Gravitačné pole

1. *Ako ďaleko sa nachádza Mars od Slnka, ak jeho obežná doba je* $T_M = 1{,}9\,\mathrm{r}$ *a vzdialenosť medzi Slnkom a Zemou je* $a_Z = 1\,\mathrm{AU}$.

Na riešenie je možné použiť tretí Keplerov zákon

$$\frac{T_Z^2}{T_M^2} = \frac{a_Z^3}{a_M^3}\ ,$$

z ktorého vyplýva

$$a_M^3 = a_Z^3 \frac{T_M^2}{T_Z^2}\ .$$

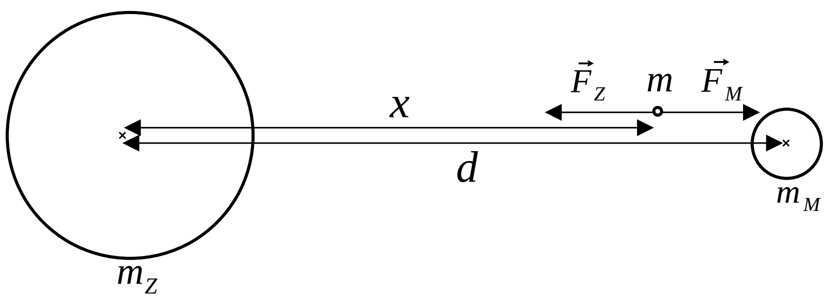
Pre vzdialenosť Marsu od Slnka preto platí

$$a_M = a_Z \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{T_Z^2}}\ ,$$

po dosadení

$$a_M = 1\,\mathrm{AU} \sqrt[3]{\frac{(1{,}9\,\mathrm{r})^2}{(1\,\mathrm{r})^2}} = 1\,\mathrm{AU}\sqrt[3]{1{,}9^2} = 1{,}53\,\mathrm{AU}\ .$$

2. *Ako ďaleko od Zeme na spojnici Zeme a Mesiaca má byť kozmická loď, aby výsledná gravitačná sila pôsobiaca na ňu od Zeme a od Mesiaca bola rovná nule? Vzdialenosť medzi Zemou a Mesiacom je* $d = 384\,000\,\mathrm{km}$ *a hmotnosť Zeme je 81-krát väčšia ako hmotnosť Mesiaca.*



Obr. 1

Na riešenie je možné použiť Newtonov gravitačný zákon

$$\vec{F} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \, .$$

Ak v mieste medzi Zemou a Mesiacom má byť výsledná gravitačná sila nulová

$$\vec{F}_Z + \vec{F}_M = 0 \, ,$$

pretože sily majú opačný smer, musia byť ich veľkosti rovnaké

$$F_Z = F_M \, ,$$

teda pre sily, ktoré pôsobia na kozmickú loď s hmotnosťou m, nachádzajúcu sa vo vzdialenosti x od Zeme, musí platiť

$$\kappa \frac{m_Z m}{x^2} = \kappa \frac{m_M m}{(d-x)^2} \, .$$

Ak je pomer medzi hmotnosťou Zeme a Mesiaca

$$m_Z = 81 m_M \, ,$$

tak potom platí

$$\frac{81}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

a vzdialenosť kozmickej lode od Zeme bude

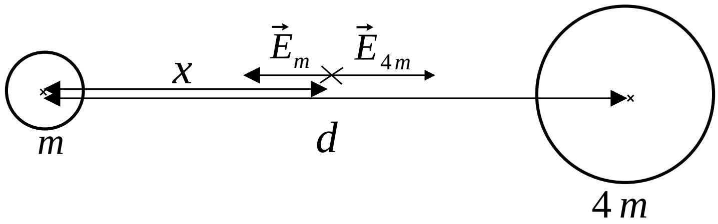
$$x = \frac{9}{10} d \, ,$$

po dosadení

$$x = \frac{9}{10} \, . \, 384\,000\,\mathrm{km} = 345\,600\,\mathrm{km} \, .$$

---

3. *Dve telesá guľového tvaru s hmotnosťami m a $4m$ sú navzájom vo vzdialenosti d. V ktorom bode medzi nimi bude výsledná intenzita gravitačného poľa nulová a aký bude potenciál spoločného gravitačného poľa v tomto bode?*



