} z \quad (6.21)$$

Šmykové napätie  $\tau_y$  v pásnici má podľa rovnice (6.21) lineárny priebeh. Najväčšiu hodnotu nadobúda v mieste spojenia pásnice a stojiny - čo do veľkosti je toto napätie rovné

$$\tau_{y_{max}} = \frac{T_{(x)} t \frac{(b-t)(h-t)}{2}}{t \cdot J_z}$$

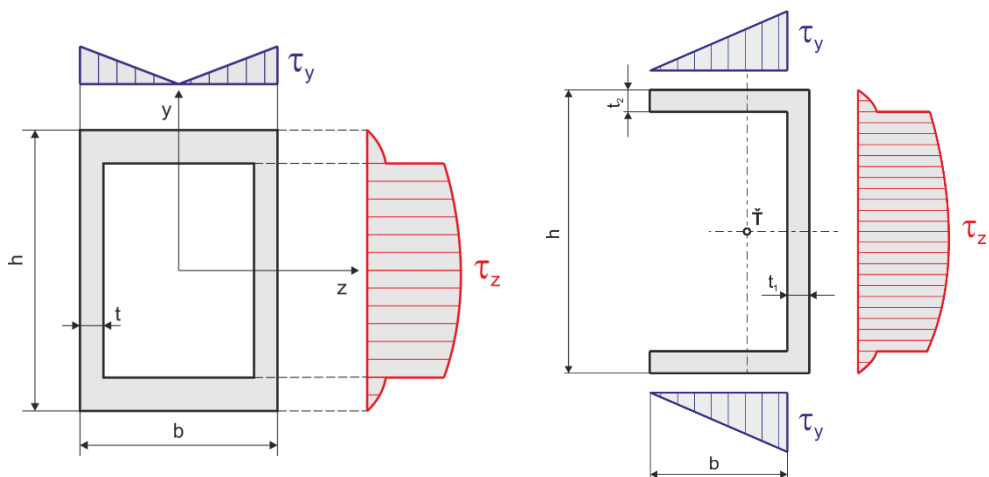
Táto hodnota je porovnateľná (resp. o málo väčšia) s veľkosťou šmykového napätia  $\tau_z$  v mieste posledného vlákna pásnice (rov.6.18)

$$\tau_z = \frac{T_{(x)}}{b \cdot J_z} t \cdot b \frac{(h-t)}{2}$$



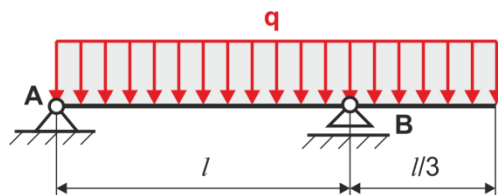
Obr. 6.14 Celkový priebeh šmykových napätí v I nosníku

Analogicky možno odvodiť priebehy šmykových napätí pre prierez tvaru U, prípadne Jäckl.



Obr. 6.15 Priebeh šmykových napätí v profile Jäckl a U

**Príklad 3:** Vypočítajte a znázorníte priebeh ohybových momentov a priečných síl pozdĺž nosníka na obrázku a urobte pevnostnú kontrolu prierezu I.



Nosník k príkladu 3

Reakcie vo väzbách určíme z podmienok rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0: R_B l - q \frac{4}{3} l \frac{2}{3} l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{8}{9} ql$$

$$\sum M_B = 0: R_A l - q \frac{4}{3} l \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{4}{9} ql$$

Priebehy vnútorných veličín je potrebné vyšetriť pomocou 2 myslenných rezov:

$$x_1 \in (0, l/3):$$

$$M_{(x_1)} = -\frac{qx_1^2}{2} \quad M_{(0)} = 0$$

$$M_{(l/3)} = \frac{ql^2}{18}$$

$$T_{(x_1)} = qx_1 \quad T_{(0)} = 0$$

$$T_{(l/3)} = \frac{ql}{3}$$

$$x_2 \in (0, l):$$

$$M_{(x_2)} = R_A x_2 - \frac{qx_2^2}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow M_{(0)} = 0 \\ \searrow M_{(l/2)} = \frac{ql^2}{18} \end{matrix}$$

$$M_{(l/2)} = \frac{ql^2}{18}$$

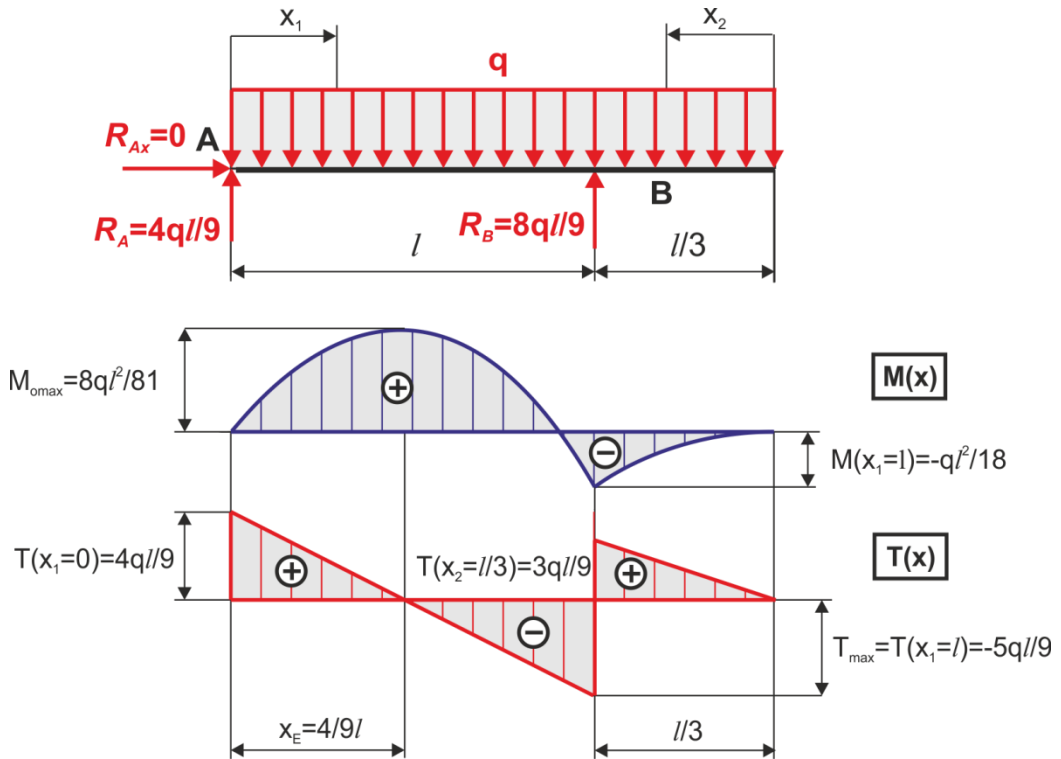
$$T_{(x_2)} = R_A - qx_2 \quad \begin{matrix} \nearrow T_{(0)} = R_A = \frac{4}{9} ql \\ \searrow T_{(0)} = -\frac{5}{9} ql \end{matrix}$$

$$T_{(0)} = -\frac{5}{9} ql$$

Pretože priebeh ohybových momentov v reze  $x_2$  je parabolický, treba nájsť miesto a hodnotu extrémú tejto funkcie (v reze  $x_1$  je parabolický priebeh funkcie ohybového momentu bez lokálneho extrémú):

$$M'_{(x_2)} = 0 \Rightarrow R_A - qx_2 = 0 \Rightarrow x_{2max} = \frac{R_A}{q} = \frac{4}{9} l$$

$$M_{(x_2 = \frac{4}{9} l)} = \frac{4}{9} ql \frac{4}{9} l - q \left( \frac{4}{9} l \right)^2 = \frac{8}{81} ql^2$$



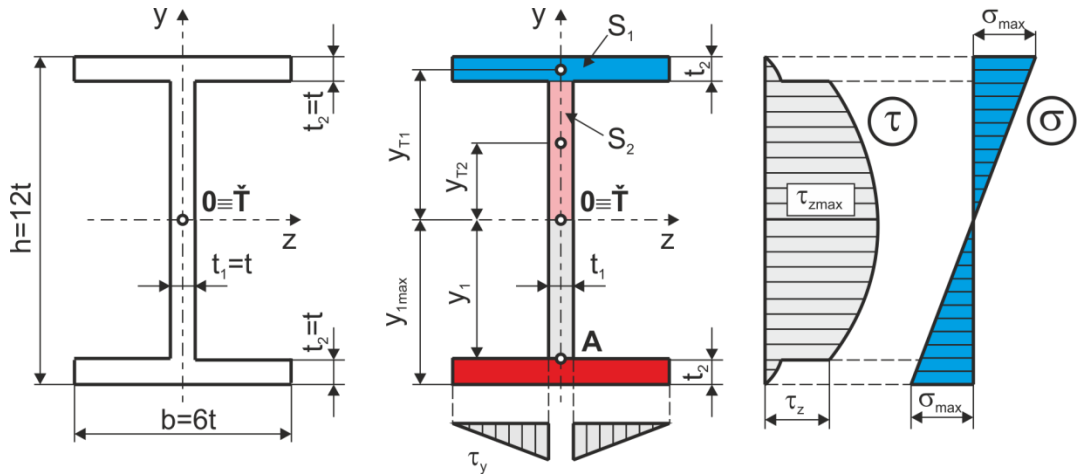
Priebehy funkcií ohybového momentu a priečnej sily sú na Obr. 6.15. Prierezy, v ktorých treba urobiť pevnostnú kontrolu sú:

- prierez v mieste maximálneho ohybového momentu,
- prierez v mieste maximálnej priečnej sily,
- prierez s najnepriaznivejšou kombináciou  $M_{(x)}$  a  $T_{(x)}$ .

$$x_2 = \frac{4}{9}l, \text{ krajné vlákna: } \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{J_z} y_{max} = \frac{\frac{8}{81}ql^2}{531t^4} 6t = \frac{0,0011 \cdot ql^2}{t^3} \leq \sigma_{dov}$$

$$x_2 = l, \text{ stredné vlákna: } \tau_{max} = \frac{|T_{max}| U_{zmax}}{t \cdot J_z} = \frac{\frac{5}{9}ql(6t^2 \cdot 5,5t + 2,5t^2 \cdot 2,5t)}{t \cdot 531t^4} = \frac{0,061 \cdot ql}{t^2} \leq \frac{\sigma_{dov}}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 = l, \text{ prechod pásnice a stojiny} : \sigma_{red} &= \sqrt{\sigma_{(y=5t)}^2 + 3(\tau_{z(y=5t)} + \tau_{y(z=2t)})^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{ql^2}{18.531.t^4} 5t\right)^2 + 3\left(\frac{5}{9}ql(6t^2 \cdot 5,5t) + \frac{5}{9}ql(2t^2 \cdot 5,5t)\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{0,000523.ql^2}{t^3}\right)^2 + 3\left(\frac{0,046.ql}{t^2}\right)^2} \leq \sigma_{dov}
 \end{aligned}$$

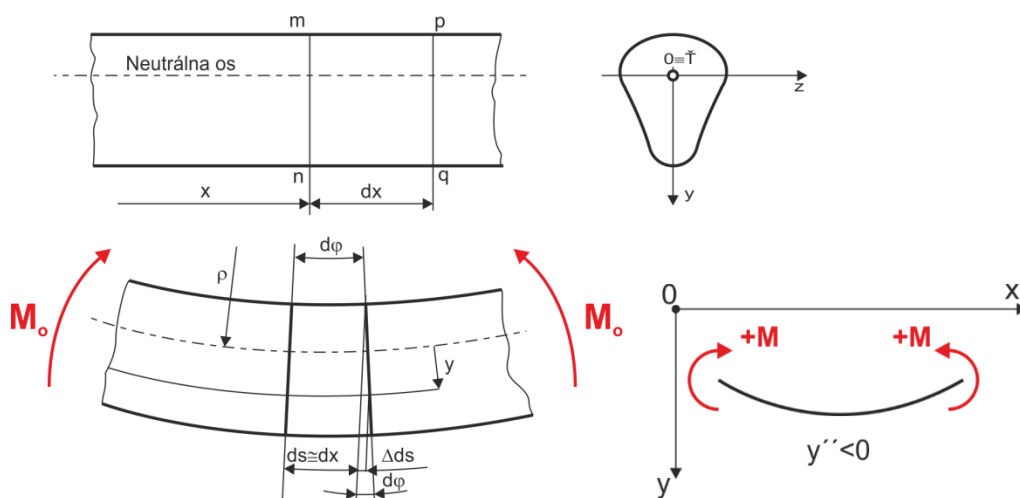


### 6.3 Deformácia nosníkov

Deformáciou nosníkov je priehyb. Deformovaná os nosníka sa nazýva **priehybovou čiarou**. Priehyb nosníkov je potrebné poznať napr. pri mostoch, žeriavových dráhach, kde okrem pevnostnej podmienky je vyžadovaná aj podmienka maximálneho povoleného priehybu. Rovnako aj pri prevádzke hriadeľov je priehyb resp. jeho derivácia (t. j. natočenie dotyčnice k priehybovej čiare) sledovaným parametrom pre prevádzku ložísk.

#### Diferenciálna rovnica priehybovej čiary (približná)

Pri určovaní rozloženia normálových napätí v priereze ohýbaných nosníkov sme analyzovali deformáciu vlákna vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi (Obr. 6.16).



Obr. 6.16. Deformácia nosníka

Predĺženie elementu vlákna  $ds$  vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi v dôsledku deformácie v ohybe môžeme vyjadriť ako

$$\Delta ds = y \cdot d\varphi$$

Pôvodná (nedeformovaná) dĺžka vlákna  $ds$ , resp. dĺžka vlákna na neutrálnej osi je

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Pomerné predĺženie vlákna v mieste  $y$  prierezu namáhaného ohybovým momentom je potom z definície

$$\varepsilon_{(y)} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Pretože vlákno je pri čistom ohybe namáhané ťahom prípadne tlakom, môžeme jeho pomerné predĺženie vyjadriť tiež pomocou Hookovho zákona ako

$$\varepsilon_{(y)} = \frac{\sigma_{(y)}}{E}$$

Deformačnú podmienku pre jednotlivé vlákno môžeme teda zapísať ako rovnosť týchto dvoch deformácií v tvare

$$\frac{\sigma_{(y)}}{E} = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{(y)} = \frac{y}{\rho} E$$

Dosadením za už známu hodnotu normálového napätia vo vlákne  $y$   $\sigma_{(y)} = \frac{M_{(x)}}{J_z} y$  dostávame:

$$\frac{M_{(x)}}{J_z} y = \frac{y}{\rho} E \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EJ_z}$$

Tento polomer krivosti vieme vyjadriť aj z matematiky ako krivosť krivky v tvare

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \text{kde } y \text{ je poradnica krivky, v našom prípade priehybovej čiary.}$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnice a úprave dostávame

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_{(x)}}{EJ_z} \quad (6.22)$$

Táto rovnica priehybovej čiary sa v praxi používa ako približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary zanedbaním štvorca derivácie priehybu oproti jednotke (pri malých priehyboch v porovnaní s výškou nosníkov je toto zjednodušenie prípustné) a označením priehybu znakom  $v^*$  v tvare

$$v'' = \pm \frac{M_{(x)}}{EJ_z} \quad (6.23)$$

---

\* Znakom  $v$  budeme označovať aj deformáciu telesa v mieste pôsobenia sily, ktorá nemusí mať smer  $y$ .

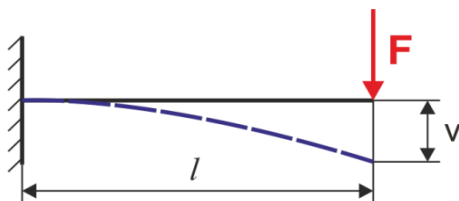
Kladné znamienko ohybového momentu sme už zaviedli tak, ako je na *Obr. 6.16*. Ohybový moment kladnej orientácie spôsobí priehyb smerom nadol, t. j. druhá derivácia funkcie priehybu vychádza kladná v súradniciach na *Obr. 6.16* (priehybová čiara je konvexná funkcia) a priehyby by tak nadobúdali záporné hodnoty. Preto budeme rovnicu (6.22) používať len v tvare

$$v'' = -\frac{M_{(x)}}{EJ_z} \quad (6.24)$$

Tak zaručíme, že od kladných ohybových momentov budú vychádzať kladné priehyby (súradnicový systém na *Obr. 6.16*).

Použitie odvodenej diferenciálnej rovnice priehybovej čiary si ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

**Príklad 4:** Vypočítajte priehyb nosníka z príkladu 1 na jeho voľnom konci.



Obrázok nosníka k príkladu 4

Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary pre tento nosník je

$$v''_{(x)} = -\frac{M_{(x)}}{EJ_z} = \frac{F \cdot x}{EJ_z}$$

Rovnicu je potrebné dvakrát integrovať, pričom použijeme neurčité integrály:

$$v'_{(x)} = \frac{Fx^2}{2EJ_z} + C_1$$

$$v_{(x)} = \frac{Fx^3}{6EJ_z} + C_1x + C_2$$

Integračné konštanty určíme z okrajových podmienok pre priehyb nosníka:

$$1. \ x=l: v_{(x)} = 0$$



$$2. \ x=l: v'(x) = 0 \Rightarrow \frac{Fl^2}{2EJ_z} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Fl^2}{2EJ_z}$$

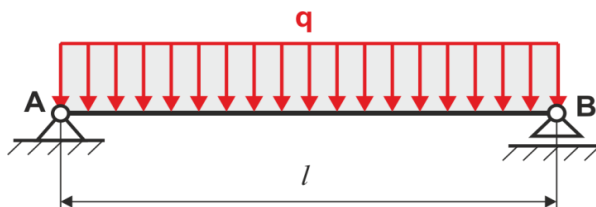
Dosadením do prvej okrajovej podmienky dostávame:

$$\frac{Fl^3}{6EJ_z} - \frac{Fl^2}{2EJ_z}l + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{Fl^3}{3EJ_z}$$

Priehyb na voľnom konci nosníka je rovný práve konštante  $C_2$ , t. j.

$$v_{(x=0)} = C_2 = \frac{Fl^3}{3EJ_z}$$

**Príklad 5:** Vypočítajte maximálny priehyb nosníka na obrázku nižšie a natočenie jeho koncových prierezov.



Obr. nosníka k príkladu 5

Väzbové reakcie sú z podmienok rovnováhy na obidvoch koncoch nosníka rovnaké a rovné  $R_A = R_B = R = \frac{ql}{2}$ .

