Zadanie:

Častica sa pohybuje v rovine xy tak, že jej pravouhlé súradnice sa menia s časom t podľa vzťahov: $x = At^2$, $y = B - Ct^2$, kde A, B, C sú dané konštanty. Nájdite polohový vektor častice v čase t, jeho veľkosť a určte tvar dráhy, po ktorej sa častica pohybuje.

Riešenie:

Polohový vektor častice

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = At^2\vec{i} + (B - Ct^2)\vec{j}$$

kde $\vec{i}$ a $\vec{j}$ sú jednotkové vektory. Veľkosť polohového vektora častice

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(At^2)^2 + (B - Ct^2)^2}$$

Tvar dráhy častice zistíme tak, že rovnice upravíme na tvar, v ktorom nebude t. Z prvej rovnice preto vyjadríme

$$t^2 = \frac{x}{A}$$

a dosadíme do druhej rovnice

$$y = B - \frac{C}{A}x$$

výsledkom je rovnica priamky.

Zadanie:

Častica sa pohybuje v rovine xy tak, že jej pravouhlé súradnice sa menia s časom t podľa rovníc $x = A\cos kt$, $y = B\sin kt$, kde A, B, k sú dané konštanty. Nájdite polohový vektor častice v čase t, jeho veľkosť a kosínusy smerových uhlov, ktoré zviera s osami x, y. Určte tvar dráhy, po ktorej sa častica pohybuje.

Riešenie:

Polohový vektor častice

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (A\cos kt)\vec{i} + (B\sin kt)\vec{j}$$

kde $\vec{i}$ a $\vec{j}$ sú jednotkové vektory. Veľkosť polohového vektora častice

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(A\cos kt)^2 + (B\sin kt)^2}$$

Smerové kosínusy sú

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{A\cos kt}{\sqrt{(A\cos kt)^2 + (B\sin kt)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{B\sin kt}{\sqrt{(A\cos kt)^2 + (B\sin kt)^2}}$$

Tvar dráhy častice zistíme tak, že rovnice upravíme na tvar, v ktorom nebude t. Obidve rovnice preto upravíme na tvar

$$\frac{x^2}{A^2} = (\cos kt)^2$$

$$\frac{y^2}{B^2} = (\sin kt)^2$$

a potom ich sčítame

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

výsledkom je rovnica elipsy.

Zadanie:

Častica sa pohybuje tak, že jej pravouhlé súradnice sa menia s časom t podľa rovníc $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = bt$, kde R, b, ω sú dané konštanty. Nájdite polohový vektor častice v čase t, jeho veľkosť a kosínusy smerových uhlov, ktoré vektor zviera s osami x, y, z. Určte tvar dráhy, po ktorej sa častica pohybuje.

Riešenie:

Polohový vektor častice

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (R\cos\omega t)\vec{i} + (R\sin kt)\vec{j} + bt\vec{k}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ sú jednotkové vektory. Veľkosť polohového vektora častice

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(R\cos\omega t)^2 + (R\sin\omega t)^2 + (bt)^2} = \sqrt{R^2 + (bt)^2}$$

Smerové kosínusy sú

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{R\cos\omega t}{\sqrt{R^2 + (bt)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{R\sin\omega t}{\sqrt{R^2 + (bt)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{bt}{\sqrt{R^2 + (bt)^2}}$$

Tvar dráhy častice zistíme tak, že pohyb rozložíme na pohyb v rovine xy a pohyb v smere osi z. Rovnice pre súradnice x a y upravíme na tvar

$$x^2 = (R\cos kt)^2$$

$$y^2 = (R\sin kt)^2$$

obidve rovnice teraz sčítame

$$x^2 + y^2 = R^2$$

V rovine xy sa teda častica pohybuje po kružnici, keď ku pohybu po kružnici v rovine xy pridáme rovnomerný pohyb v smere osi z

$$z = bt$$

tvar častice bude skrutkovica.

