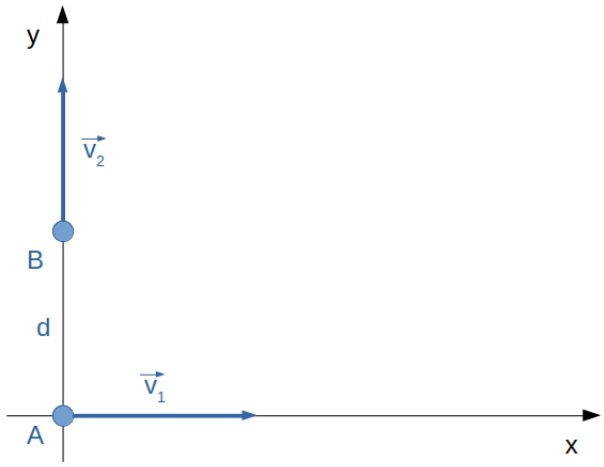
**Zadanie:**

Dva voľné hmotné body A a B s hmotnosťami $m_1$ a $m_2$ sa pohybujú rovnomerne priamočiaro. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ je ich poloha v pravouhlej súradnicovej sústave takáto: A(0,0) a B(0,d). Hmotný bod A má rýchlosť $v_1$, ktorá je kolmá na spojnicu bodov AB. Hmotný bod B sa pohybuje v smere spojnice AB rýchlosťou $v_2$ a to od bodu A. Určte: a) veľkosť rýchlosti ťažiska tejto sústavy hmotných bodov, b) rovnicu krivky pohybu ťažiska.




**Riešenie:**

Poloha ťažiska sústavy hmotných bodov

$$\vec{r^*} = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

Súradnice ťažiska

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 t}{m_1 + m_2}$$

$$y^* = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (d + v_2 t)}{m_1 + m_2}$$

Súradnice rýchlosti ťažiska

$$v_x^* = \frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_y^* = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Veľkosť rýchlosti ťažiska

$$v = \sqrt{v^{*2}_x + v^{*2}_y} = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}$$

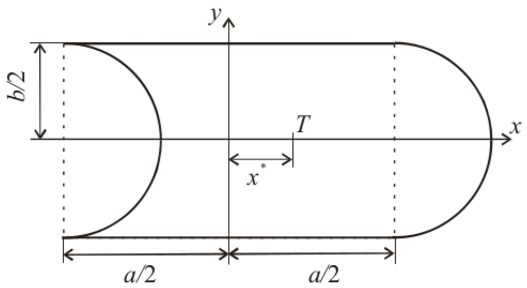
Rovnica pohybu ťažiska

$$x^* = \frac{m_1 v_1 t}{m_1 + m_2} \implies t = \frac{x^*(m_1 + m_2)}{m_1 v_1}$$

$$y^* = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} x^*$$

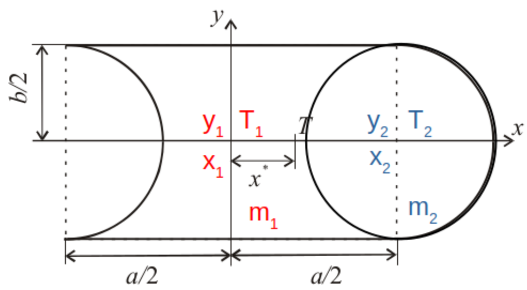
**Zadanie:**

Nájdite polohu ťažiska útvaru znázorneného na obrázku, ktorý vznikol tak, že sa z obdĺžnika so stranami $a$, $b$ vyrezal na ľavej strane polkruh polomeru $b/2$ a priložil sa na pravú stranu obdĺžnika.




Obr.1

**Riešenie:**




Súradnice ťažiska prvého telesa

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

Hmotnosť prvého telesa

$$m_1 = S_1 h\rho = \left[ab - \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] h\rho$$

Súradnice ťažiska druhého telesa

$$x_2 = \frac{a}{2}$$

$$y_2 = 0$$

Hmotnosť druhého telesa

$$m_2 = S_2 h\rho = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 h\rho$$

Poloha ťažiska sústavy dvoch telies

$$\vec{r^*} = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{r_i}}{\sum\limits_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