Priebeh ohybových momentov stačí vyjadriť v jednom myslenom reze:

$$x \in (0, l): M_{(x)} = R \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary pre tento nosník potom je

$$v''_{(x)} = -\frac{M_{(x)}}{EJ_z} = -\frac{R \cdot x}{EJ_z} + \frac{qx^2}{2EJ_z}$$

Rovnicu budeme dvakrát integrovať:

$$v'(x) = -\frac{Rx^2}{2EJ_z} + \frac{qx^3}{6EJ_z} + C_1$$

$$v(x) = -\frac{Rx^3}{6EJ_z} + \frac{qx^4}{24EJ_z} + C_1x + C_2$$

Integračné konštanty určíme z okrajových podmienok pre priebyb nosníka:

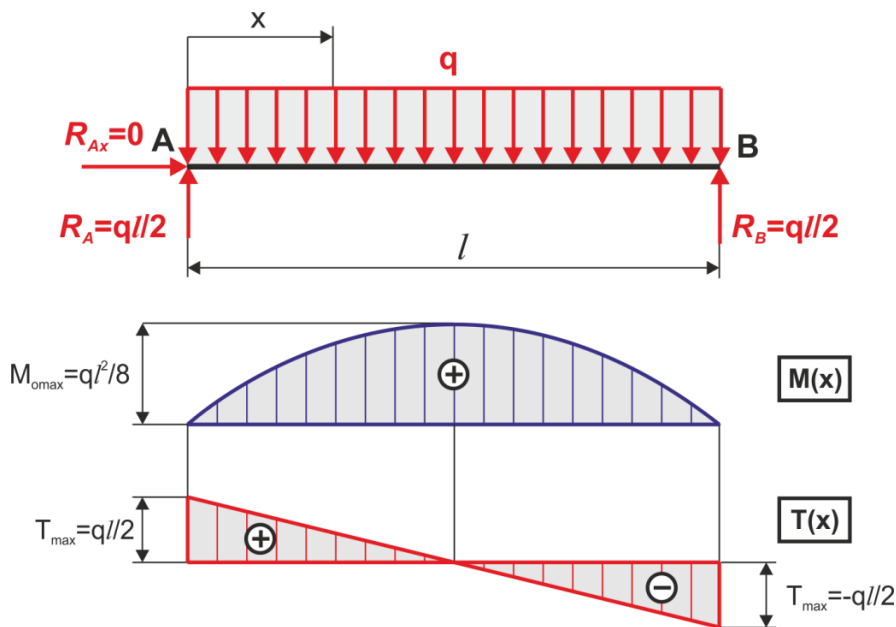
$$1. \ x=0: v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$2. \ x=l: v(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{ql \cdot l^3}{12EJ_z} + \frac{ql^4}{24EJ_z} + C_1l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{ql^3}{24EJ_z}$$

Rovnica priebybovej čiary nosníka má tvar

$$v(x) = -\frac{qlx^3}{12EJ_z} + \frac{qx^4}{24EJ_z} + \frac{ql^3}{24EJ_z}x$$

a v ktoromkoľvek mieste nosníka umožňuje vypočítať veľkosť priebybu dosadením za  $x$ .



Miesto maximálneho priehybu určíme hľadáním extrému funkcie, t. j. prvú deriváciu položíme rovnú 0. Dostaneme v tomto prípade kubickú rovnicu, avšak miesto maximálneho priehybu z dôvodu symetrie nosníka musí byť uprostred, t. j. pre  $x = \frac{1}{2}l$ :

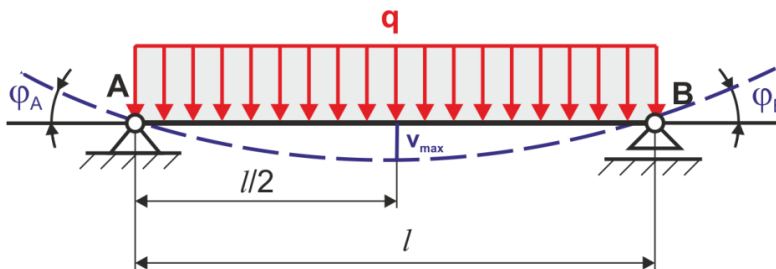
$$v_{max} = v_{(x=\frac{l}{2})} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Naklonenie koncových priereзов nosníka je v skutočnosti uhol sklonu dotýčnice k priehybovej čiare v týchto bodoch. Pribeh uhla dotýčnice k priehybovej čiare pozdĺž nosníka je prvá derivácia priehybu

$$v'_{(x)} = -\frac{Rx^2}{2EJ_z} + \frac{qx^3}{6EJ_z} + C_1,$$

preto platí:

$$\varphi_A = v'_{(x=0)} = C_1 = \frac{ql^3}{24EJ_z} \quad [rad]$$



Výpočet priehybu pomocou približnej diferenciálnej rovnice priehybovej čiare je univerzálna metóda, ktorej výsledkom je rovnica krivky. Umožňuje nájsť extrémnu hodnotu priehybu aj vypočítať uhol naklonenia ktoréhokoľvek prierezu nosníka. V prípade, ak pribeh ohybového momentu je potrebné riešiť vo viacerých úsekoch, pre každý úsek je potrebné napísať rovnicu priehybovej čiare. Zvyšuje sa tak počet integračných konštánt aj okrajových podmienok potrebných pre ich výpočet.

## 6.4 Castiglianove vety

Uvažujme nosník zaťažený ľubovoľnou silou  $F_i$  kolmou na os nosníka (Obr. 6.17a). Deformáciou (v tomto prípade priehybom) nosníka sa nemení

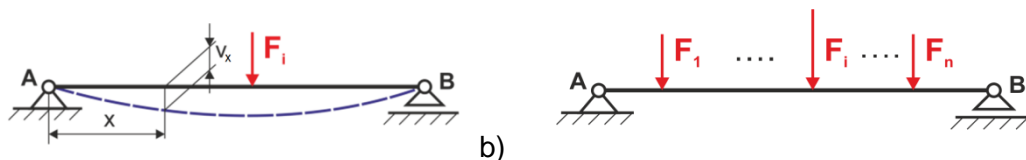
účinnok vonkajšej sily  $F_i$ . Priehyb v ľubovoľnom mieste  $x$  nosníka môžeme vyjadriť vzťahom

$$v_x = F_i \cdot \tau_{xi}$$

kde súčiniteľ  $\tau_{xi}$  sa nazýva Maxwellov koeficient elastičnosti – je to priehyb vyvolaný silou jednotkovej veľkosti a závisí len od polohy rezu  $x$  a od polohy pôsobiska sily  $F_i$  (prvý index koeficientu označuje polohu rezu  $x$  a druhý polohu sily  $F_i$ ). Aby sme celkový priehyb mohli vypočítať vynásobením jednotkového priehybu veľkosťou sily, ktorá ho vyvolala, musí platiť Hookov zákon.

Ak pôsobí na nosník súčasne viacero síl  $F_1, \dots, F_n$ , ktoré sú kolmé na os nosníka (Obr. 6.17b), vyvolá každá sila  $F_i$  jednotlivo v mieste  $x$  priehyb

$$v_{xi} = F_i \cdot \tau_{xi}$$



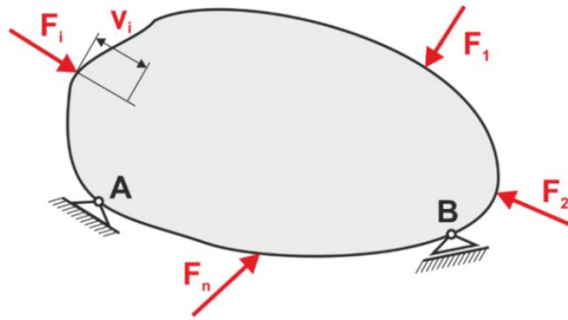
Obr. 6.17. Nosník zaťažený silou resp. sústavou síl

Potom výsledný priehyb v tomto mieste  $x$  od všetkých síl  $F_1, \dots, F_n$ , pôsobiacich súčasne je

$$v_x = F_1 \tau_{x1} + F_2 \tau_{x2} + \dots + F_i \tau_{xi} + \dots + F_n \tau_{xn} = \sum_{i=1}^n F_i \tau_{xi} \quad (6.25)$$

Táto rovnica je vyjadrením zákona superpozície účinkov.

Prípad nosníka a jeho priehybu od účinku sústavy síl rozšírime teraz na pružné teleso všeobecného tvaru, nepohyblivo uložené a zaťažené tiež sústavou síl  $F_1, \dots, F_n$  (Obr. 6.18).



Obr. 6.18. Teleso zaťažené sústavou síl

Ak označíme posuv pôsobiska sily  $F_i$  v smere jej pôsobenia ako  $v_i$  pri súčasnom pôsobení všetkých síl  $F_1, \dots, F_n$ , tak podľa zákona superpozície posuvov musí byť každý takýto posuv  $v_i$  funkciou všetkých vonkajších síl. Posuv pôsobiska sily  $F_1$  sa bude na základe rovnice (6.25) rovnať

$$\begin{aligned} v_1 &= F_1\tau_{11} + F_2\tau_{12} + \dots + F_i\tau_{1i} + \dots + F_n\tau_{1n} = \\ &= F_1 \left( \tau_{11} + \frac{F_2}{F_1}\tau_{12} + \dots + \frac{F_i}{F_1}\tau_{1i} + \dots + \frac{F_n}{F_1}\tau_{1n} \right) \end{aligned}$$

Pokiaľ teleso je ako celok nepohyblivo uložené, t. j. vonkajšie sily sú počas svojho nárastu stále v rovnováhe s vnútornými silami, vtedy celá práca vonkajších síl sa rovná energii napätosti nahromadenej v telese. Veľkosť tejto energie nie je závislá od poradia, v akom sily začnú pôsobiť a je určená len konečnými hodnotami  $F_i$  a  $v_i$ . Sily môžu teda rásť aj súčasne od nuly do svojich konečných hodnôt tak, že jednotlivé pomery síl budú počas ich nárastu rovnaké, t. j.

$$\frac{F_2}{F_1} = C_2 ; \quad \frac{F_3}{F_1} = C_3 ; \quad \dots ; \quad \frac{F_i}{F_1} = C_i ; \quad \dots ; \quad \frac{F_n}{F_1} = C_n = \text{konšt}$$

Dosadením do predchádzajúcej rovnice dostávame pre posunutie pôsobiska sily  $F_1$ :

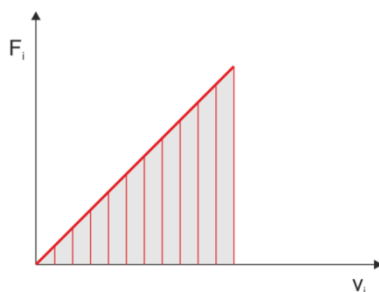
$$v_1 = F_1(\tau_{11} + C_2\tau_{12} + \dots + C_i\tau_{1i} + \dots + C_n\tau_{1n})$$

Z predošlej úvahy vyplýva, že členy v zátvorke tvoria spolu konštantu a teda posuv pôsobiska sily  $F_1$  je úmerný tejto sile podľa vzťahu

$$v_1 = F_1 \cdot k_1$$

Takýto vzťah len s inou konštantou dostaneme aj pri ostatných silách a posuvoch ich pôsobísk, preto pre posunutie pôsobiska všeobecnej sily  $F_i$  môžeme napísať

$$v_i = F_i \cdot k_i \quad (6.26)$$



Obr. 6.19. Vzťah medzi silou a posunutím jej pôsobiska za predpokladu platnosti Hookovho zákona

Pretože v rozsahu platnosti Hookovho zákona platí medzi silami a posunutiami lineárny vzťah (Obr. 6.19), môžeme energiu napätosti ako prácu vonkajších síl vyjadriť takto:

$$A = \frac{1}{2} (F_1 v_1 + \dots + F_i v_i + \dots + F_n v_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i v_i \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i^2 k_i \quad (6.27)$$

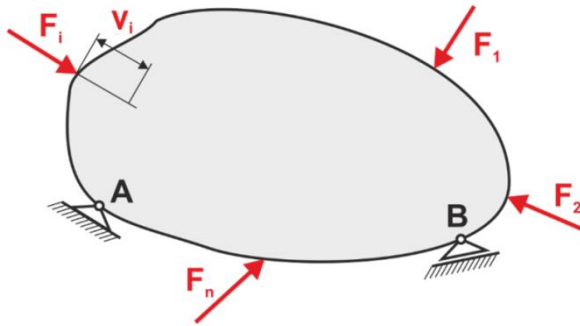
Tento vzťah je dôsledkom vzťahu (6.26), že posuvy sú lineárne funkcie pôsobiacich síl a preto vzťah (6.27) pre energiu napätosti je homogénnou funkciou druhej mocniny vonkajších síl. Tento vzťah platí za podmienok platnosti zákona o superpozícii posuvov.

### Prvá Castiglianova veta

Uvažujme bližšie nešpecifikované pružné teleso, ktoré je nepohyblivo uložené a na ktoré pôsobia sily  $F_1, \dots, F_n$  (Obr. 6.20). Energia napätosti akumulovaná v tomto telese je na základe vzťahu (6.27) vyjadrená funkciou

$$A = f(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n) \quad (6.28)$$

Ak zväčšíme napríklad silu  $F_i$  o diferenciálne malú hodnotu  $dF_i$ , zväčší sa energia napätosti o hodnotu



Obr. 6.20. Teleso zaťažené sústavou síl

$$dA = \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i \quad ,$$

Takže celková energia napätosti bude

$$A + dA = A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i \quad (6.29)$$

Ako sme konštatovali vyššie, energia napätosti nezávisí od poradia pôsobenia síl. Nechajme preto pôsobiť najprv silu  $dF_i$ , ktorá vyvolá diferenciálne malú deformáciu (posunutie v mieste jej pôsobiska v smere sily)  $dv_i$ . Energia napätosti prislúchajúca tomuto stavu podľa Obr. 6.20

$$dA_i = \frac{1}{2} dF_i \cdot v_i$$

Pridajme teraz pôsobenie síl  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ , ktoré v mieste sily  $F_i$  vyvolajú deformáciu  $v_i$ . Podľa zákona superpozície posuvov bude energia napätosti vytvorená týmito silami tiež rovná hodnote  $A$  podľa rovnice (6.28). Nesmieme zabudnúť, že už predtým pôsobiaca stála sila  $dF_i$ , sa posunula v dôsledku pôsobenia síl  $F_1, \dots, F_n$ , o hodnotu  $y_i$  a zvýšila tak energiu vonkajších síl o  $dF_i \cdot v_i$ .

Celková energia napätosti v tomto poradí pôsobenia síl bude

$$A' = \frac{1}{2} dF_i v_i + A + dF_i v_i \quad (6.30)$$

Energia napätosti musí byť v oboch prípadoch rovnaká, t. j.

$$A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = \frac{1}{2} dF_i v_i + A + dF_i v_i$$

Prvý člen pravej strany rovnice je diferenciálne malý člen druhého rádu – t. j. môžeme ho zanedbať a dostávame tak vzťah

$$v_i = \frac{\partial A}{\partial F_i} \quad (6.31)$$

Táto rovnica je matematickým vyjadrením prvej vety Castiglianovej, ktorú môžeme za podmienky platnosti zákona superpozície posuvov sformulovať takto:

*Posunutie pôsobiska sily (deformácia v mieste pôsobenia sily) sa rovná parciálnej derivácii celkovej energie napätosti sústavy podľa tejto sily. Smer posunutia  $v_i$  (deformácie) súhlasí so smerom sily  $F_i$ .*

Rovnakým postupom môžeme na teleso nechať pôsobiť sústavu dvojíc síl (momentov)  $M_1, \dots, M_n$  a ich účinok v mieste pôsobenia označiť ako natočenie  $\varphi_i$ . Výsledok bude

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_i}, \quad (6.32)$$

t. j. uhlové natočenie v mieste pôsobenia dvojice síl (momentu) sa rovná parciálnej derivácii celkovej energie napätosti sústavy podľa tohto momentu.

### **Energia napätosti od základných druhov namáhania**

V kapitole 5.4 sme odvodili energiu napätosti normálových a šmykových napätí – rov.(5.17, 5.18) v tvare

$$A_{1\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{a} \quad A_{1\tau} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} .$$

### Energia napätosti normálových napätí od osových síl

Dosadením rovnice (3.1) do rovnice (5.17) dostávame pre energiu napätosti jednotkového objemu rovnicu

$$A_{1\sigma_N} = \frac{1}{2} \frac{N^2(x)}{S^2 E}$$

Pretože napätie v priereze namáhanom čistým ťahom je konštantné, energiu napätosti celého objemu  $V$  dostaneme integrovaním pozdĺž osi telesa, t. j



$$A_N = \int_{(l)} \frac{1}{2} \frac{N^2(x)}{S^2 E} S dx = \frac{1}{2ES} \int_{(l)} N^2(x) dx \quad (6.33)$$

### Energia napätosti šmykových napätí od krútiacich momentov

Dosadením rovnice (4.7) do rovnice (5.18) dostávame pre energiu napätosti jednotkového objemu rovnicu

$$A_{1\tau_{Mk}} = \frac{1}{2} \frac{M_k^2(x)}{J_p^2 G} \rho^2$$

Integrovaním energie napätosti po celom objeme dostávame

$$A_{Mk} = \frac{1}{2} \int_{(l)} \int_{(S)} \frac{M_k^2(x)}{J_p^2 G} \rho^2 dS dx = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_k^2(x)}{J_p^2 G} dx \int_{(S)} \rho^2 dS = \frac{1}{2GJ_p} \int_{(l)} M_k^2(x) dx ,$$

pretože výraz  $\int_{(S)} \rho^2 dS = J_p$ .