Obr. 2

Intenzita gravitačného poľa guľového telesa s hmotnosťou m v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$ je

$$\vec{E} = -\kappa \frac{m}{r^3} \vec{r} \, .$$

Ak má byť výsledná intenzita gravitačného poľa v mieste medzi dvoma telesami nulová

$$\vec{E}_m + \vec{E}_{4m} = 0 \, ,$$

pretože intenzity majú opačný smer, musia byť ich veľkosti rovnaké

$$E_m = E_{4m} \, ,$$

teda musí platiť

$$\kappa \frac{m}{x^2} = \kappa \frac{4m}{(d-x)^2} \, ,$$

odkiaľ je možné vyjadriť vzdialenosť od telesa s hmotnosťou m

$$x = \frac{d}{3} \, .$$

Potenciál gravitačného poľa

$$V = -\kappa \frac{m}{r} \, ,$$

je skalárna veličina a výsledný potenciál je súčtom potenciálov v danom mieste od jednotlivých telies

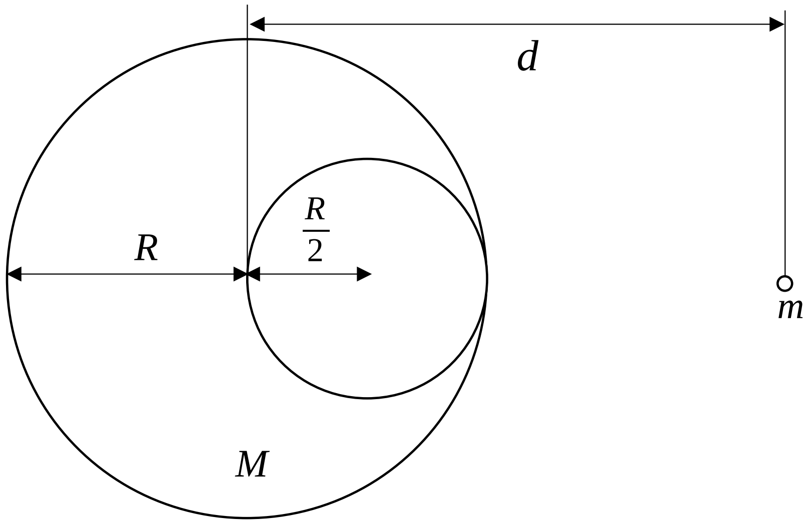
$$V = V_m + V_{4m} \, ,$$

preto bude výsledný potenciál

$$V = -\kappa \frac{m}{x} - \kappa \frac{4m}{d-x} = -\kappa \frac{3m}{d} - \kappa \frac{12m}{2d} = -\kappa \frac{9m}{d} \, .$$

---

4. *Z homogénnej gule s polomerom R a hmotnosťou M bolo vytvorené nové teleso tak, že do gule bola vyvŕtaná dutina guľového tvaru s polomerom $R/2$ a stredom vo vzdialenosti $R/2$ od stredu pôvodnej gule. Akou gravitačnou silou bude pôsobiť nové teleso na hmotný bod s hmotnosťou m nachádzajúci sa v smere dutiny vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej gule?*



Obr. 3

Gravitačná sila, ktorou pôsobila na hmotný bod pôvodná guľa $\vec{F}_0$, bola súčtom gravitačnej sily, ktorou pôsobí nové teleso $\vec{F}$ a gravitačnej sily, ktorou pôsobila vyvŕtaná časť F', preto platí

$$F_0 = F + F' \ .$$

Veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobila pôvodná guľa, je možné vyjadriť z Newtonovho gravitačného zákona ako

$$F_0 = \kappa \frac{mM}{d^2} \ .$$

Hustota materiálu je

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \ ,$$

preto hmotnosť vyvŕtanej časti bola

$$m' = \rho V' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \, \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{M}{8}$$