Zadanie:

Polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu závisí od času podľa vzťahu $\vec{r} = \vec{i}\, A\cos bt + \vec{j}\, A\sin bt$, kde $A = 6\,\mathrm{m}$, $b = \pi/4\,\mathrm{s}^{-1}$. Vyjadrite jeho zložky, súradnice, veľkosť a smerové kosínusy v ľubovoľnom čase t a v čase $t = 1\,\mathrm{s}$.

Riešenie:

Zložky polohového vektora v ľubovoľnom čase t

$$\vec{x} = \vec{i}\, A\cos bt$$

$$\vec{y} = \vec{j}\, A\sin bt$$

Zložky polohového vektora v čase $t = 1\,\mathrm{s}$

$$\vec{x} = \vec{i}\, 6\,\mathrm{m}\cos(\pi/4\,\mathrm{s}^{-1}\ .\ 1\,\mathrm{s}) = \vec{i}\, 4{,}24\,\mathrm{m}$$

$$\vec{y} = \vec{j}\, 6\,\mathrm{m}\sin\pi/4\ (\mathrm{s}^{-1}\ .\ 1\,\mathrm{s}) = \vec{j}\, 4{,}24\,\mathrm{m}$$

Súradnice polohového vektora v ľubovolnom čase t

$$x = A\cos bt$$

$$y = A\sin bt$$

Súradnice polohového vektora v čase $t = 1\,\mathrm{s}$

$$x = 6\,\mathrm{m}\cos(\pi/4\,\mathrm{s}^{-1}\ .\ 1\,\mathrm{s}) = 4{,}24\,\mathrm{m}$$

$$y = 6\,\mathrm{m}\sin(\pi/4\,\mathrm{s}^{-1}\ .\ 1\,\mathrm{s}) = 4{,}24\,\mathrm{m}$$

Veľkosť polohového vektora je konštantná

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(A\sin bt)^2 + (A\cos bt)^2} = A = 6\,\mathrm{m}$$

Smerové kosínusy polohového vektora v ľubovolnom čase t

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{A\cos bt}{A} = \cos bt$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{A\sin bt}{A} = \sin bt$$

Smerové kosínusy polohového vektora v čase $t = 1\,\mathrm{s}$

$$\cos\alpha = \cos(\pi/4\,\mathrm{s}^{-1}\,.\,1\,\mathrm{s}) = 0{,}71$$

$$\cos\beta = \sin(\pi/4\,\mathrm{s}^{-1}\,.\,1\,\mathrm{s}) = 0{,}71$$

Zadanie:

Dve telesá vzdialené od seba na začiatku $100\,\mathrm{m}$, sa pohybujú proti sebe: prvé rovnomerne, rýchlosťou $v_1 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, druhé rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou $v_0 = 7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a zrýchlením $a = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Nájdite miesto a čas ich stretnutia.

Riešenie:

Dráha prejdená prvým telesom za čas t pri rovnomernom pohybe

$$s_1 = v_1 t$$

Dráha prejdená druhým telesom za čas t pri rovnomerne zrýchenom pohybe

$$s_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Telesá sa stretnú, keď súčet prejdených dráh bude $100\,\mathrm{m}$

$$s_1 + s_2 = 100\,\mathrm{m}$$

$$v_1 t + v_0 t + \frac{at^2}{2} = 100\,\mathrm{m}$$

$$3\,\mathrm{m\,s^{-1}}t + 7\,\mathrm{m\,s^{-1}}t + \frac{4\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2}{2} = 100\,\mathrm{m}$$

Kvadratická rovnica

$$2t^2 + 10t - 100 = 0$$

má dve riešenia

$$t_1 = 5\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = -10\,\mathrm{s}$$

Fyzikálnemu riešeniu zodpovedá

$$t = 5\,\mathrm{s}$$

Vzdialenosť od prvého telesa, v ktorej sa stretnú

$$s_1 = v_1 t = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}} 5\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{m}$$

Zadanie:

Dve telesá sa pohybujú proti sebe so zrýchleniami $a_1 = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $a_2 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ a začiatočnými rýchlosťami $v_{01} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_{02} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Začiatočná vzdialenosť medzi obidvoma telesami $l = 750\,\mathrm{m}$. Nájdite čas, v ktorom sa obidve telesá stretnú.