Súradnice ťažiska sústavy dvoch telies

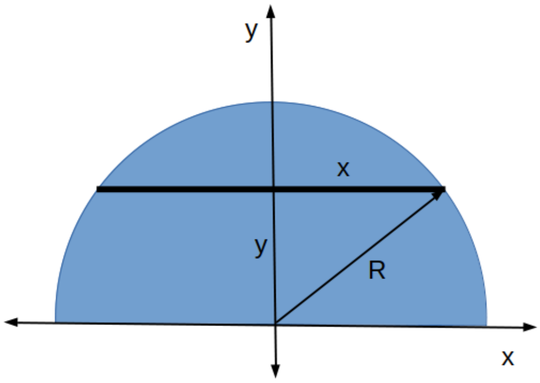
$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 h\rho \frac{a}{2}}{\left[ab - \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] h\rho + \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 h\rho} = \frac{\pi b}{8}$$

$$y^* = 0$$

**Zadanie:**

Nájdite polohu ťažiska homogénnej mosadznej polgule s polomerom krivosti $R$.

**Riešenie:**




Poloha ťažiska polgule

$$\vec{r^*} = \frac{1}{M}\int\limits_M \vec{r}\, dm$$

V smere $x$ a $z$ je teleso symetrické preto sú súradnice ťažiska

$$x^* = 0$$

$$z^* = 0$$

Pretože je teleso homogénne, v smere $y$ je súradnica ťažiska

$$y^* = \frac{1}{M}\int\limits_M y\, dm = \frac{1}{V\rho}\int\limits_V y\rho\, dV = \frac{1}{V}\int\limits_V y\, dV$$

Objem polgule

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Element objemu

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(R^2 - y^2)dy$$

Poloha ťažiska

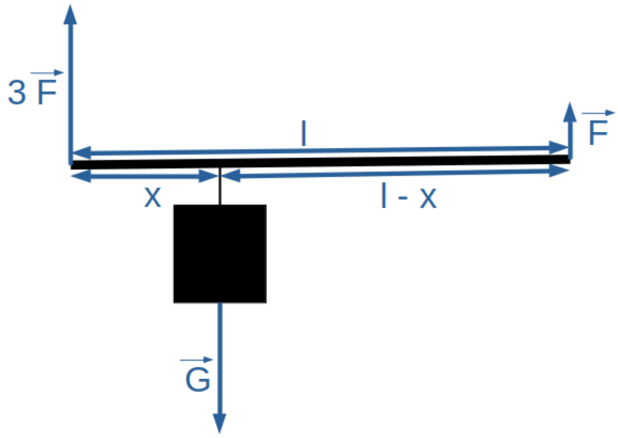
$$y* = \frac{3}{2\pi R^3}\int\limits_0^R y\pi(R^2 - y^2)dy = \frac{3}{2\pi R^3}\left[\pi R^2\frac{y^2}{2} - \pi\frac{y^4}{4}\right]_0^R$$

$$y* = \frac{3}{2\pi R^3}\left(\pi\frac{R^4}{2} - \pi\frac{R^4}{4}\right) = \frac{3R}{8}$$

**Zadanie:**

Otec a syn nesú bremeno na tyči s dĺžkou $l = 2\,\mathrm{m}$. Ako ďaleko od otcovho konca tyče treba zavesiť bremeno hmotnosti $m$, aby otec niesol tri razy väčšiu záťaž ako syn? Hmotnosť tyče je zanedbateľná proti hmotnosti bremena.

**Riešenie:**




Momentová veta

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Momentová veta vzhľadom na os otáčania pri otcovi