Vzťah je možné rozšíriť aj pre nekrhové prierezy, keď  $J_p \rightarrow J_k$  do tvaru

$$A_{1\tau_{Mk}} = \frac{1}{2GJ_k} \int_{(l)} M_k^2(x) dx \quad (6.34)$$

### Energia napätosti normálových napätí od ohybových momentov

Dosadením rovnice (6.9) do rovnice (5.17) dostávame pre energiu napätosti jednotkového objemu rovnicu

$$A_{1\sigma_N} = \frac{1}{2} \frac{M_o^2(x)}{J_z^2 E} y^2$$

Integrovaním energie napätosti po celom objeme dostávame

$$A_{Mo} = \frac{1}{2} \int_{(l)} \int_{(S)} \frac{M_o^2(x)}{J_z^2 E} y^2 dS dx = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_o^2(x)}{J_z^2 E} dx \int_{(S)} y^2 dS ,$$

$$A_{Mo} = \frac{1}{2EJ_z} \int_{(l)} M_o^2(x) dx , \quad (6.35)$$

pretože výraz  $\int_{(S)} y^2 dS = J_z$

### Energia napätosti šmykových napätí od priečných síl

Dosadením rovnice (6.10) a (6.12) do rovnice (5.18) dostávame pre energiu napätosti jednotkového objemu rovnicu

$$A_{1\tau} = \frac{1}{2} \frac{T^2(x)U_z(y)}{b_y^2 J_z^2 G} \left( 1 + \frac{4z^2}{b_y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right)$$

Integrovaním energie napätosti po celom objeme dostávame

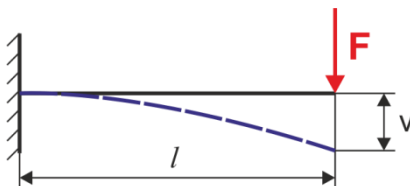
$$\begin{aligned} A_{Mk} &= \frac{1}{2} \int_{(l)} \int_{(s)} \frac{1}{2} \frac{T^2(x)U_z(y)}{b_y^2 J_z^2 G} \left( 1 + \frac{4z^2}{b_y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) dS dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{T^2(x)}{S} dx \int_{(s)} \frac{SU_z(y)}{b_y^2 J_z^2} \left( 1 + \frac{4z^2}{b_y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) dS. \end{aligned}$$

Pretože druhý integrál v tejto rovnici charakterizuje iba tvar priečného prierezu (tento výraz je konkrétne pre kruhový prierez), značíme ho konštantou  $\beta$ . Dostaneme tak rovnicu energie napätí od priečných síl pre všeobecný prierez v tvare

$$A_{Mk} = \frac{\beta}{2GS} \int_{(l)} T^2(x) dx \quad (6.36)$$

Pre kruhový prierez je konštanta  $\beta = \frac{32}{27}$ , pre obdĺžnikový prierez  $\beta = \frac{6}{5}$ .

**Príklad 6:** Vypočítajte priehyb nosníka v príklade 1 na voľnom konci.



Priebeh ohybového momentu sme vyšetrili pomocou jedného myšleného rezu

$$M_{(x)} = -F \cdot x$$

Energia napätosti pre nosník namáhaný ohybom (rov. 6.35) pri zanedbaní vplyvu priečnej sily na deformáciu nosníka je

$$A = \frac{1}{2EJ_z} \int_{(l)} M_{(x)}^2 dx$$

Priehyb na voľnom konci nosníka bude

$$v_A = \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left( \frac{1}{2EJ_z} \int_{(l)} M_{(x)}^2 dx \right) = \frac{1}{EJ_z} \int_{(l)} M_{(x)} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial F} dx \quad (6.37)$$

Po dosadení za priebeh ohybového momentu a jeho deriváciu podľa sily **F** sa bude priehyb rovnat'

$$v_A = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l (-F \cdot x)(-x) dx = \frac{Fl^3}{3EJ_z}$$

Odvođené vzťahy (6.31) a (6.32) platia pre akúkoľvek veľkosť sily **F<sub>i</sub>**, resp. momentu **M<sub>i</sub>** a to aj pre prípad, keď **F<sub>i</sub> = 0**, resp. **M<sub>i</sub> = 0**, t.j. umožňujú vypočítať posunutie, resp. uhol natočenia v mieste, kde sila, resp. moment nepôsobia. Ak by sme chceli pomocou Castiglianovej vety vypočítať priehyb napr. v polovici dĺžky nosníka, je potrebné uvažovať so silou **Q = 0** v tomto mieste, aby sa premietla do rovnice priebehu ohybových momentov a bolo tak možné podľa nej uskutočniť deriváciu v rovnici (6.37). Nenulové členy po tejto operácii dávajú posunutie, resp. natočenie vo zvolenom mieste.

$$v = \left[ \frac{\partial A}{\partial Q} \right]_{Q=0} \quad \varphi = \left[ \frac{\partial A}{\partial M} \right]_{M=0} \quad (6.38)$$

### Druhá Castiglianova veta

Uvažujme pružné teleso uložené tak, že väzbové reakcie budú staticky neurčité. Energia napätosti bude funkciou

$$A = f(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n, R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_k),$$

kde **R<sub>1</sub>** až **R<sub>k</sub>** sú staticky neurčité reakcie. Ak je teleso podopreté tak, že sa v nezaťaženom stave všetkých podpíer len dotýka (teleso sa nemôže pohybovať, môže sa len deformovať), môžeme reakcie v týchto podperách považovať za sily pôsobiace v bode telesa, ktorých posunutie v mieste pôsobiska vyjadruje I.Castiglianova veta. Ak sú podpery nepoddajné, dostávame

$$v = \frac{\partial A}{\partial R_i} = 0 \quad (6.35)$$

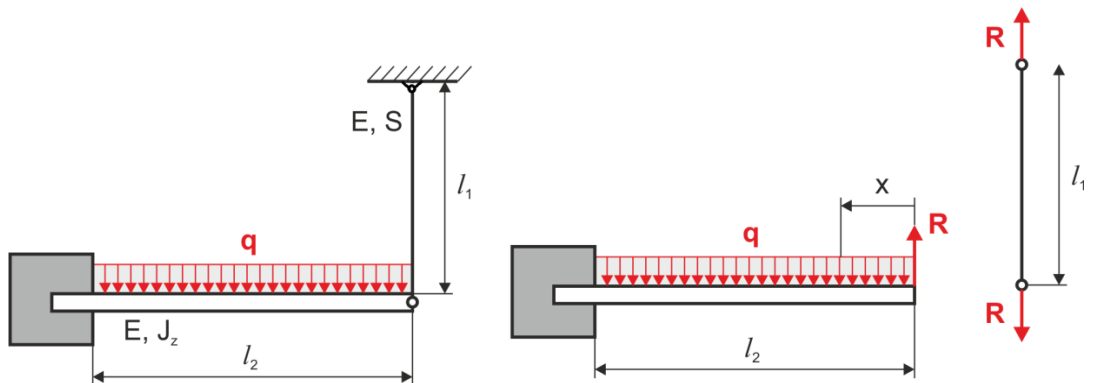
Analogicky pre uhlové natočenie v mieste väzby odoberajúcej tento stupeň voľnosti

$$\varphi = \frac{\partial A}{\partial M_{Ri}} = 0 \quad (6.36)$$

Formulácia II.Castiglianovej vety: *Parciálna derivácia celkovej energie napätosti sústavy podľa staticky neurčitej veličiny sa rovná nule.*

Z matematického hľadiska sa derivácia funkcie rovná nule v mieste, kde táto funkcia nadobúda extrém. V prípade II.Castiglianovej vety môžeme povedať, že je to veta o **minime energie napätosti**, t. j. hodnoty staticky neurčitých veličín (väzbových reakcií, ale aj vnútorných veličín) sú usporiadané tak, aby energia napätosti sústavy bola čo najmenšia.

**Príklad 7:** Vypočítajte silu v prúte staticky neurčitej sústavy na nasledujúcom obrázku.



Obrázok sústavy

Sústava na obrázku sa skladá z dvoch telies – nosníka a prúta, ktoré sú spojené kĺbovou väzbou. Pri jej uvoľnení vložíme do miesta kĺbového spoja silu  $R$  vo vertikálnom smere, horizontálna reakcia sa z podmienky rovnováhy prúta rovná nule. Túto silu nemožno vyjadriť z podmienky rovnováhy, je to staticky neurčitá veličina – preto použijeme II.Castiglianovu vetu:

$$\frac{\partial (A_1 + A_2)}{\partial R} = 0$$

kde  $A_1 = \frac{1}{2E_1J_z} \int_{(l_1)} M_{(x)}^2 dx$  je energia napätosti akumulovaná v nosníku od

ohybového momentu a  $A_2 = \frac{1}{2E_2S} \int_{(l_2)} N_{(x)}^2 dx$  je energia napätosti akumulovaná

v prúte namáhanom ťahom od sily **R**.

Po dosadení do prvej rovnice a úprave dostaneme

$$\frac{\partial(A_1 + A_2)}{\partial R} = \frac{1}{E_1J_z} \int_{(l_1)} M_{(x)} \frac{\partial M_{(x)}}{\partial R} dx + \frac{1}{E_2S} \int_{(l_2)} N_{(x)} \frac{\partial N_{(x)}}{\partial R} dx = 0$$

Priebeh ohybového momentu v reze x nosníka je

$$M_{(x)} = R \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

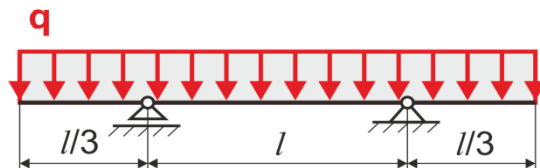
Dosadením za priebeh ohybového momentu a osovú silu dostaneme

$$\frac{1}{E_1J_z} \int_0^{l_1} \left( R \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) x \cdot dx + \frac{1}{E_2S} \int_0^{l_2} R \cdot 1 \cdot dx = 0 \dots \Rightarrow \dots$$

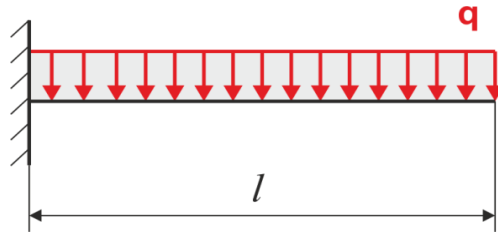
$$R = \frac{ql_1^4}{8E_1J_z \left( \frac{l_1^3}{3E_1J_z} + \frac{l_2}{E_2S} \right)}$$

### Autotest

1. Odvodte vzťah pre maximálnu hodnotu šmykového napätia v obdĺžnikovom priereze.
2. Vypočítajte miesto a veľkosť maximálneho ohybového momentu pre nosník na obrázku nižšie.

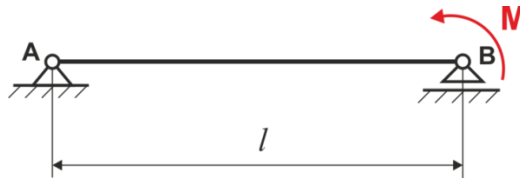


3. Vypočítajte priehyb nosníka na jeho voľnom konci a porovnajte ho v nosníkom v príklade 4.



4. Koľkokrát sa zväčší únosnosť obdĺžnikového prierezu v ohybe, ak zvýšime jeho výšku 2-krát?

5. Vypočítajte priebeh ohybových momentov, priečných síl a veľkosť maximálneho priehybu nosníka na obrázku.



Riešenie:

$$1. \tau_{z(y)} = \frac{T_{(x)} U_{z(y)}}{b_{(y)} J_z} \dots \dots \dots = \frac{3T_{(x)}}{2S}$$

$$2. \text{Uprostred nosníka medzi podperami } M_{max} = \frac{5}{72} q l^2$$

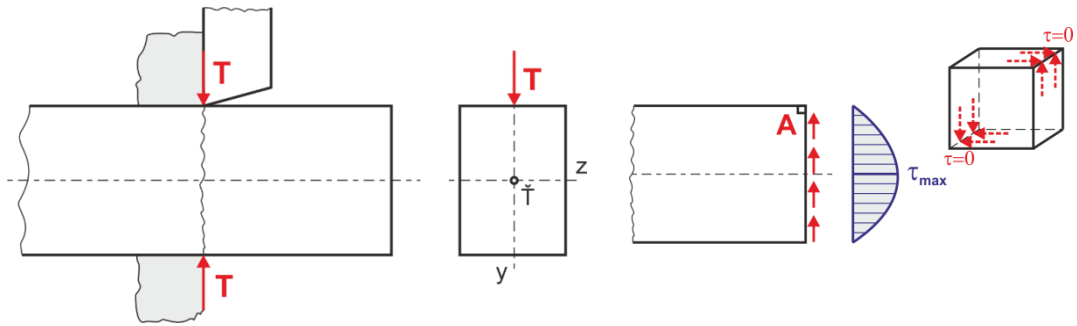
3.  $v = \frac{q l^4}{8 E J_z}$  ; ak by platilo pre porovnanie s príkladom 4, že  $F = q \cdot l$ , potom je priehyb v tomto prípade 2,66-krát menší.

4. Priehyb sa zmenší 8-násobne, maximálne napätie 4-násobne.

$$5. \text{V mieste } x = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \text{je} \quad v_{max} = \frac{M \cdot l^2}{9 \sqrt{3} E J_z}$$

## 7. NAMÁHANIE NA STRIH

Prípád, keď v rovine pričného rezu pôsobí len priečna (tangenciálna) sila **T** prechádzajúca jeho ťažiskom, označujeme ako namáhanie na strih (šmyk) - Obr. 7.1. Tento druh namáhania sa vyskytuje najčastejšie pri čapoch, skrutkových a nitovaných spojoch.



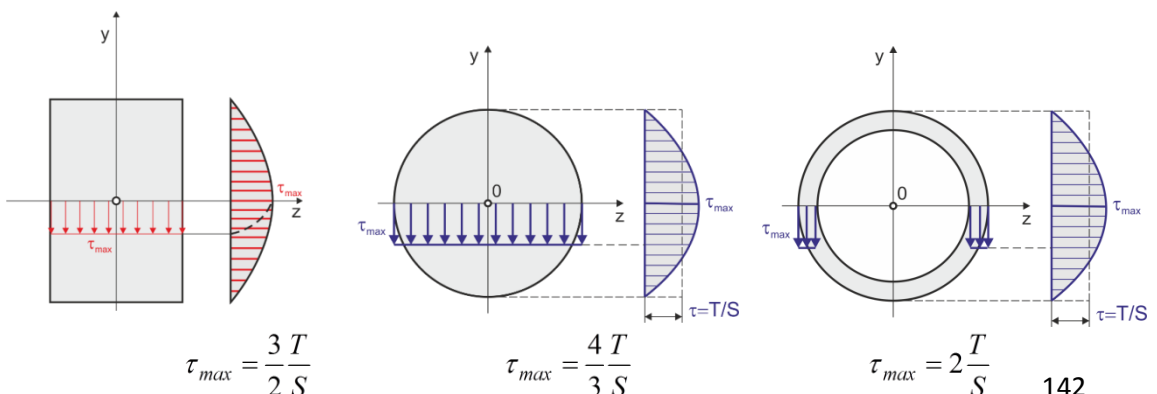
Obr. 7.1. Namáhanie na strih (šmyk)

V staršej literatúre sa niekedy uvádza, že šmykové napätia v priereze sú rovnobežné so silou **T** a vo všetkých bodoch prierezu nadobúdajú rovnakú hodnotu, teda

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Táto hypotéza však nie je správna, pretože šmykové napätie v bode na nezaťaženom povrchu sa musí byť podľa zákona združených šmykových napätí rovnať nule (kap.5.2). Predpoklad rovnomerného rozloženia šmykových napätí je splnený len v okamihu prestrihnutia, keď dosiahne napätie v každom bode prierezu hodnotu medze pevnosti v šmyku.

Skutočné rozloženie šmykových napätí v prierezoch je odvodené v kapitole 6. Pre najčastejšie sa vyskytujúce prierezy sú ich priebehy a maximálne hodnoty uvedené na nasledujúcom obrázku:

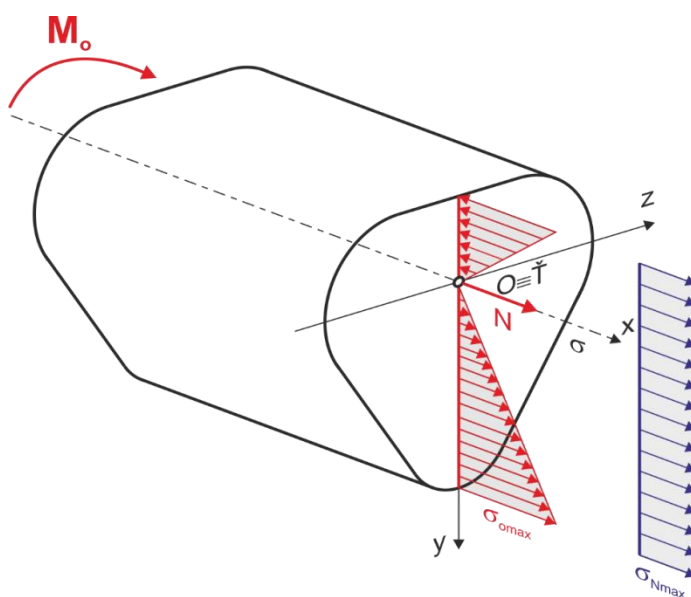


## 8. KOMBINOVANÉ NAMÁHANIE

V praxi sa základné druhy namáhania zriedkavo vyskytujú jednotlivo. Prípady kombinácii viacerých druhov namáhania môžeme na základe platnosti zákona superpozície účinkov riešiť samostatne pre každé namáhanie a výslednú zloženú napätosť posúdiť pomocou vhodnej hypotézy pevnosti.

### **Kombinácia ťah – ohyb**

Ohybový moment rovnako ako ťahová osová sila vytvárajú v priereze normálové napätia (pôsobiace v smere normály priečného prierezu), ktoré majú v jednej časti prierezu vždy rovnakú orientáciu (Obr. 8.1).