Riešenie:

Dráha prejdená prvým telesom za čas t pri rovnomerne zrýchlenom pohybe

$$s_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

Dráha prejdená druhým telesom za čas t pri rovnomerne zrýchenom pohybe

$$s_2 = v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2}$$

Telesá sa stretnú, keď súčet prejdených dráh bude l

$$s_1 + s_2 = l$$

$$v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} + v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} = l$$

$$10\,\mathrm{m\,s^{-1}}t + \frac{6\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2}{2} + 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}t + \frac{4\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2}{2} = 750\,\mathrm{m}$$

Kvadratická rovnica

$$5t^2 + 25t - 750 = 0$$

má dve riešenia

$$t_1 = 10\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = -15\,\mathrm{s}$$

Fyzikálnemu riešeniu zodpovedá

$$t = 10\,\mathrm{s}$$

Zadanie:

Vlak, ktorý stál, sa rozbieha rovnomerne zrýchleným pohybom a za čas $t_1 = 30\,\mathrm{s}$ prejde dráhu $s_1 = 90\,\mathrm{m}$. Akú dráhu s_2 prejde za čas $t_2 = 1\,\mathrm{min}$, aká je vtedy jeho okamžitá rýchlosť v_2 a aká je jeho priemerná rýchlosť v_p?

Riešenie:

Dráha prejdená vlakom za čas t_1 pri rovnomerne zrýchlenom pohybe

$$s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

Zrýchlenie vlaku

$$a = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2.90\,\mathrm{m}}{(30\,\mathrm{s})^2} = 0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Dráha vlaku v čase t_2

$$s_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}(60s)^2}{2} = 360\,\mathrm{m}$$

Rýchlosť vlaku v čase t_2

$$v_2 = at_2 = 0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}60\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Priemerná rýchlosť vlaku

$$v_p = \frac{s_2}{t_2} = \frac{360\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Z určitej výšky sme súčasne tou istou začiatočnou rýchlosťou v_0 hodili dve telesá. Prvé zvisle nahor, druhé zvisle nadol. Ako závisí vzájomná vzdialenosť d týchto dvoch telies od času?

Riešenie:

Rýchlosť telesa hodeného nahor

$$v_1 = v_0 - gt$$

Dráha telesa hodeného nahor

$$s_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Rýchlosť telesa hodeného nadol

$$v_2 = v_0 + gt$$

Dráha telesa hodeného nadol

$$s_2 = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Vzdialenosť telies

$$s = s_1 + s_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 2v_0 t$$

Zadanie:

Pohyb častice je v každom okamihu daný závislosťou jej polohového vektora na čase $\vec{r} = (A_1t^2 + B_1)\vec{i} + (A_2t^2 + B_2)\vec{j}$, kde $A_1 = 0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $B_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $A_2 = 0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $B_2 = -0{,}03\,\mathrm{m}$. Nájdite veľkosť, smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t_1 = 2\,\mathrm{s}$. Smer určte pomocou uhla vzhľadom k osi x.

Riešenie:

Súradnice polohového vektora

$$x = A_1t^2 + B_1$$

$$y = A_2t^2 + B_2$$

Súradnice vektora rýchlosti

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A_1t^2 + B_1)}{dt} = 2A_1t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A_2t^2 + B_2)}{dt} = 2A_2t$$

Veľkosť vektora rýchlosti

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2A_1t)^2 + (2A_2t)^2} = t\sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2}$$

Veľkosť vektora rýchlosti v čase $t_1 = 2\,\mathrm{s}$

$$v = 2\,\mathrm{s}\sqrt{(2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (2.0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Smerový kosínus vektora rýchlosti

$$\cos\alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{2A_1t}{t\sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2}} = \frac{2A_1}{\sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2}}$$