$$Fl - mgx = 0 \implies F = \frac{mgx}{l}$$

Momentová veta vzhľadom na os otáčania pri synovi

$$3Fl - mg(l - x) = 0$$

$$3mgx - mg(l - x) = 0$$

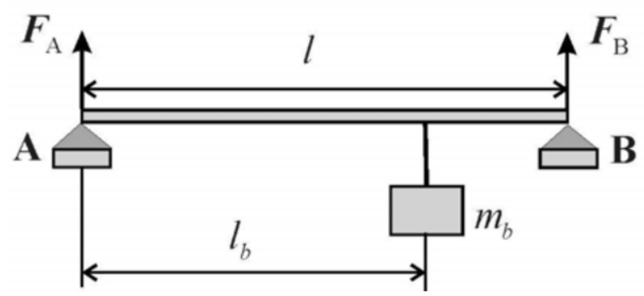
$$x = \frac{l}{4}$$

Dosadenie číselných hodnôt

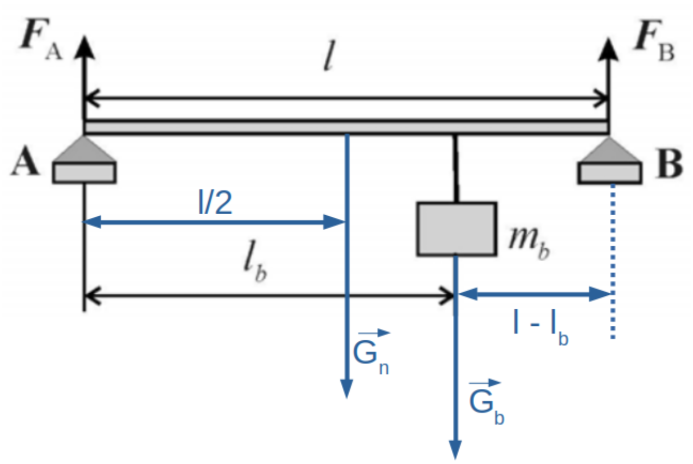
$$x = \frac{2\,\mathrm{m}}{4} = 0{,}5\,\mathrm{m}$$

**Zadanie:**

Nosník s hmotnosťou $m_n$ a dĺžky $l$ je uložený na dvoch podperách A a B a je zaťažený bremenom hmotnosti $m_b$ zaveseným vo vzdialenosti $l_b$ od miesta A. Určte veľkosť síl $F_A$ a $F_B$, ktoré pôsobia na nosník od podpier A a B.




**Riešenie:**




Momentová veta

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Momentová veta vzhľadom na os otáčania A

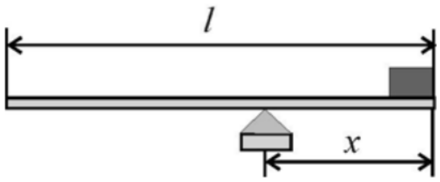
$$F_B l - m_n g \frac{l}{2} - m_b g l_b = 0 \implies F_B = \frac{m_n g}{2} + \frac{m_b g l_b}{l}$$

Momentová veta vzhľadom na os otáčania B

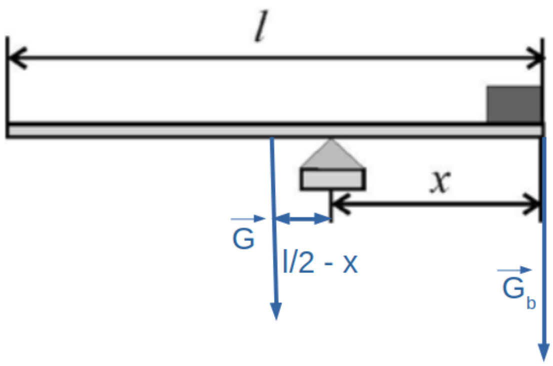
$$F_A l - m_n g \frac{l}{2} - m_b g (l - l_b) = 0 \implies F_A = \frac{m_n g}{2} + m_b g - \frac{m_b g l_b}{l}$$

**Zadanie:**

Homogénna úzka obdĺžniková doska s dĺžkou $l = 3\,\mathrm{m}$ a s hmotnosťou $m = 20\,\mathrm{kg}$ je na jednom konci zaťažená bremenom s hmotnosťou $m_b = 5\,\mathrm{kg}$. V akej vzdialenosti od konca, kde sa nachádza bremeno, máme podložiť podperu, aby doska zaujala vodorovnú polohu?




**Riešenie:**




Momentová veta

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

$$mg\left(\frac{l}{2} - x\right) - m_b g x = 0$$

$$m\frac{l}{2} - mx - m_b x = 0$$

$$x = \frac{ml}{2(m + m_b)}$$

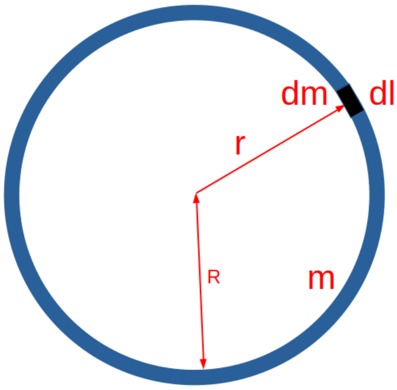
Dosadenie číselných hodnôt

$$x = \frac{ml}{2(m + m_b)} = \frac{20\,\mathrm{kg}\ .\ 3\,\mathrm{m}}{2(20\,\mathrm{kg} + 5\,\mathrm{kg})} = 1{,}2\,\mathrm{m}$$

**Zadanie:**

Vypočítajte moment zotrvačnosti tenkého drôtu hmotnosti m zohnutého do tvaru kružnice polomeru R vzhľadom na rotačnú os totožnú s osou symetrie drôtu.