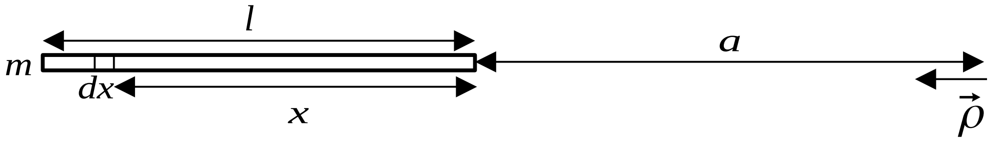
a veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobila vyvŕtaná časť bola

$$F' = \kappa \frac{mm'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} \ .$$

Gravitačnú silu, ktorou pôsobí na hmotný bod nové teleso je preto možné vyjadriť ako

$$F = F_0 - F' = \kappa \frac{mM}{d^2} - \kappa \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \kappa m M \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right] \ .$$

5. *Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa tyče s hmotnosťou m a dĺžkou l v mieste ležiacom na predĺžení tyče vo vzdialenosti a od jej konca.*



Obr. 4

Dĺžková hustota tyče je

$$\lambda = \frac{m}{l}\ ,$$

preto element hmotnosti bude

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

a potenciál elementu hmotnosti bude

$$\mathrm{d}V = -\kappa\frac{\mathrm{d}m}{x+a} = -\kappa\frac{m}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\ .$$

Potenciál celej tyče je možné vypočítať integráciou cez celú hmotnosť tyče ako

$$V = \int_m \mathrm{d}V = -\kappa\frac{m}{l}\int\limits_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -\kappa\frac{m}{l}\left[\ln\left(x+a\right)\right]_0^l = -\kappa\frac{m}{l}\ln\frac{l+a}{a}\ .$$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa je

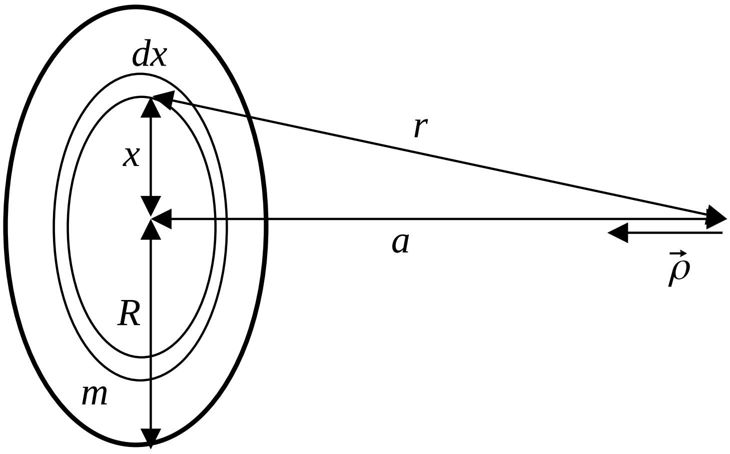
$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V\ ,$$

preto intenzita celej tyče bude

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\vec{\rho} = -\kappa\frac{m}{l}\frac{a}{l+a}\frac{a-l-a}{a^2}\vec{\rho} = \kappa\frac{m}{a(l+a)}\vec{\rho}\ .$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere intenzity gravitačného poľa a pri derivovaní boli použité pravidlá pre deriváciu zloženej funkcie a deriváciu podielu funkcií.