Smerový kosínus vektora rýchlosti je konštantný

$$\cos\alpha_v = \frac{2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}2\,\mathrm{s}}{\sqrt{(2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}2\,\mathrm{s})^2 + (2.0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}}2\,\mathrm{s})^2}} = 0{,}8$$

Uhol medzi vektorom rýchlosti a osou x je konštantný

$$\alpha_v = \arccos 0{,}8 = 36{,}6^\circ$$

Súradnice vektora zrýchlenia

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(2A_1t)}{dt} = 2A_1$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(2A_2t)}{dt} = 2A_2$$

Veľkosť vektora zrýchlenia

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2}$$

Veľkosť vektora zrýchlenia je konštantná

$$a = \sqrt{(2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (2.0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2} = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Smerový kosínus vektora zrýchlenia

$$\cos\alpha_a = \frac{a_x}{a} = \frac{2A_1}{\sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2}}$$

Smerový kosínus vektora zrýchlenia je konštantný

$$\cos\alpha_a = \frac{2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{\sqrt{(2.0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2 + (2.0{,}15\,\mathrm{m\,s^{-2}})^2}} = 0{,}8$$

Uhol medzi vektorom zrýchlenia a osou x je konštantný

$$\alpha_a = \arccos 0{,}8 = 36{,}6^\circ$$

Zadanie:

Častica sa pohybuje tak, že jej polohový vektor sa mení v čase podľa funkcie $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$. Vzdialenosť je v metroch a čas t v sekundách. Vyjadrite a) vektory rýchlosti a zrýchlenia, b) veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, c) rovnicu dráhy pohybu.

Riešenie:

Súradnice polohového vektora

$$x = 3t^2$$

$$y = 2t$$

$$z = 1$$

Súradnice vektora rýchlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}3t^2}{\mathrm{d}t} = 6t$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}2t}{\mathrm{d}t} = 2$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}t} = 0$$

Vektor rýchlosti

$$\vec{v} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$$

Veľkosť vektora rýchlosti

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(6t)^2 + 2^2}$$

Veľkosť vektora rýchlosti v čase $t_1 = 10\,\mathrm{s}$

$$v = \sqrt{(6.10)^2 + 2^2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 60{,}03\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Súradnice vektora zrýchlenia

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}6t}{\mathrm{d}t} = 6$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}2}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t} = 0$$

Vektor zrýchlenia

$$\vec{a} = 6\vec{i}$$

Veľkosť vektora zrýchlenia je konštantná

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Častica sa pohybuje len v rovine xy, rovnicu dráhy nájdeme tak, že z rovníc vylúčime t

$$y = 2t \implies t = \frac{y}{2}$$

$$x = 3t^2 = \frac{3}{4}y^2$$

Častica sa pohybuje po parabole.

Zadanie:

Aká je obvodová a uhlová rýchlosť kolesa automobilu, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $v = 72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a koľko otáčok vykonajú kolesá za sekundu, ak ich priemer je $D = 0{,}6\,\mathrm{m}$?

Riešenie:

Obvodová rýchlosť kolesa je rovnaká ako rýchlosť automobilu

$$v = 72\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Medzi veľkosťou obvodovej a uhlovej rýchlosti platí

$$v = \omega R \implies \omega = \frac{v}{R}$$

Polomer kolesa

$$R = \frac{D}{2}$$

Uhlová rýchlosť kolesa

$$\omega = \frac{2v}{D} = \frac{2.20\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0{,}6\,\mathrm{m}} = 66{,}7\,\mathrm{s^{-1}}$$

Frekvencia kolesa

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\pi D} = \frac{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{\pi.0{,}6\,\mathrm{m}} = 10{,}6\,\mathrm{Hz}$$

Zadanie:

Koleso sa začína z pokojového stavu roztáčať rovnomerne zrýchlene tak, že za čas $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ vykoná $n_1 = 12{,}5$ otáčok. Aká je hodnota jeho uhlovej rýchlosti v čase t_1?