Obr. 8.1. Napätia v priereze pri namáhaní ohybom a ťahovou osovou silou

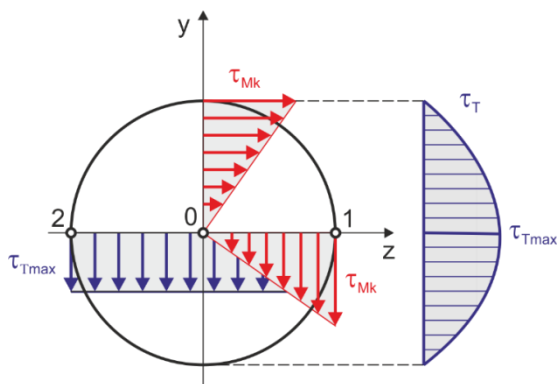
Z pevnostného hľadiska je potrebné posúdiť ich súčet v najviac namáhanom krajnom vlákne:

$$\sigma_{max} = |\sigma_{Mo}| + |\sigma_N| \leq \sigma_{dov} \quad (8.1)$$

### **Kombinácia šmyk – krútenie**

Krútiaci moment rovnako ako priečna sila vytvárajú v priereze šmykové napätia, pôsobiace v rovine priečného rezu, ktoré majú v jednej časti prierezu rovnakú orientáciu (Obr. 8.2).





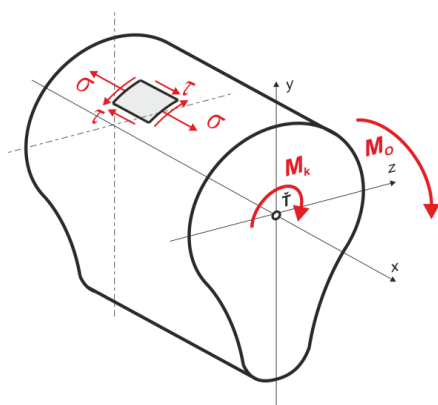
Obr. 8.2. Napätia v kruhovom priereze od krútiaceho momentu a priečnej sily

Z pevnostného hľadiska je potrebné posúdiť ich súčet v najviac namáhanom vlákne na neutrálnej osi prierezu (napr. podľa hypotézy H-M-H):

$$\tau_{max} = \tau_{Mk} + \tau_T \leq \frac{\sigma_{dov}}{\sqrt{3}} \quad (8.2)$$

### Kombinácia ohyb – krútenie

Tento veľmi častý prípad namáhania v technickej praxi je na Obr. 8.3. a predstavuje špeciálny prípad rovinatej napätosti analyzovaný v kapitole 5.5 – hypotézy pevnosti pre špeciálne prípady napätosti.



Obr. 8.3. Kombinácia ohybového a krútiaceho momentu

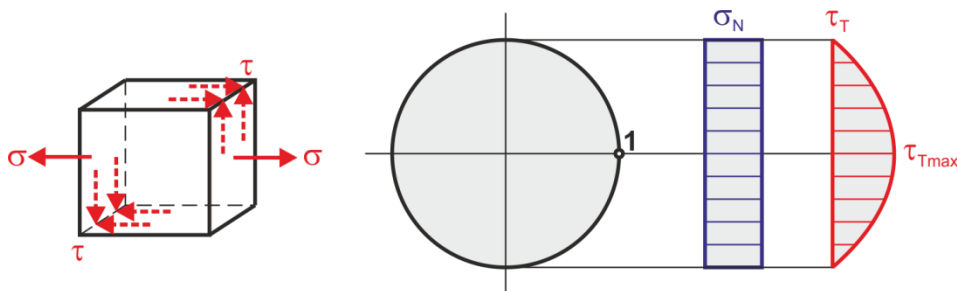
Z pevnostného hľadiska je potrebné posúdiť napätosť v krajnom vlákne na povrchu priečného rezu pomocou niektorého zo vzťahov v Tab.4. Podľa hypotézy H-M-H to bude

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{Mo}^2 + 3\tau_{Mk}^2} \leq \sigma_{dov} \quad (8.3)$$

Kombináciu ohyb – šmyk sme riešili v príklade 3 pri ohýbaných nosníkoch.

### Kombinácia ťah – šmyk

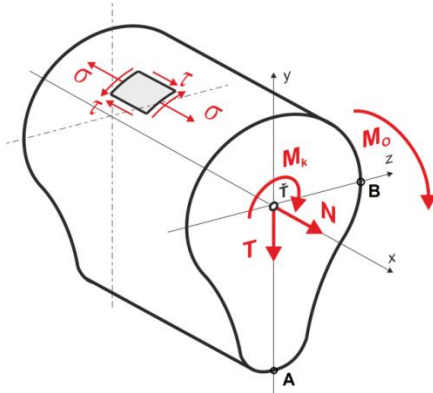
Priečna sila vytvára v priereze šmykové napätia pôsobiace v rovine priečného rezu, naproti tomu osová sila vytvára normálové napätia pôsobiace v smere normály prierezu (Obr. 8.4). Z pevnostného hľadiska je potrebné posúdiť napätosť v strednom vlákne prierezu (napr. podľa hypotézy H-M-H):



Obr. 8.4. Napätia v kruhovom priereze od priečnej a osovej sily.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3\tau_{Mk}^2} \leq \sigma_{dov} \quad (8.4)$$

Všeobecný prípad kombinácie všetkých základných druhov namáhania je na Obr. 8.5



Obr. 8.5. Kombinácia všetkých základných druhov namáhania

Napätie vo všeobecnom bode prierezu, kde majú zhodnú orientáciu normálové napätia od ohybového momentu a ťahovej osovej sily a tiež šmykové napätia od krútiaceho momentu a priečnej sily podľa hypotézy H-M-H bude

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_{Mo} + \sigma_N)^2 + 3(\tau_{Mk} + \tau_T)^2} \leq \sigma_{dov} \quad (8.5)$$

Kritický bod prierezu bude v krajnom vlákne A pri súhlasnom znamienku normálových napätí (šmykové napätie od priečnej sily sa bude s výnimkou profilov T, I, Jäckl a □ rovnať nule)

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_{Mo} + \sigma_N)^2 + 3\tau_{Mk}^2} \leq \sigma_{dov} \quad (8.5a)$$

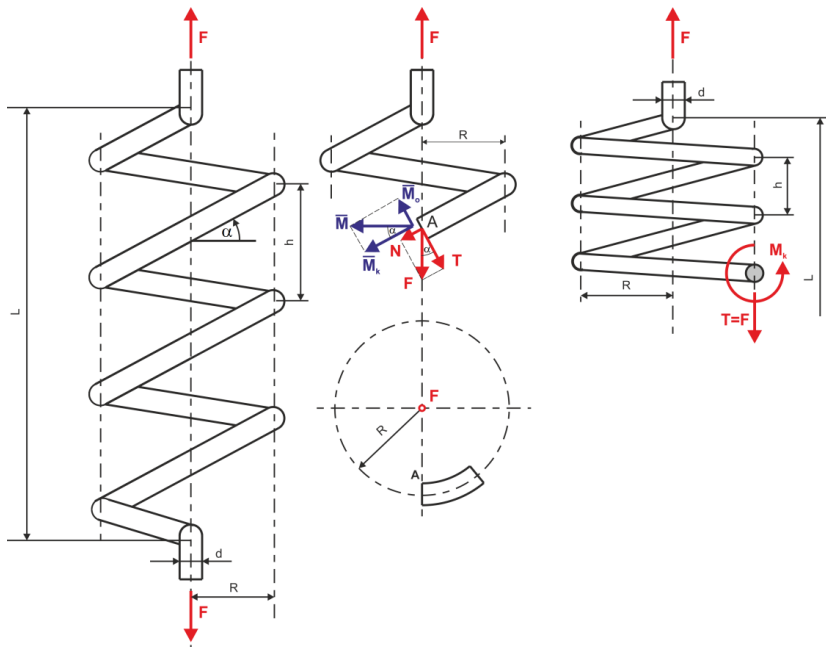
resp. v bode B na neutrálnej osi (normálové napätie od ohybového momentu bude nulové)

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3(\tau_{Mk} + \tau_T)^2} \leq \sigma_{dov} \quad (8.5b)$$

### 8.1 Skrutková pružina

Skrutkové pružiny sú dôležité a často sa vyskytujúce strojové súčiastky. Vo vinutí pružiny pôsobia všetky vnútorné veličiny – ohybový aj krútiaci moment a normálová aj priečna sila. Základné parametre pružiny sú priemer vinutia  $D = 2R$ , hrúbka vinutia  $d$ , stúpanie závitov  $h = 2 \cdot D \cdot \text{tg}\varphi$  ( $\varphi$  je uhol stúpania závitov) a počet činných závitov  $n$ .

Veľkosti a priebehy namáhania vinutia pružiny určíme pomocou mysleneho rezu vedeného kolmo na os vinutia (Obr. 8.6). Podľa zákonov statiky (rovnobežné posunutie sily v rovine, podmienka rovnováhy) pôsobí v reze vinutia pružiny sila  $F$



Obr. 8.6. Skrutková pružina (vľavo), namáhanie vinutia pružiny v myslenom reze (v strede), pružina s malým stúpaním (vpravo)

a dvojica síl  $\bar{M} = \frac{F \cdot D}{2}$ .

Silu pôsobiacu v reze vinutia pružiny rozložíme do smeru normály a do smeru dotyčnice, t. j.

$N(\alpha) = F \sin \alpha$  je osová sila vo vinutí pružiny

$T(\alpha) = F \cos \alpha$  je priečna sila vo vinutí pružiny.

Rovnako pôsobiaci moment v reze vinutia pružiny rozložíme ako vektor do smeru normály (ohybový moment) a do smeru dotyčnice (krútiaci moment), t. j.

$$M_o(\alpha) = M \sin \alpha$$

$$M_k(\alpha) = M \cos \alpha$$

Každá z týchto veličín vytvára v priereze vinutia (kruh) napätia, ktoré ako všeobecný prípad kombinovaného namáhania posúdime podľa podmienok (8.5a, resp. 8.5b)

Z praktického hľadiska je zaujímavá pružina s malým stúpaním ( $h \cong 2d$ ), – v tomto prípade je uhol stúpania  $\varphi$  malý, v dôsledku čoho môžeme zanedbať účinok osovej sily a ohybového momentu (Obr. 8.7). Vinutie pružiny bude namáhané len priečnou silou a krútiacim momentom s veľkosťami

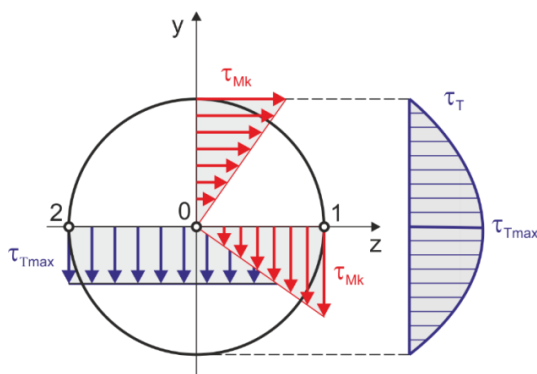
$$T = F$$

$$\bar{M}_k = \frac{FD}{2}$$

Pevnostnú kontrolu je potrebné vykonať na základe priebehu šmykových napätí v priereze vinutia (Obr. 8.7) pre pravý krajný bod na neutrálnej osi, kde majú obidve šmykové napätia zhodný smer, t. j.

$$\tau_{max} = \tau_{Mk} + \tau_T = \frac{FD}{2W_k} + \frac{4F}{3S} \leq \tau_{dov}$$

kde  $W_k$  resp.  $S$  je prierezový modul v krútení resp. plocha kruhového prierezu.



Obr. 8.7. Napätia vo vinutí pružiny s malým stúpaním

V praxi je pružinu častejšie potrebné dimenzovať na únavu, pričom jej pracovný cyklus je určený deformáciou (stlačením) do požadovanej polohy. Na tomto mieste odvodíme len stlačenie pružiny v závislosti od pôsobiacej sily. Jednoduchým nástrojom pre tento výpočet je použitie I.Castiglianovej vety, pretože posunutie pôsobiska sily  $F$  sa zároveň rovná stlačeniu pružiny, t.j.

$$y_F = \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{\partial A_{Mk}}{\partial F} = \frac{1}{GJ_p} \int_0^s M_k \frac{\partial M_k}{\partial F} ds = \frac{1}{GJ_p} \int_0^{\pi \cdot D \cdot n} \frac{FD}{2} \frac{D}{2} ds =$$

$$= \frac{FD^2}{4GJ_p} [s]_0^{\pi \cdot D \cdot n} \Rightarrow y_F = \frac{FD^3}{4GJ_p} \pi \cdot n$$

Po dosadení za polárny kvadratický moment kruhu  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$  dostávame vzťah pre stlačenie pružiny v tvare

$$y_F = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} \quad (8.6)$$

Tento vzťah pre stlačenie pružiny sa často používa v tvare  $y = \frac{F}{k}$ , kde

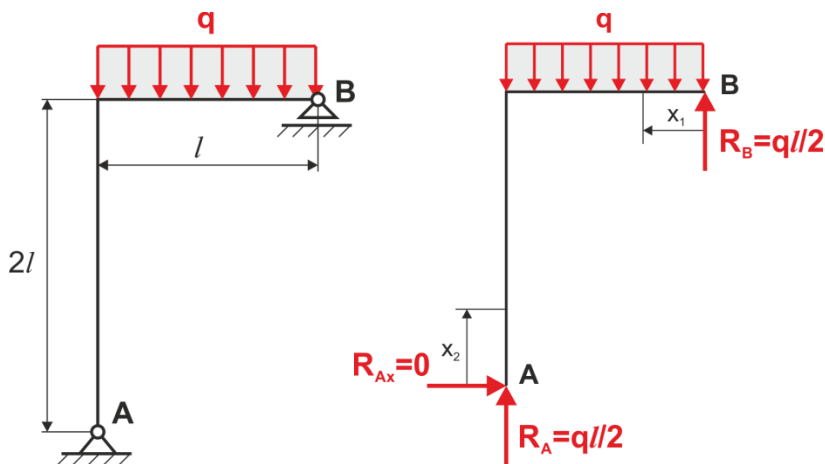
$$k = \frac{Gd^4}{8D^3 n} \text{ je tuhosť pružiny.}$$

## 8.2 Lomené nosníky

V prípade, ak sú priame nosníky medzi sebou spojené pod uhlom, t. j. spojnice ťažísk priečných prierezov je lomená neuzatvorená čiara, hovoríme o lomenom

nosníku. Riešenie lomených nosníkov je rovnaké, ako riešenie priamych nosníkov s tým rozdielom, že v priečnom reze pôsobí v dôsledku zalomenia strednice aj osová sila. Všetky vzťahy používané pri riešení priamych nosníkov používame aj pri lomených nosníkoch.

**Príklad 1.** Vypočítajte a znázornite priebeh namáhania pozdĺž lomeného nosníka na Obr. 8.8. Vypočítajte vodorovné posunutie bodu B a vykonajte pevnostnú kontrolu pre obdĺžnikový prierez.



Obr. 8.8. Lomený nosník k príkladu 1

Väzbové reakcie staticky určitého nosníka vypočítame z podmienok rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0: R_B l - q \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow R_B = q \frac{l}{2}$$

$$\sum F_y = 0: R_A + R_B - ql = 0 \Rightarrow R = q \frac{l}{2}$$

Priebehy namáhania vyšetříme v dvoch myslených rezoch:

$$x_1 \in (0, l):$$

$$M(x_1) = R_B x_1 - q \frac{x_1^2}{2}$$

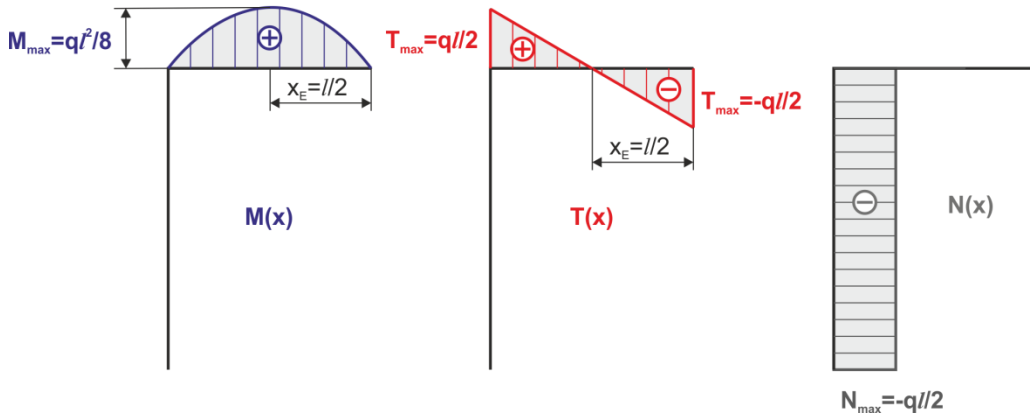
$$T(x_1) = -R_B + qx_1$$

$$x_2 \in (0, 2l):$$

$$M(x_2) = 0$$

$$T(x_2) = 0$$

$$N(x_2) = R_B - ql$$



Z grafických priebehov namáhania vidieť, že pevnostná kontrola je potrebná v troch prierezoch:

- v mieste maximálneho ohybového momentu

$$\sigma_{M_{o max}} = \frac{M_{o max}}{W_o} = \frac{ql^2 6}{8bh^2} \leq \sigma_{dov}$$

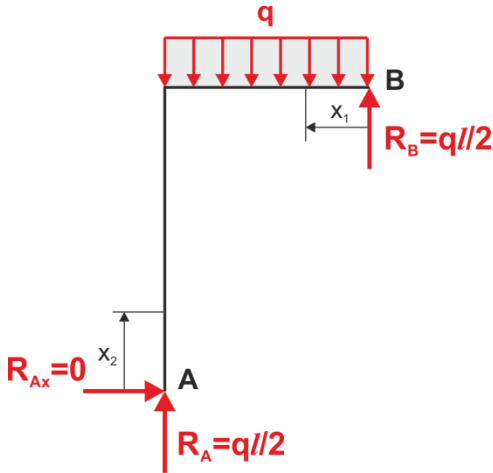
- v mieste maximálnej priečnej sily

$$\tau_{T_{max}} = \frac{3T_{max}}{2S} = \frac{3ql}{2 \cdot 2.2 \cdot b \cdot h} \leq \frac{\sigma_{dov}}{\sqrt{3}}$$

- v mieste maximálnej osovej sily

$$\sigma_{N_{max}} = \frac{N_{max}}{S} = \frac{ql}{2bh} \leq \sigma_{dov}$$

Vodorovné posunutie bodu B vypočítame pomocou I. Castiglianovej vety, keď do pravej podpory vložíme fiktívnu vodorovnú silu  $Q = 0$ .