**Riešenie**




Momentu zotrvačnosti

$$J = \int_m r^2 dm$$

Dĺžková hustota

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

Element hmotnosti

$$dm = \lambda dl$$

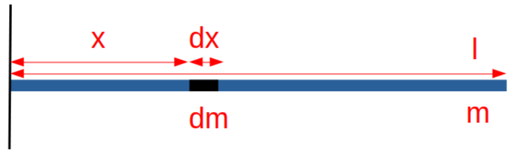
Moment zotrvačnosti

$$J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda dl = \left[R^2 \lambda l\right]_0^{2\pi R} = 2\pi R^3 \lambda = mR^2$$

**Zadanie:**

Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče prierezu $S_0$, dĺžky $l$ a hmotnosti $m$ vzhľadom na os kolmú na dĺžku tyče a prechádzajúcu a) koncovým bodom tyče, b) ťažiskom tyče.

**Riešenie**




Momentu zotrvačnosti

$$J = \int_m x^2 dm$$

Dĺžková hustota

$$\lambda = \frac{m}{l}$$

Element hmotnosti:

$$dm = \lambda dx$$

Moment zotrvačnosti

$$J = \int_0^l x^2 \lambda dx = \left[\frac{x^3}{3}\lambda\right]_0^l = \frac{l^3}{3}\lambda = \frac{ml^2}{3}$$

Steinerova veta

$$J = J^* + ma^2$$

Vzdialenosť medzi ťažiskom a osou otáčania

$$a = \frac{l}{2}$$

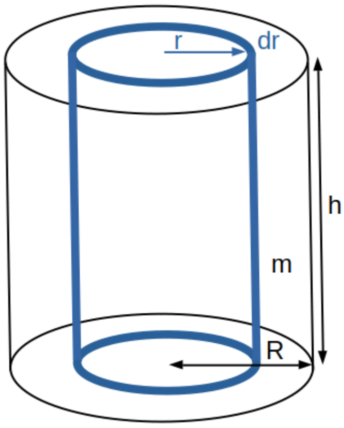
Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom

$$J^* = J - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}$$

**Zadanie:**

Vypočítajte moment zotrvačnosti $J$ homogénneho plného valca hmotnosti $m$, polomeru $R$, výšky $h$ vzhľadom na rotačnú os a) totožnú s jeho osou symetrie, b) totožnú s povrchovou priamkou valca rovnobežnou s osou symetrie. Zvážte, od čoho $J$ nezávisí.

**Riešenie**




Momentu zotrvačnosti

$$J = \int_m r^2 dm$$

Hustota homogénneho válca

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Element hmotnosti:

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr$$

Moment zotrvačnosti válca vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom

$$J^* = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h \, dr = \left[\rho 2\pi h \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

Steinerova veta

$$J = J^* + ma^2$$

Vzdialenosť medzi osou otáčania a ťažiskom

$$a = R$$

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu okrajom válca

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

**Zadanie:**

Krasokorčuliar sa otáča s frekvenciou $f_1 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. S akou frekvenciou sa bude krasokorčuliar otáčať, ak roztiahnutím rúk zväčší svoj moment zotrvačnosti 2,5-krát?

**Riešenie:**

Zákon zachovania momentu hybnosti

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Moment hybnosti

$$L = J\omega$$

Uhlová rýchlosť

$$\omega = 2\pi f$$

Zákon zachovania momentu hybnosti

$$J_1 f_1 = J_2 f_2$$

Moment zotrvačnosti sa zväčší 2,5-krát

$$J_2 = 2{,}5 J_1$$

Zákon zachovania momentu hybnosti

$$J_1 f_1 = 2{,}5 J_1 f_2$$

Výsledná frekvencia

$$f_2 = \frac{f_1}{2{,}5}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$f_2 = \frac{2\,\mathrm{s}^{-1}}{2{,}5} = 0{,}8\,\mathrm{s}^{-1}$$

**Zadanie:**

Tenký drôt hmotnosti $m$ je zohnutý do tvaru kružnice polomeru $R$ a uložený v tiažovom poli na vodorovnú os. Po malom vychýlení z rovnovážnej polohy ho voľne pustíme. Vypočítajte dobu kyvu a redukovanú dĺžku tohto kyvadla ($R = 4{,}9\,\mathrm{cm}$).