Riešenie:

Uhlová dráha prejdená za čas t_1

$$\varphi_1 = 2\pi n_1 = 25\pi$$

Uhlová rýchlosť pri rovnomerne zrýchlenom pohybe po kružnici

$$\omega = \alpha t$$

Uhlová dráha pri rovnomerne zrýchlenom pohybe po kružnici

$$\varphi = \int \omega\, dt = \int \alpha t\, dt = \frac{\alpha t^2}{2} + c\,; \quad c = 0$$

Uhlové zrýchlenie

$$\varphi_1 = \frac{\alpha t_1^2}{2} \implies \alpha = \frac{2\varphi_1}{t_1^2}$$

Uhlová rýchlosť v čase t_1

$$\omega_1 = \alpha t_1 = \frac{2\varphi_1}{t_1} = \frac{50\pi}{5\,\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$$

Zadanie:

Koleso sa začalo otáčať z pokojového stavu so stálym uhlovým zrýchlením α. Koľkokrát sa otočilo za čas t_1 od začiatku pohybu?

(Vypočítajte pre hodnoty $\alpha = 2\,\mathrm{s}^{-2}$, $t_1 = 15\,\mathrm{s}$.)

Riešenie:

Uhlová rýchlosť pri konštantnom uhlovom zrýchlení

$$\omega = \int \alpha\, dt = \alpha t + c_1$$

ak je počiatočná uhlová rýchlosť nulová

$$\omega(t = 0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{s}^{-1} \implies c_1 = 0$$

Uhlová dráha pri konštantnom uhlovom zrýchlení

$$\varphi = \int \omega\, dt = \int \alpha t\, dt = \frac{\alpha t^2}{2} + c_2$$

ak je počiatočná uhlová dráha nulová

$$\varphi(t = 0\,\mathrm{s}) = 0 \implies c_2 = 0$$

Počet otáčok kolesa

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha t^2}{4\pi}$$

Počet otáčok kolesa v čase t_1

$$\varphi_1 = \frac{\alpha t_1^2}{4\pi} = \frac{2\,\mathrm{s}^{-2}(15\,\mathrm{s})^2}{4\pi} = 35{,}8$$

Zadanie:

Koleso sa otáča s frekvenciou $f = 25\,\mathrm{s}^{-1}$. Brzdením možno dosiahnuť, že jeho otáčanie bude rovnomerne spomalené a koleso sa zastaví po čase $t_0 = 30\,\mathrm{s}$ od začiatku brzdenia. Vypočítajte uhlové zrýchlenie α a počet otáčok, ktoré koleso vykoná od začiatku brzdenia až do zastavenia.

Riešenie:

Počiatočná uhlová rýchlosť

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\ 25\,\mathrm{s}^{-1} = 157{,}08\,\mathrm{s}^{-1}$$

Uhlová rýchlosť pri konštantnom uhlovom zrýchlení

$$\omega = \int \alpha\, dt = \alpha t + c_1$$

ak je počiatočná uhlová rýchlosť ω_0

$$\omega(t = 0\,\mathrm{s}) = \omega_0 \implies c_1 = \omega_0$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

Koleso zabrzdí v čase t_0

$$\omega = 0 \implies \alpha t_0 + \omega_0 = 0$$

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{157{,}08\,\mathrm{s}^{-1}}{30\,\mathrm{s}} = -5{,}24\,\mathrm{s}^{-2}$$

Uhlová dráha pri konštantnom uhlovom zrýchlení

$$\varphi = \int \omega\, dt = \int (\alpha t + \omega_0)\, dt = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t + c_2$$

ak je počiatočná uhlová dráha nulová

$$\varphi(t = 0\,\mathrm{s}) = 0 \implies c_2 = 0$$

Uhlová dráha

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t = -\frac{\omega_0 t^2}{2t_0} + \omega_0 t$$

Uhlová dráha v čase t_0

$$\varphi_0 = -\frac{\omega_0 t_0^2}{2t_0} + \omega_0 t_0 = \frac{\omega t_0}{2}$$