Väzbové reakcie lomeného nosníka s fiktívnou silou sa zmenia takto:

$$\bar{R}_{Ax} = Q$$

$$\bar{R}_B = q \frac{l}{2} - 2Q, \quad \bar{R}_A = q \frac{l}{2} + 2Q$$

$$x_1 \in (0, l):$$

$$\bar{M}(x_1) = \bar{R}_B x_1 - q \frac{x_1^2}{2} = \left( q \frac{l}{2} - 2Q \right) x_1 - q \frac{x_1^2}{2}$$

$$\bar{M}(x_2) = -\bar{R}_{Ax} x_2 = -Q x_2$$

Vodorovné posunutie bodu B potom bude

$$x_B = \left( \frac{\partial A_{Mo}}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \left( \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \bar{M}(x_1) \frac{\partial \bar{M}(x_1)}{\partial Q} dx_1 + \frac{1}{EJ_z} \int_0^{2l} \bar{M}(x_2) \frac{\partial \bar{M}(x_2)}{\partial Q} dx_2 \right)_{Q=0}$$

Po dosadení a následnom vynechaní členov obsahujúcich fiktívnu silu Q dostávame

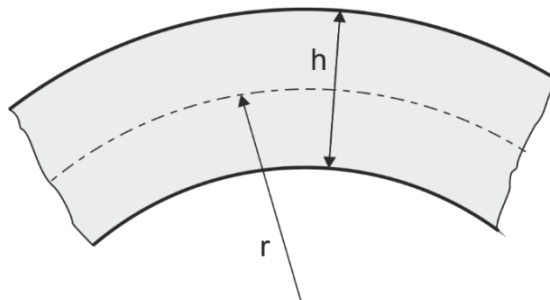
$$x_B = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l (qx_1^3 - qx_1^2) dx = -\frac{ql^4}{12EJ_z}$$



## 8.4 Slabo zakrivené nosníky

V prípade, ak spojnice ťažísk priečných prierezoz je krivka, hovoríme o zakrivenom nosníku. Pokiaľ rozloženie napätí po výške prierezu budeme môcť považovať za úmerné vzdialenosti vlákna od neutrálnej osi a neutrálna os prechádza ťažiskom prierezu (t. j. rovnako ako pri priamych nosníkoch), budeme takýto nosník označovať ako **slabozakrivený** a pri jeho riešení budú platiť všetky vzťahy používané pre ohyb priamych nosníkov. Z hľadiska geometrie budú tieto podmienky spĺňať nosníky, ktorých polomer zakrivenia strednice je viac ako desaťnásobok výšky prierezu, t. j. geometrická hranica pre slabozakrivený nosník je (Obr. 8.9)

$$\frac{r}{h} \geq 10$$



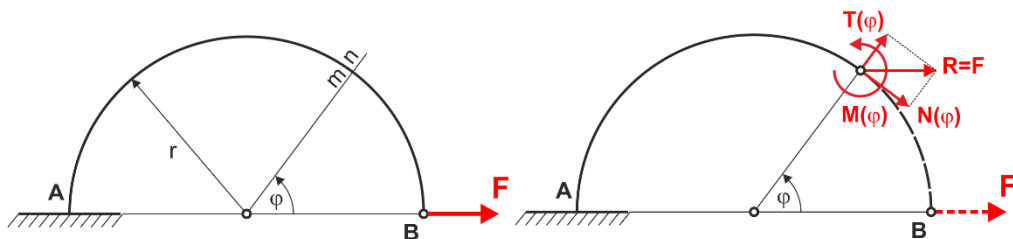
Obr. 8.9. Základná geometria slabozakriveného nosníka

V opačnom prípade hovoríme o silnozakrivených nosníkoch, pre ktoré treba odvodiť nové vzťahy pre priebeh napätí od ohybového momentu po výške prierezu a polohu neutrálnej osi. Riešením silnozakrivených nosníkov sa v tejto učebnici zaoberať nebudeme.

V ďalšom sa budeme zaoberať riešením rovinných prípadov slabozakrivených nosníkov, ktoré musia spĺňať tieto podmienky:

- os prúta je rovinná krivka,
- hlavná os zotrvačnosti priečného prierezu je kolmá na rovinu určenú osou prúta,
- zaťaženie pôsobí v rovine prúta.

Vedenie myšliených rezov pre určenie priebehov vnútorných veličín budeme riešiť v polárnych súradniciach s počiatkom v strede krivosti slabozakriveného nosníka. Z vnútorných veličín budú v priečnom reze nadobúdať nenulové hodnoty ohybový moment  $M(\varphi)$ , priečna sila  $T(\varphi)$  a osová sila  $N(\varphi)$ , ktorých kladná orientácia je zrejme z Obr. 8.10.

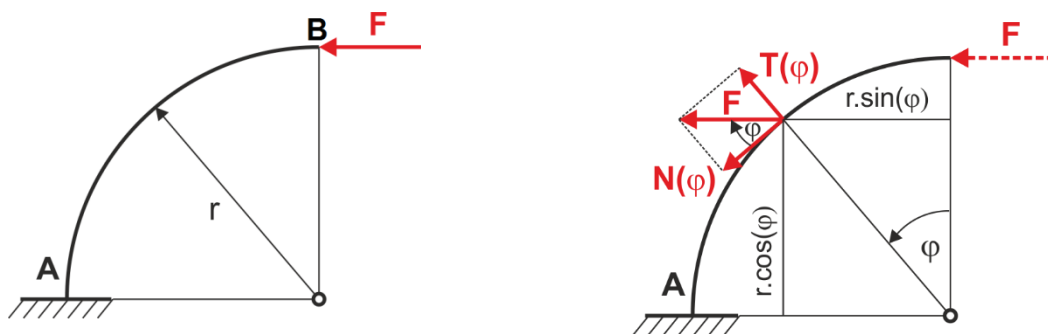


Obr. 8.10. Orientácia kladných vnútorných veličín v slabozakrivenom nosníku

Priebehy priečných a osových síl získame rozkladom vonkajších síl do smeru dotýčnice (osová sila) resp. kolmo na prierez (priečna sila) pri zachovaní dohodnutej znamienkovej konvencie. Pre priečnu silu možno podobne ako pri ohybe priamych nosníkov využiť Žuravského vetu v tvare

$$T(\varphi) = \pm \frac{dM_o(\varphi)}{r \cdot d\varphi}$$

**Príklad 2:** Vypočítajte a znázornite priebeh namáhania pozdĺž slabozakriveného nosníka na Obr. 8.11. Vypočítajte vodorovné posunutie voľného koncového bodu bodu B a vykonajte pevnostnú kontrolu pre medzikruhový prierez.



Obr. 8.11. Slabozakrivený nosník k príkladu 2

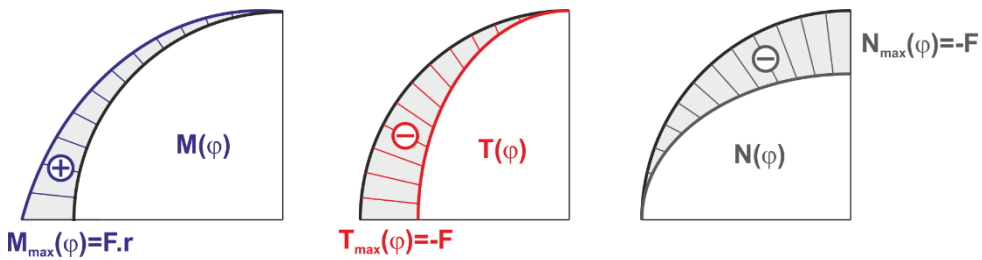
Myslený rez je potrebné vykonať kolmo na os nosníka. To je možné len v polárnych súradniciach s počiatkom v strede krivosti nosníka, aby sme mohli použiť definície vnútorných veličín. Zaťažujúca sila pôsobí v rovine slabozakriveného nosníka, preto vnútorné veličiny v priereze môžu byť len ohybový moment, priečna sila a osová sila:

$$\varphi \in (0, \pi/2):$$

$$M(\varphi) = F(r - r \cdot \cos \varphi)$$

$$T(\varphi) = -F \sin \varphi$$

$$N(\varphi) = -F \cos \varphi$$



Obr. 8.12. Grafické znázornenie priebehov namáhania slabo zakriveného nosníka

Deformáciu v ktoromkoľvek bode zakriveného nosníka môžeme určiť pomocou I. Castiglianovej vety. Do energie napätosti nosníka budeme uvažovať len energiu napätosti od ohybových momentov (vplyv pričných a osových síl na deformáciu nosníkov zanedbávame). Vodorovné posunutie v bode B bude:

$$u_B = \frac{\partial A_{Mo}}{\partial F} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} M(\varphi) \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} r d\varphi = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} F(r - r \cos \varphi)(r - r \cos \varphi) r d\varphi$$

Po úprave je vodorovné posunutie  $u_B = \frac{Fr^3}{EJ_z} \left( \frac{3}{4}\pi - 2 \right)$ .

Pevnostnú kontrolu je potrebné vykonať v dvoch nebezpečných prierezoch:

Vo votknutí: - pre krajné vlákno na ohyb:

$$\sigma_{Mo max} = \frac{M_{o max}}{W_o} = \frac{F.r}{\frac{\pi D^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]} \leq \sigma_{dov}$$

- pre stredné vlákno na šmyk:

$$\tau_{T max} = 2 \frac{T}{S} = 2 \frac{F.4}{\pi(D^2 - d^2)} \leq \frac{\sigma_{dov}}{\sqrt{3}}$$

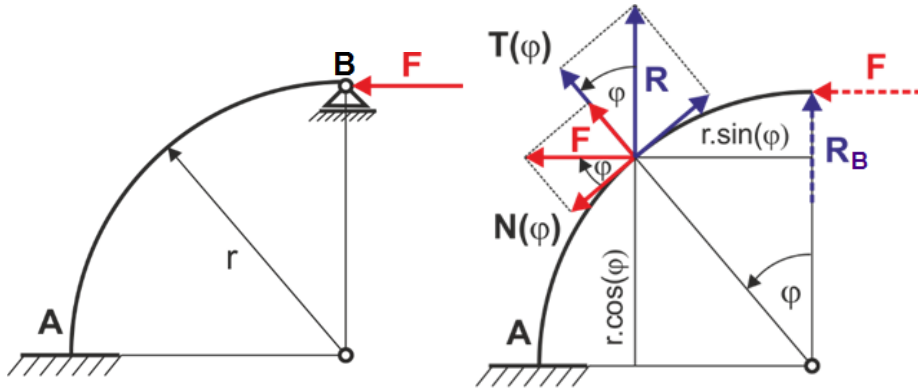
V priereze  $\varphi = 45^\circ$ : - pre krajné vlákno na kombináciu ohybového momentu a osovej sily:

$$\sigma_{max} = |\sigma_{Mo}| + |\sigma_N| = \frac{F.r.0,707}{W_o} + \frac{F.0,707}{S} \leq \sigma_{dov}$$

- pre stredné vlákno na kombináciu priečnej a osovej sily:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_N^2 + 3\tau_T^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{S} \cdot 0,707\right)^2 + 3\left(2\frac{F \cdot 0,707}{S}\right)^2} \leq \sigma_{dov}$$

**Príklad 3.** Vypočítajte a znázornite priebeh namáhania pozdĺž slabozakriveného nosníka na Obr. 8.13. Vypočítajte vodorovné posunutie bodu B.



Obr. 8.13. Slabozakrivený nosník k príkladu 3

Slabozakrivený nosník je staticky neurčitý – je potrebné vypočítať najprv neznámu reakciu v podpere B pomocou II. Castiglianovej vety:

$$\frac{\partial A_{Mo}}{\partial R_B} = 0$$

Priebeh namáhania vyšetříme v jednom myslenom reze:

$$\varphi \in (0, \pi/2):$$

$$M(\varphi) = F(r - r \cdot \cos \varphi) + R_B r \sin \varphi$$

$$T(\varphi) = -F \sin \varphi - R_B \cos \varphi$$

$$N(\varphi) = -F \cos \varphi + R_B \sin \varphi$$

Dosadením do II. Castiglianovej vety vypočítame staticky neurčitú reakciu:

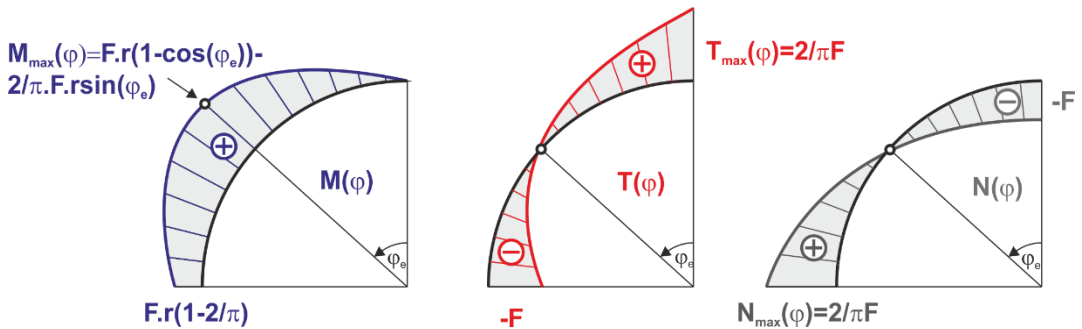
$$\frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} M_o(\varphi) \frac{\partial M_o(\varphi)}{\partial R_B} r d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} [F(r - r \cos \varphi) + R_B r \cdot \sin \varphi] r \cdot \sin \varphi \cdot r d\varphi = 0$$

Po integrácii a úprave dostávame neznámu reakciu v tvare

$$R_B = -\frac{2}{\pi} F$$

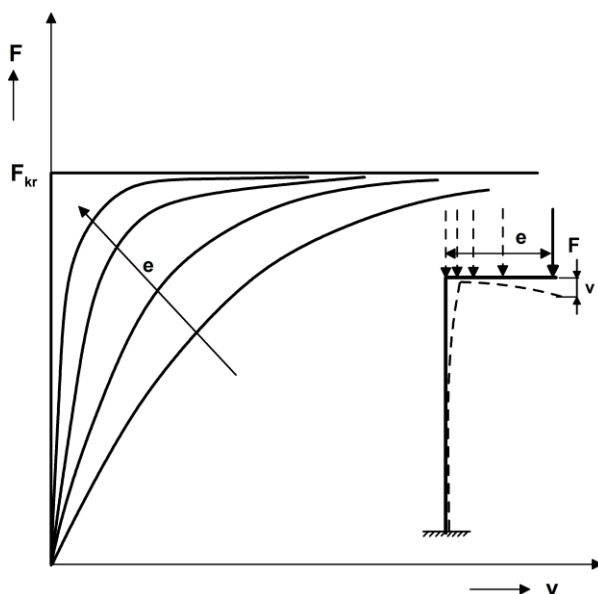
Reakcia má v skutočnosti opačný smer, ako sme predpokladali. Ďalej je potrebné graficky znázorniť priebehy vnútorných veličín (Obr. 8.14), vytipovať kritické prierezy a podobným postupom ako v minulom príklade vykonať pevnostnú kontrolu pre zvolený prierez.



Obr. 8.14. Grafické znázornenie priebehov namáhania

## 9. STRATA STABILITY

V prevádzke konštrukcií sa vyskytujú prípady, keď konštrukcia zlyhá nielen z dôvodu vyčerpania statickej únosnosti najviac namáhaného prvku, ale napr. preto, že nezachová svoj tvar. Takáto situácia nastáva najmä v prípade namáhania priamych prútov tlakom v osi prúta a nazýva sa stratou stability. Pre lepšie priblíženie sa dá povedať, že je to prípad náhlej zmeny namáhania tlakom na namáhanie ohybom, ako je to ukázané v opačnom poradí na Obr. 9.1.



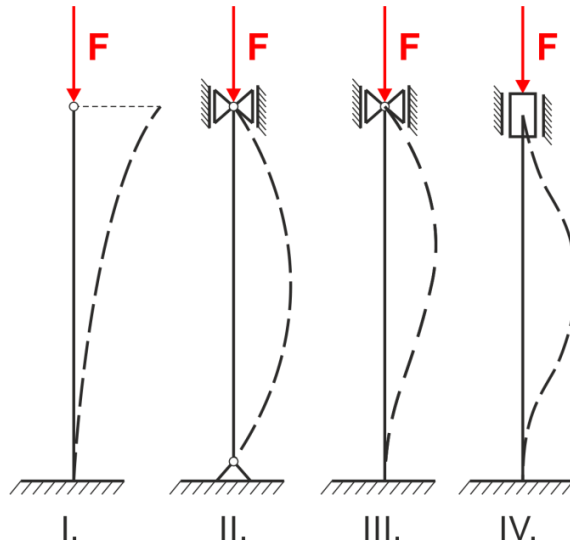
Obr. 9.1. Postupné znižovanie ramena ohybového momentu až po namáhanie na tlak a stratu stability pri dosiahnutí hodnoty  $F_{kr}$ .

Diagram znázorňuje závislosť medzi tlakovou silou  $F$  pôsobiace na ramene  $e$  na prút a prihybom  $v$  jeho koncového bodu. So znižujúcou sa veľkosťou excentricity  $e$  (t. j. ramena pôsobenia sily  $F$  vzhľadom na os prúta) sa znižuje prihyb koncového bodu v mieste pôsobiska sily  $F$  a závislosť sa vzpriamuje v počiatočných štádiách veľkosti sily  $F$ . Keď veľkosť  $e \rightarrow 0$ , tak veľkosť prihybu konca prúta je nulová až do okamihu dosiahnutia hodnoty  $F = F_{kr}$ , keď prihyb začne rásť bez ďalšieho zvyšovania zaťažujúcej sily – nastala strata stability.

Na stratu stability má vplyv viacero faktorov, napr. pomer dĺžky prúta voči prierezu, tvar prierezu, uloženie koncových prierezov prúta,... Z hľadiska uloženia koncových prierezov rozoznávame štyri základné prípady vzperu (straty stability) - Obr. 9.2.