6. *Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa kruhovej dosky s hmotnosťou m a polomerom R v mieste ležiacom na osi kruhovej dosky vo vzdialenosti a od jej stredu.*



Obr. 5

Plošná hustota kruhovej dosky je

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$$

a element plochy tvaru medzikružia

$$\mathrm{d}S = 2\pi x \mathrm{d}x \ ,$$

bude elementom hmotnosti

$$dm = \sigma \mathrm{d}S = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi x \mathrm{d}x = \frac{2m}{R^2} x \mathrm{d}x \ .$$

Keďže veľkosť polohového vektora je možné vyjadriť pomocou Pytagorovej vety

$$r^2 = x^2 + a^2 \ ,$$

potenciál elementu hmotnosti bude

$$dV = -\kappa \frac{dm}{r} = -\kappa \frac{2m}{R^2} x \frac{\mathrm{d}x}{r} = -\kappa \frac{2m}{R^2} x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \ .$$

Potenciál celej dosky je možné vypočítať integráciou cez celú hmotnosť dosky ako

$$V = \int_m \mathrm{d}V = -\kappa \frac{2m}{R^2} \int\limits_0^R \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\kappa \frac{2m}{R^2} [\sqrt{x^2 + a^2}]_0^R = -\kappa \frac{2m}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + a^2} - a \right) \ .$$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa je

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\, V \ ,$$

preto intenzita gravitačného poľa kruhovej dosky bude

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}\vec{\rho} = -\kappa\frac{2m}{R^2}\left(\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} - 1\right)\vec{\rho} = \kappa\frac{2m}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\vec{\rho} \ .$$

kde $\vec{\rho}$ je jednotkový vektor v smere intenzity gravitačného poľa.

---

7. *Akou rýchlosťou treba vystreliť teleso z povrchu Zeme, aby odletelo mimo dosah zemskej príťažlivosti?*

Keď teleso odletí z dosahu zemskej príťažlivosti a zastane, bude mať nulovú gravitačnú potenciálnu energiu aj nulovú kinetickú energiu. Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$E_p + E_k = 0 \ .$$

Gravitačná potenciálna energia telesa s hmotnosťou m na povrchu Zeme bude

$$E_p = -\kappa\frac{mM_Z}{R_Z} \ ,$$

kde M_Z je hmotnosť Zeme a R_Z polomer Zeme. Kinetická energia telesa vystreleného rýchlosťou v z povrchu Zeme bude

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \ ,$$

preto zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva

$$-\kappa\frac{mM_Z}{R_Z} + \frac{mv^2}{2} = 0 \ ,$$

z čoho je možné vyjadriť rýchlosť telesa ako

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} \ .$$

Výsledok je možné vyjadriť aj pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2} \ ,$$

pomocou ktorého pre rýchlosť telesa vyplýva

$$v = \sqrt{2gR_Z}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$v = \sqrt{2\,.\,9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.\,6\,378\,000\,\mathrm{m}} = 11\,186\,\mathrm{m\,s^{-1}}\ .$$

---

8. *Strela bola vystrelená z povrchu Zeme rýchlosťou $v = 1600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vypočítajte rozdiel výšok, aké by teleso dosiahlo za predpokladu, že gravitačné pole je homogénne a za predpokladu, že gravitačné pole je radiálne.*

Riešenie je možné nájsť pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}\ .$$

V homogénnom gravitačnom poli je možné zvoliť potenciálnu energiu na povrchu Zeme E_{p1} ako miesto s nulovou potenciálnou energiou a rýchlosť telesa klesá, kým teleso zastane, teda jeho kinetická energia E_{k2} bude nulová. Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$E_{k1} = E_{p2}\ ,$$

teda platí

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_h\ ,$$

z čoho je možné vyjadriť výška výstupu strely v homogénnom gravitačnom poli ako

$$h_h = \frac{v^2}{2g}\ .$$

V radiálnom gravitačnom poli bude na povrchu Zeme potenciálna energie E_{p1} a vo výške h_r bude potenciálna energia E_{p2}. Zákon zachovania mechanickej energie v radiálnom gravitačnom poli preto bude