**Riešenie:**

Moment zotrvačnosti drôtu tvaru kružnice vzhľadom na os prechádajúcu ťažiskom

$$J^* = \int_m r^2\,dm = mR^2$$

Moment zotrvačnosti drôtu tvaru kružnice vzhľadom na os prechádajúcu okrajom

$$J = J^* + ma^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

Doba kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Doba kyvu fyzikálneho kyvadla

$$T_k = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$T_k = \pi\sqrt{\frac{2\ .\ 4{,}9\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}314\,\mathrm{s}$$

Redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla sa rovná dĺžke matematického kyvadla,
ktoré má rovnakú dobu kmitu ako fyzikálne kyvadlo

$$T_{fyz} = T_{mat}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

$$l_r = \frac{J}{ma} = \frac{2mR^2}{mR} = 2R$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$l_r = 2\ .\ 4{,}9\,\mathrm{cm} = 9{,}8\,\mathrm{cm}$$

**Zadanie:**

Tyč dĺžky $l = 1\,\mathrm{m}$ sa kýva ako fyzikálne kyvadlo okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Nájdite redukovanú dĺžku tohoto kyvadla.

**Riešenie:**

Doba kmitu matematického kyvadla

$$T_{mat} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Doba kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T_{fyz} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

Redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla sa rovná dĺžke matematického kyvadla, ktoré má rovnakú dobu kmitu ako fyzikálne kyvadlo

$$T_{mat} = T_{fyz}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

$$l_r = \frac{J}{ma}$$

Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu koncom

$$J = \int\limits_m r^2\,dm = \frac{m}{l}\int\limits_0^l x^2\,dx = \frac{ml^2}{3}$$

Vzdialenosť medzi osou otáčania a ťažiskom

$$a = \frac{l}{2}$$

Redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla

$$l_r = \frac{2}{3}l$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$l_r = \frac{2}{3}.1\,\mathrm{m} = 0{,}67\,\mathrm{m}$$

**Zadanie:**

Zotrvačníkové koleso, ktoré má spolu s hriadeľom moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania $J$, otáča sa tak, že vykonáva $N$ otáčok za minútu. V okamihu, keď prestanú pôsobiť vonkajšie sily svojím otáčavým momentom, koleso sa zastaví počas doby $t_z$. Za predpokladu, že trecie sily sú konštantné, vypočítajte ich moment vzhľadom na os. (Riešte pre hodnoty $J = 200\,\mathrm{kg\,m^2}$, $N = 180$, $t_z = 2\,\mathrm{min}$)

**Riešenie:**

Počiatočná frekvencia zotrvačníka

$$f_0 = \frac{N}{60} = \frac{180}{60\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{s^{-1}}$$

Počiatočná uhlová rýchlosť zotrvačníka

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Zotrvačník rovnomerne spomaľuje

$$\omega = \omega_0 - \epsilon t$$

Zotrvačník zastane

$$0 = \omega_0 - \epsilon t_z \implies \epsilon = \frac{\omega_0}{t_z}$$

Pohybová rovnica zotrvačníka

$$M = J\epsilon = J\frac{2\pi f_0}{t_z}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$M = 200\,\mathrm{kg\,m^2}\frac{2\pi\ 3\,\mathrm{s^{-1}}}{120\,\mathrm{s}} = 31{,}4\,\mathrm{N\,m}$$

**Zadanie:**

Zotrvačník s momentom zotrvačnosti $J = 5\,\mathrm{kg\,m^2}$ sa roztáča z pokoja za pôsobenia sily, ktorej moment vzhľadom na os otáčania $M_{os} = 300\,\mathrm{N\,m}$. Za aký čas dosiahne zotrvačník frekvenciu $f = 480\,\mathrm{min^{-1}}$ a aká bude jeho kinetická energia?