Pri riešení kritických vzperných síl pre tieto základné prípady vzperu nebudeme uvažovať tiaž prútov. Budeme riešiť len ich ohybový stav v okamihu straty stability a s ohľadom na jednoduchosť riešenia budeme vhodne voľiť začiatky

myslených rezov. Budeme pritom využívať definíciu ohybového momentu v myslenom reze v kap. 2, t. j. ohybový moment v myslenom reze sa rovná súčtu všetkých vonkajších momentov sčítaných pozdĺž jednej strany mysleného rezu. Pozdĺž ktorej strany mysleného rezu budeme tento súčet vonkajších ohybových momentov robiť je vecou našej voľby – pochopiteľne ju budeme voliť s ohľadom na jednoduchosť riešenia.



Obr. 9.2. Základné prípady vzperu (straty stability).

### Odvozenie Eulerovej vzpernej sily pre I. prípad vzperu

Prvým prípadom vzperu (Obr. 9.3) označujeme prút votknutý na jednom konci, ktorý je na voľnom konci zaťažený tlakovou silou. Tlaková sila bude mať hodnotu práve  $F=F_{kr}$ , t. j. priamy prút zmenil svoju geometriu a začal byť namáhaný na ohyb – stratil stabilitu. Ohybový moment v okamihu straty stability v reze  $x$  je:

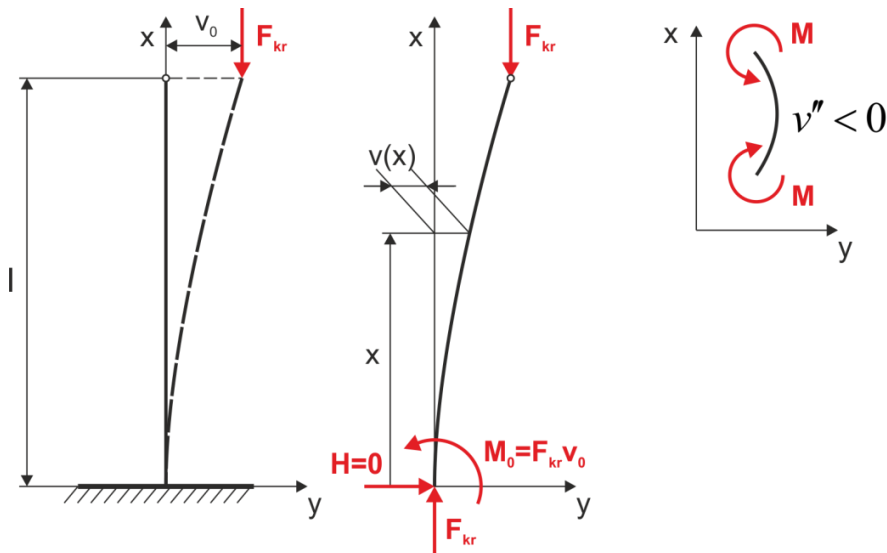
$$M_{(x)} = -F_{kr}(v_0 - v_{(x)}) \quad (9.1)$$

- kde  $v_0$  označuje priehyb voľného konca (zatiaľ neznámy)

Využitím rovnice priehybovej čiary v tvare  $v''_{(x)} = -\frac{M_{(x)}}{EJ}$  dostávame rovnicu

$$v''_{(x)} = \frac{F_{kr}(v_0 - v_{(x)})}{EJ} \quad (9.2)$$

Zlomok  $\frac{F_{kr}}{EJ}$ , ktorý je pre každý prút konštantou, označíme s ohľadom na ďalšie riešenie ako  $k^2$ . Rovnicu (9.2) potom upravíme do tvaru:



Obr. 9.3. Riešenie prvého prípadu vzperu

$$v''_{(x)} + k^2 v_{(x)} = k^2 v_0 \quad (9.3)$$

Pre túto diferenciálnu rovnicu je v matematike známe riešenie v tvare

$$v_{(x)} = A \cos kx + B \sin kx + v_0, \quad (9.4)$$

kde  $A, B$  sú integračné konštanty a  $v_0$  je tzv. partikulárne riešenie.

Tieto tri neznáme vypočítame z okrajových podmienok pre priehyb v okamihu straty stability (rov.9.4):

1.  $x = 0: v_{(x)} = 0$
2.  $x = 0: v'_{(x)} = 0$
3.  $x = l: v_{(x)} = v_0$

Z prvej podmienky je  $A = -v_0$ .

Z druhej podmienky (t.j.  $0 = v'_{(0)} = -A.k.\sin k.0 + B.k.\cos k.0$ ) je  $B = 0$ . Z tretej okrajovej podmienky dostávame rovnicu

$$v_0 = -v_0 \cos kl + v_0, \quad \text{resp.} \quad \cos kl = 0$$

To znamená, že  $kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

Po dosadení za  $k = \sqrt{\frac{F_{kr}}{EJ}}$  dostaneme



$$\sqrt{\frac{F_{kr}}{EJ}} l = \frac{\pi}{2} (2n+1) \quad \Rightarrow \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} (2n+1)^2$$

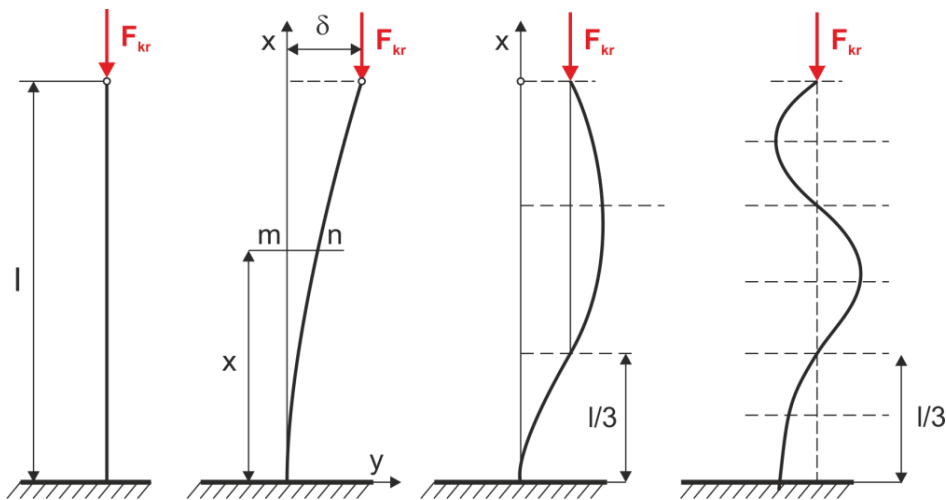
Sila spôsobujúca stratu stability môže nadobudnúť nekonečne veľa hodnôt, pričom každá hodnota kritickej vzpernej sily je spojená s iným tvarom straty stability. V praxi je dôležitá len prvá hodnota tejto sily, pri ktorej nastane strata stability tak, ako je na Obr. 9.4, t.j.

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

Hodnota kritickej vzpernej sily pre prvý prípad vzperu je teda

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$$

(9.5)



Obr. 9.4. „Vlastné tvary“ straty stability pri náraste  $F_{kr}$

## Odvodenie Eulerovej vzpernej sily pre II. prípad vzperu

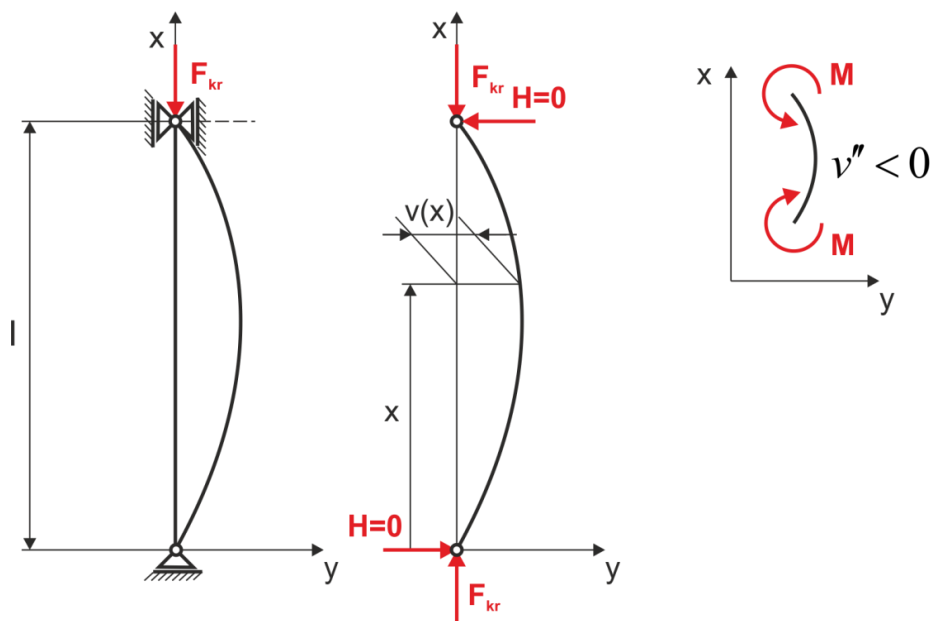
Druhým prípadom vzperu (Obr. 9.5) označujeme prút kĺbovo uložený na oboch koncoch, pričom jeden kĺb je posuvný a druhý pevný. Tlaková sila bude mať hodnotu práve  $F = F_{kr}$ , t. j. priamy prút zmenil svoju geometriu a začal byť namáhaný na ohyb – stratil stabilitu. Pretože v posuvnom kĺbe nevznikne žiadna väzbová reakcia (ako to vyplýva z podmienok rovnováhy), ohybový moment v okamihu straty stability v reze  $x$  je:

$$M_{(x)} = F_{kr}v_{(x)} \quad (9.6)$$

Využitím rovnice priehybovej čiary v tvare  $v''_{(x)} = -\frac{M_{(x)}}{EJ}$  dostávame rovnicu

$$v''_{(x)} = -\frac{F_{kr}v_{(x)}}{EJ} \quad \Rightarrow \quad v''_{(x)} + k^2v_{(x)} = 0 \quad (9.7)$$

$$\text{kde } k^2 = \frac{F_{kr}}{EJ}$$



Obr. 9.5. Riešenie druhého prípadu vzperu

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je, podobne ako v predošlom prípade v tvare

$$v_{(x)} = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx \quad , \quad (9.8)$$

kde  $A, B$  sú integračné konštanty a partikulárne riešenie  $v_0 = 0$  vzhľadom na nulovú pravú stranu diferenciálnej rovnice (9.7).

Neznáme konštanty  $A, B$  vypočítame z okrajových podmienok pre priehyb v okamihu straty stability:

1.  $x = 0: v(x) = 0$
2.  $x = l: v(x) = 0$

Z prvej podmienky je  $A = 0$ , z druhej podmienky  $B \cdot \sin kl = 0$

Konštantu  $B$  sa nemôže rovnať 0, pretože by priehyb pozdĺž celého prúta bol nulový a prút by tak nebol po strate stability. Preto musí platiť

$$\sin kl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kl = 0, \pi, \dots, n\pi$$

Po dosadení za  $k = \sqrt{\frac{F_{kr}}{EJ}}$  dostaneme

$$\sqrt{\frac{F_{kr}}{EJ}} l = n\pi \quad \Rightarrow \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} n^2$$

Zo všetkých hodnôt kritickej vzpernej sily vyplývajúcich z tohoto riešenia je v praxi zaujímavá len sila pre  $n = 1$ , ktorá zodpovedá tvaru prúta po strate stability na Obr. 9.5.

Hodnota kritickej vzpernej sily pre druhý prípad vzperu preto je

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

(9.9)

### Odvodenie Eulerovej vzpernej sily pre III. prípad vzperu

Tretím prípadom vzperu (Obr. 9.6) označujeme prút na jednom konci votknutý, na druhom konci uložený v posuvnom kĺbe a zaťažovaný na tomto konci tlakovou silou. Riešenie tohto prípadu vzperu vykonáme opäť v okamihu, keď tlaková sila bude mať hodnotu práve  $F = F_{kr}$ , t.j. priamy prút zmenil svoju geometriu a začal byť namáhaný na ohyb – stratil stabilitu. V tomto okamihu vzniknú vo väzbách reakcie tak, ako sú naznačené v Obr. 9.6 – vo votknutí

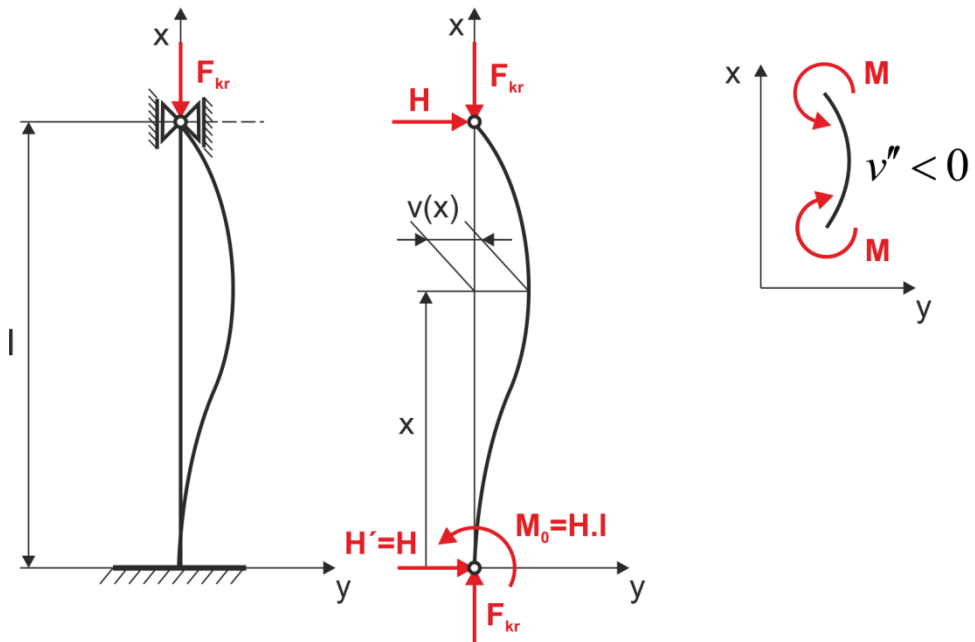
pôsobí moment **M**, ktorý vyvolá na kĺb vedený posuvným uložením pôsobenie horizontálnej sily **H** (staticky neurčitá reakcia), ktorá z dôvodu rovnováhy pôsobí aj na votknutý koniec prúta. Ohybový moment v okamihu straty stability v reze  $x$  je:

$$M_{(x)} = F_{kr}v_{(x)} - H(l-x) \quad (9.10)$$

Využitím rovnice priehybovej čiary v tvare  $v''_{(x)} = -\frac{M_{(x)}}{EJ}$  dostávame rovnicu

$$v''_{(x)} = -\frac{F_{kr}v_{(x)}}{EJ} + \frac{H}{EJ}(l-x) \quad \Rightarrow \quad v''_{(x)} + k^2v_{(x)} = k^2\frac{H}{F_{kr}}(l-x) \quad (9.11)$$

$$\text{kde } k^2 = \frac{F_{kr}}{EJ}$$



Obr. 9.6. Riešenie tretieho prípadu vzperu

Rovnica (9.11) je rovnaký typ diferenciálnej rovnice ako v predošlých dvoch prípadoch s odlišnou pravou stranou. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je preto v tvare

$$v_{(x)} = A.\cos kx + B.\sin kx + \frac{H}{F_{kr}}(l-x)$$

kde  $A, B$  sú integračné konštanty a výraz  $\frac{H}{F_{kr}}(l-x)$  je partikulárne riešenie vzhľadom na pravú stranu diferenciálnej rovnice (9.11).

Neznáme  $A, B$  a  $H$  vypočítame z okrajových podmienok pre priehyb v okamihu straty stability rov. (9.10):

1.  $x = 0: v_{(x)} = 0$
2.  $x = 0: v'_{(x)} = 0$
3.  $x = l: v_{(x)} = 0$

Z prvej podmienky  $A = -\frac{H}{F_{kr}}l$

Z druhej podmienky pre deriváciu priehybu

$$v'_{(x)} = -A.k.\sin kx + B.k.\cos kx - \frac{H}{F_{kr}} \quad \text{dostávame}$$

$$B = \frac{H}{k.F_{kr}}$$

Z tretej okrajovej podmienky vychádza rovnica

$$0 = -\frac{H}{F_{kr}}l.\cos kl + \frac{H}{l.F_{kr}}\sin kl \quad \text{t.j.} \quad \frac{H}{F_{kr}}\left(\frac{\sin kl}{k} - l.\cos kl\right) = 0$$

Riešenie prebieha v okamihu straty stability, preto nemôže byť  $H = 0$  ale musí byť člen v zátvorke ako druhý činiteľ násobenia rovný nule, t. j.

$$\frac{\sin kl}{k} - l.\cos kl = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}kl = kl$$

Túto rovnicu môžeme riešiť iteračne. Koreň rovnice je vidieť z jej grafického riešenia  $y = \operatorname{tg}kl$  a  $y = kl$  na Obr. 9.7:

$$k.l = 4,493$$

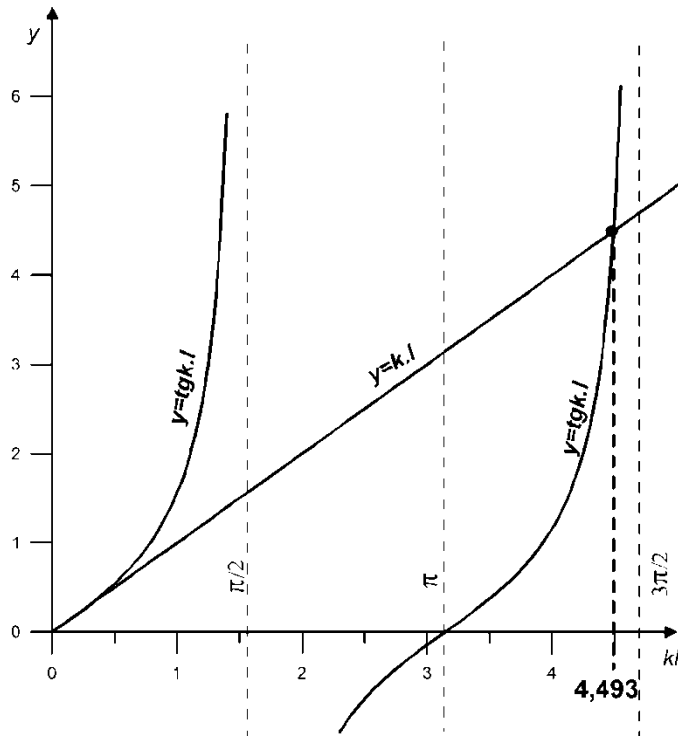
t. j. po dosadení za konštantu  $k$  dostávame riešenie v tvare

$$\sqrt{\frac{F_{kr}}{EJ}}l = 4,493 \quad \Rightarrow \quad F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,6996.l)^2}$$