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{p2}\ ,$$

teda platí

$$\frac{mv^2}{2} - \kappa\frac{mM_Z}{R_Z} = -\kappa\frac{mM_Z}{R_Z + h_r}\ ,$$

čo je možné upraviť pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa\frac{M_Z}{R_Z^2}\ ,$$

na tvar

$$\frac{mv^2}{2} = mgR_Z \frac{h_r}{R_Z + h_r} \ ,$$

z ktorého je možné vyjadriť výšku výstupu strely v radiálnom gravitačnom poli ako

$$h_r = \frac{v^2 R_Z}{2gR_Z - v^2} \ .$$

Rozdiel výšok v homogénnom a radiálnom poli teda bude

$$\Delta h = h_r - h_h = \frac{v^2 R_Z}{2gR_Z - v^2} - \frac{v^2}{2g} \ ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta h = \frac{(1600\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 \ . \ 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{2 \ . \ 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \ . \ 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} - (1600\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2} - \frac{(1600\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \ . \ 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 2725\,\mathrm{m} \ .$$

---

9. *Vypočítajte kinetickú energiu telesa s hmotnosťou* $m = 70\,\mathrm{kg}$*, ktoré dopadne na povrch Zeme z výšky* $h = 10\,\mathrm{km}$*, ak gravitačné pole Zeme nepovažujeme za homogénne.*

Riešenie je možné nájsť pomocou zákona zachovania mechanickej energie

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \ .$$

Ak počiatočná kinetická energia telesa E_{k1} bude nulová, zákon zachovania mechanickej energie bude mať tvar

$$E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \ .$$

Potenciálna energia telesa vo výške h nad povrchom Zeme sa rovná

$$E_{p1} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h}$$

a potenciálna energia telesa na povrchu Zeme sa rovná

$$E_{p2} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z} \ .$$

Zákon zachovania mechanickej energie preto bude mať tvar

$$-\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h} = E_{k2} - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} \ ,$$

z čoho pre kineticú energiu pri dopade vyplýva

$$E_k = -\kappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z + h} - \frac{1}{R_Z} \right) .$$

Pomocou gravitačného zrýchlenia

$$g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

je možné vyjadriť kinetickú energiu ako

$$E_k = m g R_Z \frac{h}{R_Z + h} ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$E_k = 70\,\mathrm{kg} \; . \; 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \; . \; 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \; . \; \frac{10^4\,\mathrm{m}}{6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 10^4\,\mathrm{m}} = 6{,}856 \cdot 10^6\ \mathrm{J} .$$

---

10. *Ako vysoko musí byť družica nad rovníkom, aby sa pri svojom pohybe nachádzala stále nad tým istým miestom?*

Družica s hmotnosťou m sa pohybuje po kružnici s polomerom $R_Z + h$, gravitačná sila Zeme pôsobí na družicu ako dostredivá sila, teda platí

$$F_g = F_d ,$$

čo je možné prepísať na tvar

$$\kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} = m \frac{v^2}{R_Z + h} ,$$

kde M_Z je hmotnosť a R_Z polomer Zeme. Pre rýchlosť družice z toho vyplýva

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}} .$$

Aby sa družica nachádzala stále nad tým istým miestom, musí byť jej uhlová rýchlosť rovnaká ako uhlová rýchlosť Zeme

$$\omega_d = \omega_Z ,$$

preto musí platiť

$$\frac{v}{R_Z + h} = \frac{2\pi}{T_Z} ,$$

po dosadení rýchlosti družice

$$\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{(R_Z + h)^3}} = \frac{2\pi}{T_Z} \ .$$

Pre výšku družice vyplýva

$$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z T_Z^2}{4\pi^2}} - R_Z \ ,$$

po dosadení číselných hodnôt

$$h = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \ .\ 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \ .\ (3{,}1536 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}} - 6{,}371 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \ ,$$

výška družice bude

$$h = 35{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \ .$$