Počet otáčok kolesa v čase t_0

$$n = \frac{\varphi_0}{2\pi} = \frac{\omega t_0}{4\pi} = \frac{157{,}08\,\mathrm{s}^{-2}\;30\,\mathrm{s}}{4\pi} = 375$$

Zadanie:

Veľkosť rýchlosti vlaku po odchode zo stanice rovnomerne narastala a po čase $t_1 = 3\,\mathrm{min}$ dosiahla hodnotu $v_1 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trať je zakrivená a polomer zakrivenia sa rovná $R = 800\,\mathrm{m}$. Určte veľkosť tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia v čase $t_2 = 2\,\mathrm{min}$ od odchodu zo stanice.

Riešenie:

Tangenciálne zrýchlennie udáva zmenu veľkosti rýchlosti

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

pri konštantnom a_t

$$a_t = \frac{v_1}{t_1} = \frac{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{180\,\mathrm{s}} = 0{,}1111\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

veľkosť rýchlosti v čase t_2

$$v_2 = a_t t_2 = \frac{v_1 t_2}{t_1}$$

Normálové zrýchlenie udáva zmenu smeru rýchlosti

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

normálové zrýchlenie v čase t_2

$$a_n = \frac{v_1^2 t_2^2}{R t_1^2} = \frac{(20\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2\,(120\,\mathrm{s})^2}{800\,\mathrm{m}\,(180\,\mathrm{s})^2} = 0{,}2222\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Celkové zrýchlenie

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

celkové zrýchlenie v čase t_2

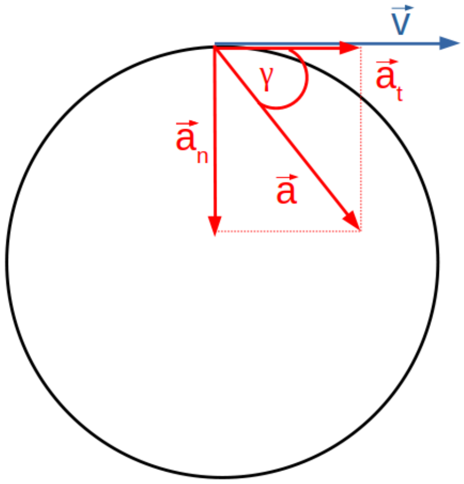
$$a = \sqrt{\left(\frac{v_1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{v_1^2 t_2^2}{R t_1^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{180\,\mathrm{s}}\right)^2 + \left(\frac{(20\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2\,(120\,\mathrm{s})^2}{800\,\mathrm{m}\,(180\,\mathrm{s})^2}\right)^2} = 0{,}2484\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Zadanie:

Častica sa začala pohybovať po kružnici s konštantným uhlovým zrýchlením α. V ktorom čase od začiatku pohybu bude vektor zrýchlenia častice zvierať s vektorom jej rýchlosti uhol γ?

(Vypočítajte pre hodnoty $\alpha = 0{,}04\,\mathrm{s}^{-2}$, $\gamma = 45°$)

Riešenie:



Tangenciálne zrýchlenie pri pohybe po kružnici

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

Uhlová rýchlosť pri konštantnom uhlovom zrýchlení

$$\omega = \alpha t$$

Normálové zrýchlenie

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2 R^2}{R} = \alpha^2 t^2 R$$

Pre uhol medzi rýchlosťou a zrýchením častice platí

$$\tan\gamma = \frac{a_n}{a_t}$$

$$\tan\gamma = \frac{\alpha^2 t^2 R}{R\alpha} = \alpha t^2$$

Pre čas platí

$$t = \sqrt{\frac{\tan\gamma}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\tan 45°}{0{,}04\,\mathrm{s}^{-2}}} = 5\,\mathrm{s}$$

Zadanie:

Koleso polomeru $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$ sa otáča tak, že závislosť uhla pootočenia od času vyjadruje rovnica $\varphi = A + Bt + Ct^3$, kde $B = 2\,\mathrm{s}^{-1}$, $C = 1\,\mathrm{s}^{-3}$. Pre body, ktoré ležia na obvode kolesa nájdite v čase $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ obvodovú rýchlosť, uhlové zrýchlenie, tangenciálne a normálové zrýchlenie.