Kritická vzperná sila pre III.případ vzperu približne je

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,71)^2}$$

(9.12)



Obr. 9.7. Grafické riešenie kritickej vzpernej sily z rovnice III. prípadu vzperu

### Odvozenie Eulerovej vzpernej sily pre IV. prípad vzperu

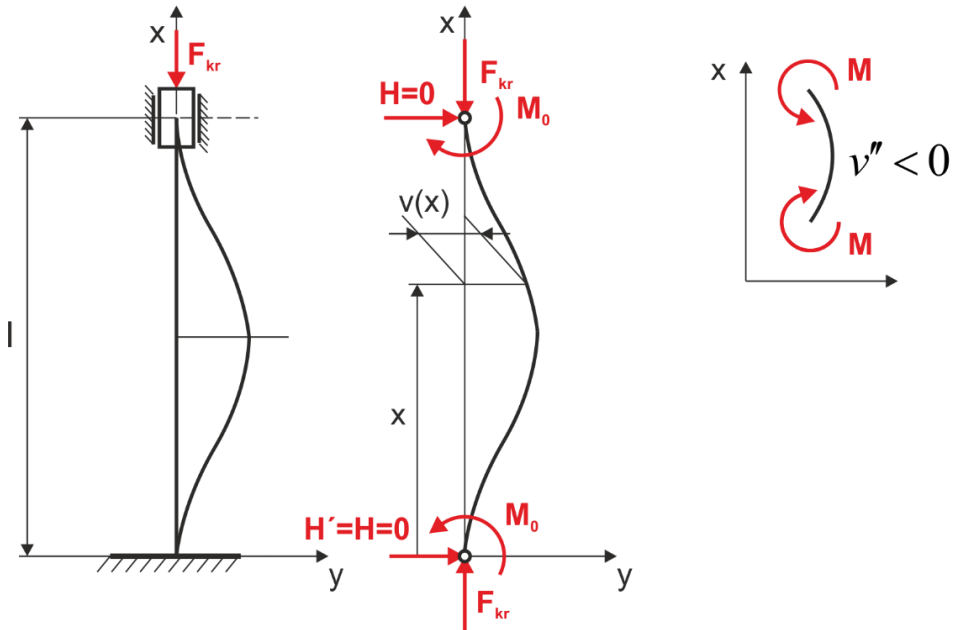
Štvrtým prípadom vzperu (Obr. 9.8) označujeme prút na obidvoch koncoch votknutý, pričom jedno votknutie je posuvné a na tomto konci pôsobí tlaková sila. Riešenie tohto prípadu vzperu vykonáme opäť v okamihu, keď tlaková sila bude mať hodnotu práve  $F = F_{kr}$ , t. j. priamy prút zmenil svoju geometriu a začal byť namáhaný na ohyb – stratil stabilitu. V tomto okamihu vzniknú vo väzbách reakcie tak, ako sú naznačené v Obr. 9.8 – vo votknutiach pôsobia momenty  $M$  (horizontálne reakcie sú z dôvodu rovnováhy nulové). Ohybový moment v okamihu straty stability v reze  $x$  je:

$$M_{(x)} = F_{kr}v_{(x)} - M \quad (9.13)$$

Využitím rovnice priehybovej čiary v tvare  $v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$  dostávame rovnicu

$$v''(x) = -\frac{F_{kr}v(x)}{EJ} + \frac{M}{EJ} \Rightarrow v''(x) + k^2v(x) = k^2\frac{M}{F_{kr}} \quad (9.14)$$

$$\text{kde } k^2 = \frac{F_{kr}}{EJ}$$



Obr. 9.8. Riešenie štvrtého prípadu vzperu

Rovnica (9.14) je opäť rovnaký typ diferenciálnej rovnice ako v predošlých prípadoch vzperu s odlišnou pravou stranou. Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je preto v tvare

$$v(x) = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx + \frac{M}{F_{kr}}$$

kde  $A, B$  sú integračné konštanty a výraz  $\frac{M}{F_{kr}}$  je partikulárne riešenie vzhľadom na pravú stranu diferenciálnej rovnice (9.14).

Neznáme  $A, B$  a  $M$  (staticky neurčitá reakcia) vypočítame z okrajových podmienok pre priehyb v okamihu straty stability (rov. 9.14):

- $x = 0: v(x) = 0$

$$2. \quad x = 0: v'_{(x)} = 0$$

$$3. \quad x = l: v_{(x)} = 0 \quad (\text{rovnako môžeme použiť podmienku } x = l: v'_{(x)} = 0 \\ \text{alebo } x = l/2: v'_{(x)} = 0)$$

$$\text{Z prvej podmienky } A = -\frac{M}{F_{kr}}$$

Z druhej podmienky pre deriváciu priehybu

$$v'_{(x)} = -A.k.\sin kx + B.k.\cos kx \quad \text{dostávame}$$

$$B.k = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Z tretej okrajovej podmienky vychádza rovnica

$$0 = -\frac{M}{F_{kr}}\cos kl + \frac{M}{F_{kr}} \quad \text{t.j.} \quad \frac{M}{F_{kr}}(1 - \cos kl) = 0$$

Riešenie prebieha v okamihu straty stability, preto nemôže byť  $M = 0$  ale musí byť člen v zátvorke ako druhý činiteľ násobenia rovný nule, t. j.

$$\cos kl = 1 \quad \Leftrightarrow \quad kl = 2\pi n$$

Po dosadení za konštantu  $k$  dostávame riešenie pre prvý nenulový koreň ( $n = 1$ ) v tvare kritickej vzpernej sily pre IV. prípad vzperu

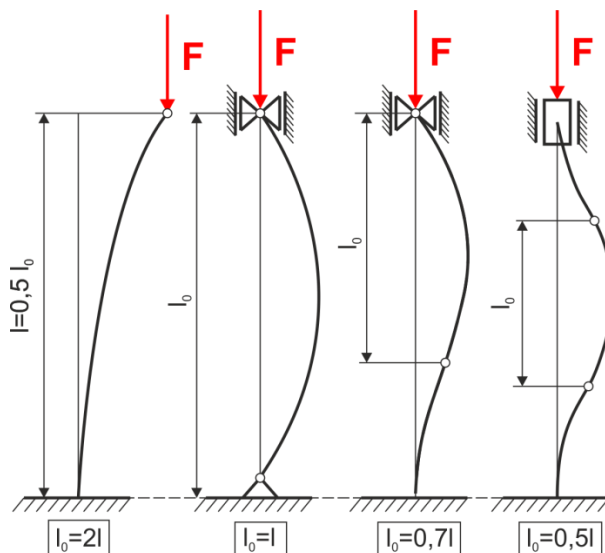
$$\boxed{F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}} \quad (9.15)$$

Vzťahy pre kritickú vzpernú silu (9.5), (9.9), (9.12), (9.15) sa líšia len konštantou v menovateli. Tieto vzťahy možno zovšeobecniť do vzťahu pre Eulerovu kritickú vzpernú silu v tvare

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_0^2} \quad (9.16)$$

kde veličina v menovateli  $l_0$  je tzv. redukovaná vzperná dĺžka, ktorá predstavuje vzpernú dĺžku prúta redukovanú na II. prípad vzperu. Redukované vzperné dĺžky pre štyri základné prípady vzperu sú na Obr. 9.9:





Obr. 9.9. Redukované vzperné dĺžky pre základné prípady vzperu.

Redukovaná vzperná dĺžka je teda len tá časť prúta, ktorá má po vybočení rovnaký tvar ako prút kĺbovo upevnený na oboch koncoch. Zo vzťahu 9.16 je vidieť, že kritická vzperná sila závisí od:

- upevnení koncových prierezov,
- tuhosti prierezu,
- modulu pružnosti materiálu.

Nezávisí od pevnosti materiálu, t. j. použitie legovaných zušľachtených ocelí oproti obyčajnej konštrukčnej oceli nezvyší vzpernú stabilitu prúta. Vo vzťahu (9.16) je použitý  $J_{\min}$  – t. j. prút vybočí pri strate stability v smere najmenšieho kvadratického momentu prierezu. Pri namáhaní v tlaku s hrozbou straty stability je najúčelnejší symetrický profil, ktorý má k ľubovoľnej osi rovnaký kvadratický moment plochy (kruh, štvorec,...).

Pri riešení okrajových podmienok pre rovnice (9.4), (9.11) a (9.14) sme neurčili hodnoty väzbových reakcií **H** a **M** resp. priehybu  $v_0$ . Riešenie poslednej okrajovej podmienky vždy viedlo k určeniu hodnoty kritickej vzpernej sily, pričom spomínané veličiny sa vykrátily. Vyplýva to z matematického riešenia sústavy lineárnych homogénnych rovníc. Z hľadiska podstaty problému vzpernej stability je tiež zrejmé, že kritická vzperná sila nemôže závisieť od veľkosti priehybu (vybočenia) voľného konca, resp. od veľkosti reakcií vyvolaných stratou stability a celkový postup riešenia je teda nezávislý od ich veľkosti.

Ďalej je potrebné si uvedomiť, že normálové napätie v okamihu straty stability je rovné

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{KR}}{S}$$

a po dosadení kritickéj vzpernej sily z rovnice (9.16) sa rovná

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{S \cdot l_0^2}$$

Ak podiel kvadratického momentu zotrvačnosti prierezu a jeho plochy označíme ako štvorec polomeru zotrvačnosti, t. j.  $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{S}$ , môžeme vzťah pre napätie upraviť do tvaru

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_0}{i_{min}}\right)^2} \Rightarrow \sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (9.17)$$

v ktorom pomer  $\frac{l_0}{i_{min}} = \lambda$  nazývame štíhlostný pomer. Eulerov vzťah pre kritickú vzpernú silu bol odvodený s použitím približnej diferenciálnej rovnice priehybovej čiary, ktorá bola odvodená za predpokladu platnosti Hookeovho zákona. Odvodené vzťahy (9.16) a (9.17) možno použiť len do takej hodnoty  $\lambda = \lambda_{min}$ , dokedy napätie nepresiahne medzu úmernosti materiálu (hranica použitia Hookovho zákona), t. j.

$$\sigma_{kr} = \sigma_u = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{min}^2}$$

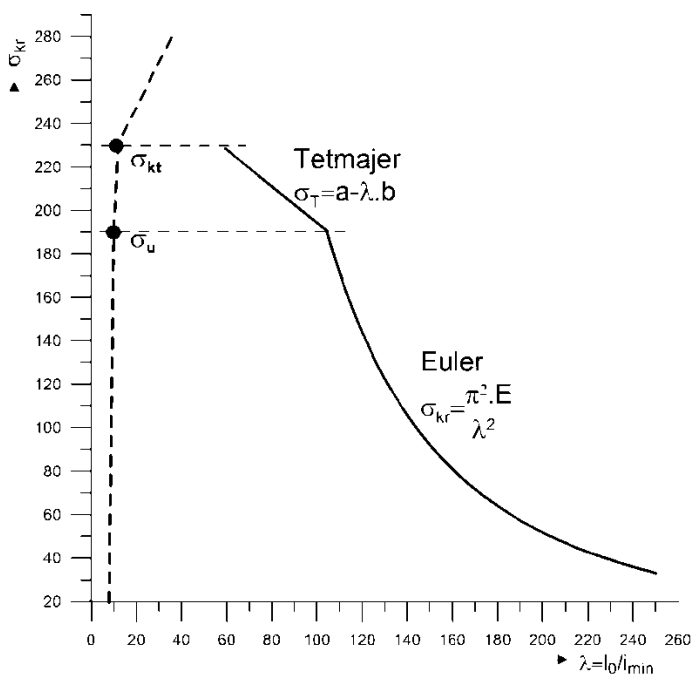
Z tejto podmienky vychádza hodnota minimálneho štíhlostného pomeru

$$\lambda_{min} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} \quad (9.18)$$

Pre hodnotu medze úmernosti 190MPa (pre základnú konštrukčnú oceľ St37) je minimálna hodnota  $\lambda_{min} \cong 105$ . Pri nižších hodnotách štíhlostného pomeru (napr. menšia dĺžka prúta) by napätie pri strate stability presahovalo medzu úmernosti a nebola by splnená základná pevnostná podmienka v tlaku  $\sigma_{max} \leq \sigma_{dov}$ .

V takýchto prípadoch sa dimenzovanie prútov uskutočňuje podľa rôznych empirických vzťahov. U nás je najčastejšie používaná metóda lineárna redukcia modulu pružnosti podľa Tetmajera (Obr. 9.10)

$$\sigma_T = a - \lambda.b \quad (9.19)$$



Obr. 9.10 Oblasti riešenia vzpernej stability štíhlych prútov

kde konštanty  $a$ ,  $b$  je potrebné pre rôzne materiály experimentálne určiť. V prípade ich nedostupnosti sa kritické napätie v pružne-plastickej oblasti podľa Tetmajera vyjadří rovnicou

$$\sigma_T = \sigma_M - \frac{\sigma_M - \sigma_u}{\lambda_{min}} \lambda$$

Pre húževnaté materiály sa  $\sigma_M = \sigma_{kt}$  a pre krehké  $\sigma_M = \sigma_{pt}$ . V technickej praxi sú však prúty len zriedkavo namáhané v pružne-plastickej oblasti.

### **Autotest**

1. Vysvetlite význam členov v rovnici pre Eulerovu vzpernú silu a porovnajte štyri základné prípady vzperu.
2. Vypočítajte kritické vzperné sily pre ocelový prút medzikruhového prierezu rozmerov –  $D = 50$ ,  $d = 40$  – dĺžky 2m pre každý zo základných prípadov vzperu.
3. Pre prút v príklade 2 vypočítajte minimálnu dĺžku, pre ktorú je potrebné kontrolovať stratu stability.

### *Riešenie:*

1. Rov. (9.16), Obr. 9.8.

2. I.- 23,4 kN , II - .93,7 kN , III. – 191,2 kN , IV. – 374,8 kN

3.  $l_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_z}{S \cdot \sigma_{dov}}}$  I. – 0,814 m , II. 1,628 m , III. 2,32 m , IV. – 3,25 m

## VEDECKÉ OSOBNOSTI MECHANIKY TUHÝCH TELIES

**Robert Hooke** (28. júl 1635 až 3. marec 1703) člen a predseda kráľovskej



spoločnosti bol anglický filozof, prírodovedec, vynálezca a architekt, označovaný aj ako „Anglický Leonardo“. Podľa prania svojho otca sa mal stať kňazom, potom hodinárom. Od roku 1653 študoval v Oxforde. Študoval najskôr astronómiu, čiastočne fyziku, rozumel aj chémii, trochu sa venoval aj architektúre (postavil napr. verejnú nemocnicu). V roku 1662 prijal miesto plateného kurátora experimentov v Royal Society a na jej zasadaniach predvádzal rôzne pokusy. Z týchto pokusov vychádzal pri napísaní diela *Micrographia* (1665), kde podrobne opísal konštrukciu mikroskopu a ako

prílohu pridal nákresy vlastných mikroskopických pozorovaní fosílií. Od roku 1665 pôsobil ako profesor geometrie na londýnskej Greshaw College. Od roku 1678 bol tajomníkom Royal Society. Tu na seba upozornil Roberta Boyla a zdokonalením jeho vývevy (navrhli spolu teplotu topenia ľadu  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a bod varu vody  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  ako základné body teplotnej stupnice). Postavil jeden z prvých ďalekohľadov, venoval sa pozorovaniu fosílií, ďalej skúmal fenomén lomu, odvodiť vlnovú teóriu svetla a ako prvý sformuloval fakt, že veci sa pri zahrievaní rozpínajú a že vzduch sa skladá z malých častíc oddelených na pomerne veľké vzdialenosti. Bol blízko odvodeniu gravitačného zákona a vysvetleniu pohybu planét týmto zákonom, nápad, ktorý bol neskôr rozvinutý Newtonom. Hooke mal rád hlavolamy a na záver prednášky v roku 1676 uviedol výsledky svojich pozorovaní v tvare: CEIINOSSSTTUV. Boli to podľa abecedy zoradené písmená vety: UT TENSIO SIC VIS, čo v preklade znamená: Aká je sila, taká je odozva – čo je prvá doložená formulácia zákona elastického správania sa materiálu. Thomas Young pomenoval tento zákon Hookov.

**Thomas Young** (13. jún 1773 až 10. máj 1829)



Anglický vedec všestranných schopností. Vynikal ako fyzik, lekár a egyptológ. Roku 1792 sa zapísal na štúdium medicíny v Londýne. Od r. 1794, keď bol zvolený za člena Kráľovskej spoločnosti (Royal Society), pokračoval v štúdiu v Edinburgu a o rok neskôr v Göttingene, kde získal doktorský titul z fyziky. V roku 1797 prešiel na štúdium v Cambridge a vďaka dedičstvu po strýkovi sa stal finančne nezávislý. Roku 1801 bol Young vymenovaný za profesora „prírodnej filozofie“ na Royal Institution. Väčšinu svojho života pracoval ako lekár (od r. 1799); je však známy predovšetkým

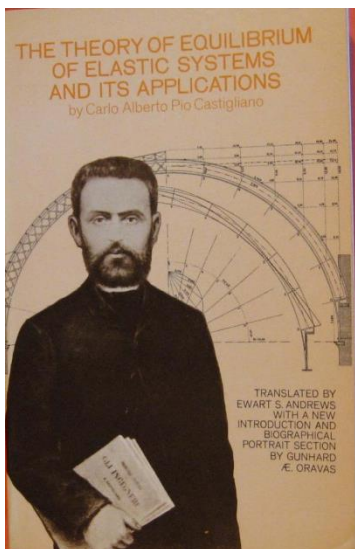
svojou definíciou modulu pružnosti a tiež vďaka pokusu s tzv. Youngovými štrbinami, pomocou ktorého potvrdil a vysvetlil jav interferencie svetla (z toho usúdil, že svetlo má povahu vlnenia) a ďalej prispel k pokroku egyptológie účasťou na interpretáciách textov Rosettskej dosky. Ako mladý opísal charakteristiku pružnosti, ktorá sa stala známa ako Youngov modul, označený ako  $E$  v roku 1807 a ďalej ju opísal vo svojom cykle prednášok o „prírodnej filozofii a umení mechaniky“. Treba poznamenať, že prvé použitie pojmu elastického modulu sa nachádza v experimentoch Giordana Riccatiho v r. 1782 a podobná myšlienka sa dá nájsť už v prácach Eulera publikovaných v roku 1727.

