

Zadanie:

Teleso, ktoré má v pokojovej sústave tvar kocky, sa pohybuje rovnomerne priamočiario rýchlosťou $v = 0,95 c$ v smere kolmo na stenu kocky. Pokojová dĺžka kocky je $a_0 = 1 \text{ m}$. Vypočítajte objem telesa vo vzťažnej sústave, voči ktorej sa teleso pohybuje.

Riešenie:

Kontrakcia dĺžky

$$a = a_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Objem kocky

$$V = a_0^3 a = a_0^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = a_0^3 \sqrt{1 - \frac{(0,95 c)^2}{c^2}} = a_0^3 \sqrt{1 - 0,95^2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$v = (1 \text{ m})^3 \sqrt{1 - 0,95^2} = 0,312 \text{ m}^3$$

Zadanie:

Aká veľká by musela byť vzájomná rýchlosť sústav, aby sa pohybujúcemu pozorovateľovi javila tyč skrátaná o 10% ?

Riešenie:

Tyč skrátaná o 10%

$$l = l_0 - 0,1 l_0 = 0,9 l_0$$

$$\frac{l}{l_0} = 0,9$$

Kontrakcia dĺžky

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = c \sqrt{1 - 0,9^2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$v = c \sqrt{1 - 0,9^2} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \sqrt{1 - 0,9^2} = 1,308 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Zadanie:

Častica má v laboratórnej sústave dobu života 10^{-6} s. Aká je doba života častice v sústave viazanej na časticu, ak sa sústava pohybuje rýchlosťou 98 % rýchlosti svetla? Akú dráhu prejde v laboratórnej sústave?

Riešenie:

Dilatácia času

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{(0,98c)^2}{c^2}} = \Delta t \sqrt{1 - 0,98^2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$\Delta t = 10^{-6} \text{ s} \cdot \sqrt{1 - 0,98^2} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Dráha v laboratórnej sústave

$$x = v \Delta t = 0,98 c \Delta t$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$x = 0,98 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \cdot 10^{-6} \text{ s} = 294 \text{ m}$$

Zadanie:

Predpokladajme, že k Marsu, vzdialenosť $d = 8 \cdot 10^{10}$ m, môžeme letieť rýchlosťou $0,5c$. Ak let v našej sústave začal v čase $t_1 = 0$ s, v akom čase t_2 by sme prišli do cieľa? Ako by sa javil tento časový údaj t'_2 na hodinách kozmickej lode, Ako by ohodnotila vzdialenosť k Marsu d' posádka lode?

Riešenie:

Doba letu z pohľadu sústavy viazanej na Zem

$$t_2 = \frac{d}{v} = \frac{d}{0,5c}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$t_2 = \frac{8 \cdot 10^{10} \text{ m}}{0,5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 5,333 \cdot 10^2 \text{ s}$$

Lorentzova transformácia

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - \frac{0,5c \cdot x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - \frac{0,5x_2}{c}}{\sqrt{1 - 0,5^2}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$t'_2 = \frac{5,333 \cdot 10^2 \text{ s} - \frac{0,5 \cdot 8 \cdot 10^{10} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 4,6188 \cdot 10^2 \text{ s}$$

Kontrakcia dĺžky

$$d' = d\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}} = d\sqrt{1 - 0,5^2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$d' = 8 \cdot 10^{10} \text{ m} \sqrt{1 - 0,5^2} = 6,9282 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Zadanie:

Dve častice sa pohybujú proti sebe rýchlosťami $0,8c$ a $0,7c$, ktoré namerá pozorovateľ stojaci medzi nimi. Akú rýchlosť druhej častice by namerá pozorovateľ zo vzťažnej sústavy viazanej na prvú časticu?

Riešenie:

Prvá častica sa pohybuje v kladnom smere

$$v = +0,8c$$

Druhá častica sa pohybuje opačným smerom

$$u = -0,7c$$

Relativistické skladanie rýchlosti

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$u' = \frac{-0,7c - 0,8c}{1 - \frac{-0,7c \cdot 0,8c}{c^2}} = -0,96c$$

Zadanie:

Fotón sa pohybuje vzhľadom na sústavu v pokoji rýchlosťou svetla. Aká je jeho rýchlosť vzhľadom na sústavu, ktorá sa pohybuje vzhľadom na sústavu v pokoji rýchlosťou v ?

Riešenie:

Relativistické skladanie rýchlosti

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{\frac{c^2 - cv}{c^2}} = \frac{c^2(c - v)}{c(c - v)} = c$$

Zadanie:

Elektrón s pokojovou hmotnosťou $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg sa pohybuje rýchlosťou $v = 0,6 c$.

Vypočítajte jeho relativistickú hybnosť.

Riešenie:

Relativistické hybnosť

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m \cdot 0,6 c}{\sqrt{1 - \frac{(0,6 c)^2}{c^2}}} = \frac{m \cdot 0,6 c}{\sqrt{1 - 0,6^2}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$p = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = 2,0475 \cdot 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$$

Zadanie:

Vypočítate rýchlosť, pri ktorej je relativistická hybnosť častice dvakrát väčšia, ako je jej hybnosť podľa klasickej mechaniky.

Riešenie:

Relativistická hybnosť je dvakrát väčšia ako klasická hybnosť

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2mv$$

Rýchlosť častice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

$$v = c\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \sqrt{\frac{3}{4}} = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Zadanie:

Pri akej rýchlosti sa kinetická energia častice rovná jej pokojovej energii?

Riešenie:

Kinetická energia sa rovná pokojovej energii

$$W_k = W_0$$

$$c\sqrt{m^2c^2 + p^2} - mc^2 = mc^2$$

$$p^2 = 3m^2c^2$$

Relativistická hybnosť častice

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Rýchlosť častice

$$\frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 3m^2c^2$$

$$v = c\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$v = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \sqrt{\frac{3}{4}} = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Zadanie:

Protón s pokojovou energiou $W_0 = 938 \text{ MeV}$ sa pohybuje rýchlosťou $v = 0,5 c$. Vypočítajte jeho relativistickú kinetickú energiu.

Riešenie:

Pokojuv energia protónu

$$W_0 = 938 \text{ MeV} = 938 \text{ MeV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Pokojuv hmotnosť protónu

$$W_0 = mc^2 \implies m = \frac{W_0}{c^2} = \frac{1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Relativistick hybnosť protónu

$$p = \frac{m 0,5 c}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 2,89 \cdot 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1}$$

Kinetick energia protónu

$$W_k = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} - mc^2$$

$$W_k = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \sqrt{(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2 (3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 + (2,89 \cdot 10^{-19} \text{ kg m s}^{-1})^2} - 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} (3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 = 2,32 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$