Riešenie:

Uhlová rýchlosť

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(A + Bt + Ct^3)}{\mathrm{d}t} = B + 3Ct^2 = \left[2\,\mathrm{s}^{-1} + 3\,(1\,\mathrm{s}^{-3})\,(2\,\mathrm{s})^2\right] = 14\,\mathrm{s}^{-1}$$

Uhlové zrýchlenie

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(B + 3Ct^2)}{\mathrm{d}t} = 6Ct = 6(1\,\mathrm{s}^{-3})\,(2\,\mathrm{s}) = 12\,\mathrm{s}^{-2}$$

Obvodová rýchlosť

$$v = \omega R = (B + 3Ct^2)R = \left[2\,\mathrm{s}^{-1} + 3\,(1\,\mathrm{s}^{-3})\,(2\,\mathrm{s})^2\right]0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}4\,\mathrm{m\,s}^{-1}$$

Tangeniciálne zrýchlenie

$$a_t = \alpha R = 12\,\mathrm{s}^{-2}\,0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}2\,\mathrm{m\,s}^{-2}$$

Normálové zrýchlenie

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}4\,\mathrm{m\,s}^{-1})^2}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 19{,}6\,\mathrm{m\,s}^{-2}$$

Zadanie:

Hmotný bod koná priamočiary pohyb tak, že jeho zrýchlenie s časom rovnomerne rastie a za čas $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ pohybu narastie z nulovej hodnoty na $a_1 = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Aká je rýchlosť pohybu hmotného bodu v čase $t_2 = 20\,\mathrm{s}$ a akú dráhu hmotný bod za tento čas vykonal, keď v čase $t = 0$ bol v pokoji?

Riešenie:

Zrýchlenie hmotného bodu rovnomerne rastie

$$a = kt$$

Z nuly na hodnotu a_1 narastie za čas t_1

$$a_1 = kt_1 \implies k = \frac{a_1}{t_1}$$

Zrýchlenie hmotného bodu

$$a = \frac{a_1 t}{t_1}$$

Rýchlosť hmotného bodu

$$v = \int a\,dt = \int \frac{a_1 t}{t_1}\,dt = \frac{a_1 t^2}{2t_1} + c_1$$

Rýchlosť narastá z nulovej hodnoty

$$v(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

Rýchlosť hmotného bodu v čase t_2

$$v_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2t_1} = \frac{5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,(20\,\mathrm{s})^2}{2\,.\,10\,\mathrm{s}} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Dráha hmotného bodu

$$s = \int v\,dt = \int \frac{a_1 t^2}{2t_1}\,dt = \frac{a_1 t^3}{6t_1} + c_2$$

Prejdená dráha na počiatku bola nulová

$$s(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

Dráha hmotného bodu v čase t_2

$$s_2 = \frac{a_1 t_2^3}{6t_1} = \frac{5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,(20\,\mathrm{s})^3}{6\,.\,10\,\mathrm{s}} = 666{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Zrýchlenie pri priamočiarom pohybe častice rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty a_0 v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ na nulovú hodnotu behom času t_1. Aká je rýchlosť v_1 častice v čase t_1 a akú dráhu s_1 za tento čas prešla, keď na začiatku bola v pokoji?

(Vypočítajte pre hodnoty $a_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t_1 = 20\,\mathrm{s}$).