**Siméon-Denis Poisson** (21. jún 1781 až 25. apríl 1840) bol francúzsky fyzik a matematik. Na polytechnickej škole bol žiakom Lagrangea a Laplacea. Stal sa profesorom mechaniky na parížskej Sorbone v roku 1809, členom Francúzskej akadémie vied (1812) a tiež Petrohradskej akadémie vied (1826). Je považovaný za jedného zo zakladateľov matematickej fyziky. Aplikoval matematickú teóriu potenciálov na riešenie otázok elektrostatiky (1811) a magnetizmu (1824). Poisson je spoluzakladateľ teórie potenciálu, ďalej do oblasti jeho záujmu patrí: matematická analýza (Poissonova rovnica), variačný počet, teória pravdepodobnosti (Poissonovo rozdelenie), hydromechanika.



Významne prispel aj do oblasti teórie parciálnych diferenciálnych rovníc, teórie pružnosti a nebeskej mechaniky. V roku 1829 na jednej zo svojich prednášok zaviedol koeficient, ktorý je dnes známy ako Poissonovo číslo.

**Carlo Alberto Castigliano** (8. november 1847 až 25. október 1884) bol taliansky matematik a fyzik známy Castiglianovou metódou na určenie posunov v lineárnom elastickom telese založený na parciálnych deriváciách deformačnej energie. Po nástupe na inžinierske štúdium na univerzite v Turíne urobil za jeden rok skúšky trojročného štúdia. Po štyroch rokoch sa presťahoval na sever a stal sa študentom Wilkes College. Po troch rokoch štúdia napísal v roku 1873 dizertačnú prácu s názvom „Intorno ai Sistemi elastici“, pre ktorú je slávny. V dizertačnej práci sa objavuje veta, ktorá je po ňom pomenovaná ako Castiglianova: „... parciálna derivácia deformačnej energie, uvažovaná ako funkcia pôsobiacich síl na lineárne elastické teleso, podľa



jednej z týchto síl sa rovná posunutiu v smere sily v bode jej pôsobenia." Po absolvovaní Wilkes College, Castigliano bol zamestnaný v severotalianskych železniciach, kde viedol úrad zodpovedný za umelecké diela, údržbu a servis. Pôsobil tu až do svojej smrti – zomrel na zápal pľúc vo veku 37 rokov.

**Adhémár Jean Claude Barré de Saint-Venant** (23. august 1797 až 6. január



1886) francúzsky matematik a vedec, ktorý prispel hlavne v mechanike, pružnosti (analýza napätí v okolí vrubov, matematická teória pružnosti, krútenie nekruhových prierezov), hydrostatike a hydrodynamike. V roku 1816 promoval na École Polytechnique v Paríži a ďalších 27 rokov pracoval ako inžinier, spočiatku s vášňou pre chémiu, potom ako učiteľ matematiky na École des Ponts et Chaussées (Národná škola mostov a ciest). V roku 1843 vydal správne odvodenie Navierovej–Stokesovej rovnice pre viskózný tok a ako prvý správne určil koeficient viskozity kvapaliny a jeho úlohu v gradiente rýchlostí toku – napriek tomu

nenesie jeho meno. V roku 1850 Saint-Venant odvodil riešenie pre krútenie nekruhových nosníkov (1855 „Memoire sur la Torsion des Prismes“), pokračoval v Navierovej práci na ohýbaní nosníkov, publikovanej v roku 1864. V roku 1871 odvodil rovnice pre nestacionárne prúdenie v otvorených korytách. Preslávil sa najmä Saint-Venantovým princípom

"... Rozdiel medzi účinkami dvoch rôznych, ale staticky ekvivalentných zaťažení sa stáva veľmi malý v dostatočne veľkej vzdialenosti od zaťaženia."

**Rudolf Brecht**, (17. apríl 1842 až 18. máj 1900) nemecký strojní inžinier



a matematik, študoval v Karlsruhe a Zürichu. Pracoval najprv v Berlíne a potom v Anglicku pracoval vo výrobe lokomotív v sektore stavebných žeriavov. V roku 1867 sa vrátil do Nemecka a nastúpil do spoločnosti Stuckenholtz AG, jednej z prvých fabriek na výrobu žeriavov. V roku 1876 sa Brecht stal jej jediným vlastníkom a priniesol v roku 1887 prvý elektricky poháňaný mostový žeriav na trhu. V roku 1896, to bolo v podstate krátko pred smrťou, Brecht vydal vo VDI-Journal svoje vzťahy pre krútenie tenkostenných profilov a preniesol svoju firmu na dlhoročného

zamestnanca Wolfganga Reutera, ktorý sa neskôr stal zakladateľom strojárskej firmy DEMAG AG.

**Dimitrij Ivanovič Žuravskij** (17. december 1821 – 18. november 1891) ruský



vedec a stavebný inžinier. Navštevoval od 1838 Ústav inžinierstva ciest a komunikácií v Petrohrade. Inštitút, založený v roku 1809 francúzskymi inžiniermi z École Polytechnique a École nationale des Ponts et chaussées z Paríža, vrátane Betancourta (ktorý bol prvý riaditeľ). V čase Žuravského štúdií prednášal Michail Ostrogradskij ako profesor matematiky. Promoval v roku 1842. Žuravskij sa podieľal na výskume a vývoji konštrukcií železničnej trati z Petrohradu do Moskvy , ktorého stavba začala v tom istom roku – v projekte bola výstavba 278 stavieb, vrátane 184 mostov a 19 nadjazdov. Špecificky navrhnutý most cez rieku Verebija (dĺžka 60 m, výška od povrchu vody 56 m) s drevenými trámami zloženými do veľkej výšky.

Vymyslel metódu stanovenia sily potrebnej k preklzu medzi pozdĺžnymi kovovými vláknami na drevených trámoch. Výsledky jeho práce používal aj Saint Venant.

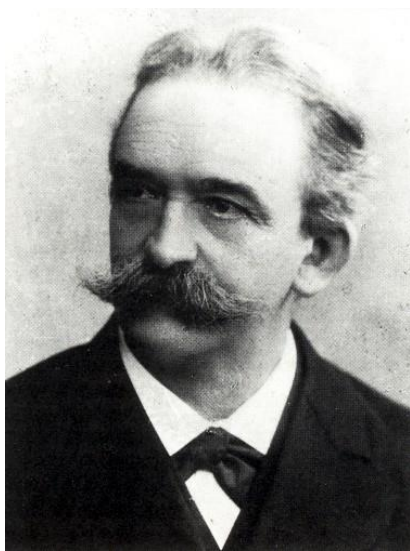
**Titus Maxmilián Huber** (4. január 1872 až 9. december 1950) bol poľský vedec,



strojný inžinier. Absolvent vysokej školy v Ľvove v roku 1895. Ako významný inžinier, bol menovaný asistentom na katedre výstavby ciest a tunelov na svojej alma mater. Od roku 1908 bol profesor na Ľvovskej polytechnike. Od roku 1928 prešiel na Technickú univerzitu do Varšavy, kde pôsobil ako vedúci katedry mechaniky, po 2. svetovej vojne pomáhal založiť Technickú univerzitu v Gdaňsku, od r. 1949 pôsobil v Krakove. Riadil teoretický výskum v oblasti klasickej mechaniky a pevnosti materiálov. V roku 1904 vytvoril hypotézu pevnosti, ktorá je doteraz jedným zo základných modelov vo všetkých výpočtoch pevnosti.



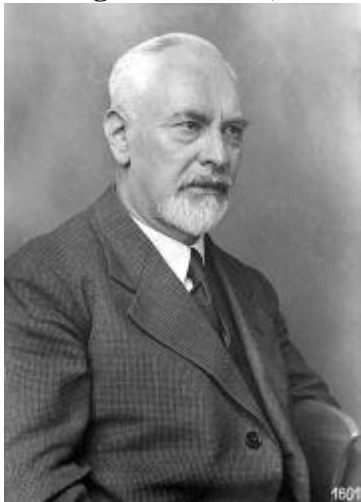
**Christian Otto Mohr** (8. október 1835 až 2. október 1918) bol nemecký stavebný



inžinier, jeden z najuznávanejších inžinierov 19. storočia. Vo veku 16 rokov navštevoval polytechniku v Hannoveri. V roku 1867 sa stal profesorom mechaniky na polytechnike v Stuttgarte a v roku 1873 na polytechnike v Drážďanoch. Väčšinu svojho pracovného života (od r. 1855) strávil v železničnom staviteľstve, projektoval niekoľko slávnych mostov a bol jedným z priekopníkov používania oceľových väzníkov. Mohr publikoval rad výskumných prác z teórie konštrukcií a pevnosti materiálov, bol nadšenec pre grafické nástroje a v roku 1882 vyvinul na základe Culmanových návrhov grafickú metódu na analýzu napätí v troch smeroch známu ako Mohrova kružnica a použil ju na podporu kritéria pevnosti

materiálu založenej na šmykových napätiach. Je tiež autor Maxwellovej-Mohrovej metódy na analýzu staticky neurčitých nosníkov (výpočet reakcií v uzloch a priehybov nosníkov).

**Ludwig Prandtl** (4. február 1875 až 15. august 1953) bol nemecký vedec,



priekopník vo vývoji prísnych systematických matematických analýz, ktoré sa používajú v oblasti aerodynamiky a majú uplatnenie v leteckom inžinierstve. V roku 1901 sa stal profesorom mechaniky tekutín na Technickej univerzite v Hannoveri, kde publikoval prelomovú prácu o prúdení tekutín s veľmi malým trením a opísal hraničnú vrstvu pri prúdení. Neskôr pracoval v Göttingene. V roku 1922 spoločne s Richardom von Mises založil GAMMA (Medzinárodná asociácia aplikovanej matematiky a mechaniky) a v rokoch 1922 až 1933 bol jej predseda. Pracoval a tvoril hlavne v oblasti hydrodynamiky a aerodynamiky, ale prispel tiež v metrológii, plasticite a stavebnej

mechanike. Kráter na odvrátenej strane mesiaca je pomenovaný na jeho počesť.

**Štepan Prokopovič Timošenko** (22. december 1878 až 29. máj 1972) bol slávny



ruský inžinier pôsobiaci od r. 1922 v Amerike. Študoval v Charkove a Petrohrade, kde po ukončení štúdií v r. 1903 pôsobil na univerzite. V rokoch 1907 až 1911 vyučoval na Univerzite v Kyjeve, kde vyvíjal rannú verziu metódy konečných prvkov. V týchto rokoch tiež publikoval prvú verziu svojej slávnej učebnice *Pevnosť materiálov I* (druhý diel *Pevnosť materiálov II* vyšiel v roku 1930). V roku 1911 dostal cenu Žuravského od Ruskej akadémie vied a v rokoch 1911 až 1917 pôsobil Petrohrade. V roku 1922 sa Timošenko presťahoval do Spojených štátov, kde pracoval pre Westinghouse Electric Corporation, neskôr sa stal profesorom na Univerzite Michigan a na Univerzite Stanford (od 1936). Jeho knihy boli preložené do 36 jazykov. V roku 1957 ASME zaviedla medailu na jeho počesť a Timošenko bol jej prvý laureát. Timošenkova

medaila je každoročne udeľovaná za významné príspevky v aplikovanej mechanike. V roku 1960 sa presťahoval k dcére do Wuppertalu.

**Leonhard Paul Euler** (15. apríl 1707 až 18. september 1783) bol švajčiarsky



matematik a fyzik, ktorý väčšinu života prežil v Rusku – jeden z najväčších a najproduktívnejších matematikov všetkých čias. Jeho súborné dielo tvorí 60 až 80 zväzkov, napísal okolo 880 článkov. Pierre Simon Laplace o Eulerovom vplyve na matematiku vyhlásil: „Čítajte Eulera, on je učiteľ nás všetkých“. Najväčšie zásluhy mu pripisujú v oblasti diferenciálneho a integrálneho počtu a teórií grafov. Preslávili ho aj práce v oblasti mechaniky, optiky a astronómie. Pomohol rozvinúť Eulerovu-Bernoulliho rovnicu nosníka, ktorá sa stala základným kameňom inžinierstva. Euler položil základy analytickej mechaniky v diele Teória pohybu

tuhých telies (1765). Vďačíme mu za mnohé označenia, napr. funkcie  $f(x)$ , symbolu „e“ pre základ prirodzených logaritmov, „i“ pre imaginárnu jednotku,  $\pi$  pre pomer obvodu a priemeru kruhu, za označenie konečných diferencii  $\Delta y$ ,  $\Sigma$  pre sčítanie,... Figuroval na šiestich sériách Švajčiarskej 10-frankovej bankovky a na mnohých švajčiarskych, nemeckých a ruských poštových známkach. Na jeho počesť bol pomenovaný Asteroid.

**Henri Édouard Tresca** (12. október 1814 až 21. jún 1885) bol francúzsky strojní inžinier a profesor na Conservatoire National des Arts et metier v Paríži. Je otcom teórie plasticity, alebo ireverzibilných deformácií, ktorú skúmal v rozsiahlej sérii pokusov začatých v roku 1864. Je objaviteľ pevnostného kritéria založeného na maximálnom šmykovom napätí, ktoré je jedno z dvoch hlavných kritérií pevnosti materiálov. Gustave Eiffel dal jeho meno na tretie miesto vo svojom zozname ľudí podieľajúcich sa na stavbe Eiffelovej veže. Treska bol tiež jeden z návrhárov štandardného metra (tyč upraveného prierezu X pre maximálnu tuhosť zo zliatiny platiny a irídia) v Medzinárodnom úrade pre miery a váhy (BIPM) v Sèvres (1875). Od roku 1882 bol čestný člen Americkej spoločnosti strojní inžinierov (ASME).



**Richard von Mises** (19. apríl 1883 až 14. júl 1953) bol rakúsky matematik a mechanik. Študoval na Technische Hochschule vo Viedni, kde v roku 1907 získal doktorát, v roku 1908 prijal habilitáciu na Technickej univerzite v Brne. Jeho najslávnejšia a zároveň najkontroverzejšia práca bola v teórii pravdepodobnosti. Od roku 1909 bol profesor aplikovanej matematiky v Strasburgu. Po skončení I. svetovej vojny bol menovaný predsedom hydrodynamiky a aerodynamiky na Technische Hochschule v Drážd'anoch (teória krídla). Vrchol jeho vedeckého obdobia bol na Univerzite v Berlíne, kde pôsobil ako vedúci Ústavu aplikovanej matematiky. V rokoch 1940 až 1943 prednášal na Massachusetts Institute of Technology. Bol autor fundamentálnych diel v oblasti pravdepodobnosti, mechaniky a aeromechaniky. Zaviedol pojem tenzoru napätia a je jeden z autorov kritéria pevnosti materiálov (nezávisle od Hubera v 1913). GAMM udeľuje od roku 1989 cenu Richarda von Misesa.



**Heinrich Hencky** (2. november 1885 až 6. júl 1951) bol nemecký inžinier.



Študoval stavebné inžinierstvo v Mníchove a získal doktorát na Technische Hochschule Darmstadt za prácu na teórii obdĺžnikových dosiek. Po vojne učil v Darmstadte, Drážďanoch a v Delfy v Holandsku. Na Delfy University of Technology pracoval na teórii tečenia, plasticity a reológie, pre ktorú sa najviac preslávil. Prednášal aj na Massachusetts Institute of Technology, v Charkove a Moskve. V rokoch 1941 až 1950 bol vedúcim ústavu v MAN. Prispel v oblasti reológie ale najmä v teórii plasticity, teórii dosák a škrupín a ako nezávislý spoluautor pevnostného kritéria (1904).

**Franz Grashof** (11. júl 1826 až 26. október 1893) bol nemecký inžinier, profesor



Aplikovanej mechaniky na Technickej vysokej škole v Karlsruhe. Narodil sa v Dusseldorfe, po absolvovaní strednej odbornej školy nastúpil v roku 1844 na Royal Technical Institute v Berlíne (študoval metalurgiu, matematiku, fyziku a stavbu strojov). Štúdium ukončil v roku 1854 (počas štúdia slúžil necelé 3 roky v nemeckom kráľovskom námorníctve) a začal prednášať matematiku a mechaniku na Royal Technical Institute v Berlíne. V roku 1855 sa stal vedúcim kráľovského kalibračného úradu. Na rovnakom inštitúte a stal sa jeden zo zakladateľov spolku nemeckých inžinierov

(VDI), v ktorom pôsobil ako výkonný riaditeľ až do roku 1890. V rokoch 1863 až 1891 pôsobil ako profesor Aplikovanej mechaniky a Mechaniky strojov v Karlsruhe, kde jeho prednášky zahŕňali Náuku o pružnosti a pevnosti, Hydrauliku, Teóriu tepla a Všeobecné inžinierstvo. Významné sú jeho príspevky v riešení šmykových napätí, prúdenia a vedenia tepla. Po jeho smrti vydala VDI pamätnú medailu, ktorú udeľuje za mimoriadne konštrukčné zručnosti.



## Literatúra

- [1] Timošenko, Š.P.: Pružnosť a pevnosť I, II. Technicko-vědecké vydavatelství Praha, 1951
- [2] Kamenský, A.: Pružnosť a pevnosť. SVŠT v Bratislave, 1965
- [3] Silovský,K.-Oliva,J.: Pružnosť a pevnosť I, II. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1968
- [4] Puchner,O. a kol.: Pružnosť a pevnosť I, II. SVŠT v Bratislave, 1978
- [5] Vadovič, F.: Teória pružnosti. SVŠT v Bratislave, 1982
- [6] Jelemenský, J.: Vybrané state z pružnosti. SVŠT v Bratislave, 1984
- [7] Pulc,V.-Hrnčiar,V.-Gondár,E.: Náuka o materiáli. STU v Bratislave, 2004
- [8] Soboyejo, W.: Mechanical Properties of Engineered Materials. Marcel Dekker Inc. New York 2003