**Riešenie:**

Pohybová rovnica zotrvačníka

$$M_{os} = J\epsilon \implies \epsilon = \frac{M_{os}}{J}$$

Zotrvačník sa roztáča

$$\omega = \epsilon t \implies t = \frac{\omega}{\epsilon}$$

Čas roztáčania zotrvačníka

$$t = \frac{J}{M}\omega$$

Vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a frekvenciou

$$\omega = 2\pi f$$

Čas roztáčania zotrvačníka

$$t = 2\pi f \frac{J}{M}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$f = 480\,\mathrm{min^{-1}} = 8\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$t = 2\pi\ 8\,\mathrm{s^{-1}} \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2}}{300\,\mathrm{N\,m}} = 0{,}838\,\mathrm{s}$$

Kinetická energia zotrvačníka

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J(2\pi f)^2}{2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$E_k = \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2}(2\pi\ 8\,\mathrm{s^{-1}})^2}{2} = 6316{,}5\,\mathrm{J}$$

**Zadanie:**

Vypočítajte kinetickú energiu telesa valcového tvaru s polomerom $R = 8\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ v čase $t = 5\,\mathrm{s}$, keď sa toto teleso otáča okolo svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\alpha = \frac{\pi}{8}\mathrm{s}^{-2}$, ak v čase $t = 0$ bolo teleso v pokoji.

**Riešenie:**

Kinetická energia rotujúceho tuhého telesa

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

Moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os prechádzajúcu stredom

$$J = \int\limits_m r^2\,dm = \frac{2m}{R^2}\int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{mR^2}{2}$$

Uhlovú rýchlosť

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + c$$

Počiatočná podmienka

$$\omega(t = 0\,\mathrm{s}) = 0 \implies c = 0$$

$$\omega = \alpha t$$

Kinetická energia válca

$$E_k = \frac{mR^2\alpha^2t^2}{4}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$E_k = \frac{1{,}5\,\mathrm{kg}\;.\;(0{,}08\,\mathrm{m})^2.\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{s}^{-2}\right)^2.(5\,\mathrm{s})^2}{4} = 0{,}009\,25\,\mathrm{J}$$

**Zadanie:**

Homogénna tyč všade rovnakého prierezu, hmotnosti $m$, dĺžky $l$ voľne visí na vodorovnej osi prechádzajúcej jej koncovým bodom. Akú minimálnu rýchlosť v horizontálnom smere treba udeliť voľnému koncovému bodu tyče, aby sa tyč dostala do vodorovnej roviny prechádzajúcej osou otáčania?

**Riešenie:**

Zákon zachovania mechanickej energie pre rotujúce tuhé teleso

$$E_k = E_p$$

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgh$$

Ťažisko tyče sa zdvihne do výšky

$$h = \frac{l}{2}$$

Moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os prechádzajúcu koncom

$$J = \int_m r^2 \, dm = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 \, dx = \frac{ml^2}{3}$$

Zákon zachovania mechanickej energie

$$\frac{ml^2\omega^2}{6} = \frac{mgl}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Koncový bod tyče sa pohybuje po kružnici

$$v = R\omega = l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{3gl}$$

**Zadanie:**

Teleso v tvare a) valca, b) obruče (s hrúbkou zanedbateľnou oproti polomeru) sa valí po naklonenej rovine, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha$. Polomer každého z telies je $R$ a hmotnosť $m$. 1) Vypočítajte rýchlosť ťažiska $v^*$ telesa po prebehnutí dráhy $s$, keď teleso bolo voľne pustené. 2) Porovnajte vypočítanú hodnotu s rýchlosťou, ktorú by malo ťažisko telesa, keby sa iba šmýkalo po dokonale hladkej naklonenej rovine.

**Riešenie:**

Zákon zachovania mechanickej energie ak teleso koná translačný aj rotačný pohyb

$$mgh = \frac{m(v^*)^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{s} \implies h = s\sin\alpha$$

$$v^* = \omega R \implies \omega = \frac{v^*}{R}$$

$$mgs\sin\alpha = \frac{m(v^*)^2}{2} + \frac{J(v^*)^2}{2R^2}$$

Rýchlosť ťažiska ak teleso koná translačný aj rotačný pohyb

$$v^* = \sqrt{\frac{2mgs\sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

Moment zotrvačnosti obruče

$$J^* = \int_m r^2\,dm = mR^2$$

Rýchlosť ťažiska obruče

$$v^* = \sqrt{gs\sin\alpha}$$

Moment zotrvačnosti válca

$$J = \int_m r^2\,dm = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,dr = \frac{mR^2}{2}$$

Rýchlosť ťažiska válca

$$v^* = \sqrt{\frac{4gs\sin\alpha}{3}}$$

Zákon zachovania mechanickej energie ak teleso koná len translačný pohyb

$$mgh = \frac{m(v^*)^2}{2}$$

Rýchlosť ťažiska válca

$$v^* = \sqrt{2gs\sin\alpha}$$