Riešenie:

Zrýchlenie častice rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty a_0

$$a = a_0 - kt$$

V čase t_1 klesne na nulu

$$0 = a_0 - kt_1 \implies k = \frac{a_0}{t_1}$$

Zrýchlenie častice

$$a = a_0 - \frac{a_0 t}{t_1}$$

Rýchlosť častice

$$v = \int a\,dt = \int a_0 - \frac{a_0 t}{t_1}\,dt = a_0 t - \frac{a_0 t^2}{2t_1} + c_1$$

Rýchlosť častice narastá z nulovej hodnoty

$$v(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

Rýchlosť častice v čase t_1

$$v_2 = a_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2t_1} = \frac{a_0 t_1}{2} = \frac{10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ 20\,\mathrm{s}}{2} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Dráha častice

$$s = \int v\,dt = \int a_0 t - \frac{a_0 t^2}{2t_1}\,dt = \frac{a_0 t^2}{2} - \frac{a_0 t^3}{6t_1} + c_2$$

Prejdená dráha na počiatku bola nulová

$$s(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

Dráha častice v čase t_1

$$s_2 = \frac{a_0 t_1^2}{2} - \frac{a_0 t_1^3}{6t_1} = \frac{a_0 t_1^2}{3} = \frac{10\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ (20\,\mathrm{s})^2}{3} = 1333{,}3\,\mathrm{m}$$

Zadanie:

Vlak sa rozbieha z pokoja po priamej trati so zrýchlením, ktoré s časom rovnomerne rastie od nulovej hodnoty tak, že v čase t_1 má hodnotu a_1. Vypočítajte rýchlosť vlaku v_1 v čase t_1 a dĺžku dráhy s_1, ktorú za ten čas prešiel.
(Vypočítajte pre hodnoty $a_1 = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t_1 = 100\,\mathrm{s}$).

Riešenie:

Zrýchlenie vlaku rovnomerne rastie

$$a = kt$$

Z nuly na hodnotu a_1 narastie za čas t_1

$$a_1 = kt_1 \implies k = \frac{a_1}{t_1}$$

Zrýchlenie vlaku

$$a = \frac{a_1 t}{t_1}$$

Rýchlosť vlaku

$$v = \int a\,dt = \int \frac{a_1 t}{t_1}\,dt = \frac{a_1 t^2}{2t_1} + c_1$$

Rýchlosť narastá z nulovej hodnoty

$$v(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

Rýchlosť vlaku v čase t_1

$$v_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2t_1} = \frac{a_1 t_1}{2} = \frac{0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ 100\,\mathrm{s}}{2} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Dráha vlaku

$$s = \int v\,dt = \int \frac{a_1 t^2}{2t_1}\,dt = \frac{a_1 t^3}{6t_1} + c_2$$

Prejdená dráha na počiatku bola nulová

$$s(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

Dráha vlaku v čase t_1

$$s_2 = \frac{a_1 t_1^3}{6t_1} = \frac{a_1 t_1^2}{6} = \frac{0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ (100\,\mathrm{s})^2}{6} = 833{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Častica sa pohybuje po kružnici s uhlovým spomalením, ktoré s časom t rovnomerne rastie podľa vzťahu $\alpha = kt$, kde k je záporné číslo. Začiatočná uhlová rýchlosť bola ω_0. O aký uhol φ_1 sa pootočí sprievodič častice za čas t_1 ?

(Vypočítajte pre hodnoty $k = -6\,\mathrm{rad\,s^{-3}}$, $\omega_0 = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $t_1 = 3\,\mathrm{s}$).

Riešenie:

Uhlové spomalenie častice rovnomerne rastie

$$\alpha = kt$$

Uhlová rýchlosť častice

$$\omega = \int \alpha\, dt = \int kt\, dt = \frac{kt^2}{2} + c_1$$

Počiatočná uhlová rýchlosť častice bola ω_0

$$\omega(0) = \omega_0 \implies c_1 = \omega_0$$

Uhlová dráha častice

$$\varphi = \int \omega\, dt = \int \frac{kt^2}{2} + \omega_0\, dt = \frac{kt^3}{6} + \omega_0 t + c_2$$

Počiatočná uhlová dráha častice bola nulová

$$\varphi(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

Uhlová dráha častice čase t_1

$$\varphi_1 = \frac{kt_1^3}{6} + \omega_0 t_1 = \frac{-6\,\mathrm{rad\,s^{-3}}\ (3\,\mathrm{s})^3}{6} + 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\ 3\,\mathrm{s} = 63\,\mathrm{rad}$$