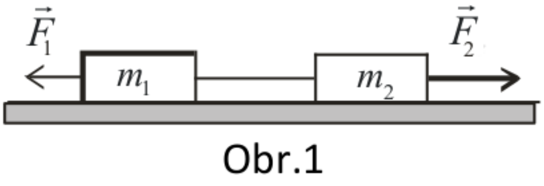
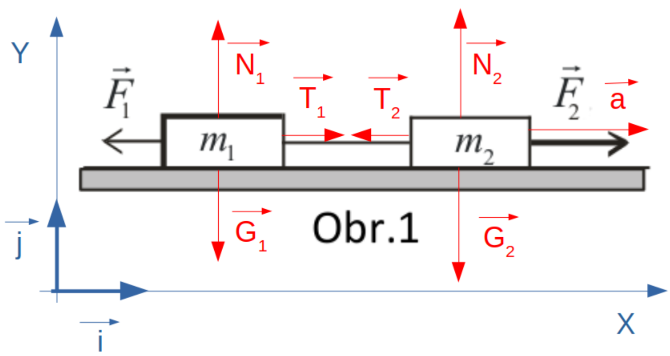
Zadanie:

Po ideálne hladkej rovine sa pohybujú dve telesá hmotnosti m_1 a m_2. Spojené sú lankom zanedbateľnej hmotnosti. Na telesá pôsobia sily $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ podľa obr.1, pričom $\vec{F}_2 > \vec{F}_1$. Nájdite silu, ktorá napína niť a zrýchlenie sústavy.



Riešenie:



Zrýchlenie všetkých telies je rovnaké

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$$

2. Newtonov zákon dynamiky

$$\vec{F}_1 + \vec{T}_1 + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}$$

Rovnice skalárne vynásobíme $\vec{i}$ a $\vec{j}$ a využijeme rovnosti

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

výsledkom je sústava rovníc

$$-F_1 + T_1 = m_1 a$$

$$N_1 - G_1 = 0$$

$$F_2 - T_2 = m_2 a$$

$$N_2 - G_2 = 0$$

Vo vertikálnom smere je zrýchlenie nulové

$$N_1 = G_1$$

$$N_2 = G_2$$

3. Newtonov zákon dynamiky

$$\vec{T_1} = -\vec{T_2}$$

$$T_1 = T_2 = T$$

V horizontálnom smere platí

$$-F_1 + T = m_1 a$$

$$F_2 - T = m_2 a$$

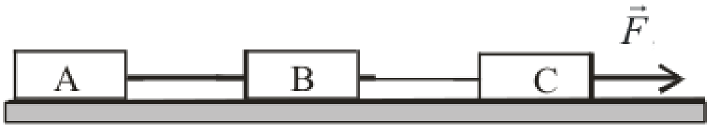
Riešenie sústavy rovníc

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_1 F_2 + m_2 F_1}{m_1 + m_2}$$

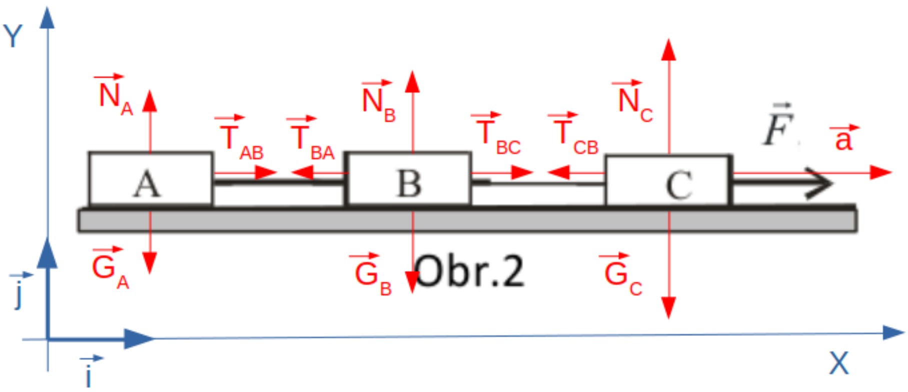
Zadanie:

Telesá na obr.2 majú hmotnosti $m_A = 10\,\mathrm{kg}$, $m_B = 15\,\mathrm{kg}$, $m_C = 20\,\mathrm{kg}$. Sila $F = 50\,\mathrm{N}$ pôsobí na teleso C. Určte zrýchlenie sústavy a silu pôsobiacu v každom spoji. Hmotnosť spojov je zanedbateľná, trenie neuvažujeme.



Obr.2

Riešenie:



Zrýchlenie všetkých telies je rovnaké

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a}$$

2. Newtonov zákon dynamiky

$$\vec{T}_{AB} + \vec{G}_A + \vec{N}_A = m_A\vec{a}$$

$$\vec{T}_{BA} + \vec{T}_{BC} + \vec{G}_B + \vec{N}_B = m_B\vec{a}$$

$$\vec{F} + \vec{T}_{CB} + \vec{G}_C + \vec{N}_C = m_C\vec{a}$$

Rovnice skalárne vynásobíme $\vec{i}$ a $\vec{j}$ a využijeme rovnosti

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

výsledkom je sústava rovníc

$$T_{AB} = m_A a$$

$$N_A - G_A = 0$$

$$-T_{BA} + T_{BC} = m_B a$$

$$N_B - G_B = 0$$

$$F - T_{CB} = m_C a$$

$$N_C - G_C = 0$$

Vo vertikálnom smere je zrýchlenie nulové

$$N_A = G_A$$

$$N_B = G_B$$

$$N_C = G_C$$

3. Newtonov zákon dynamiky

$$\vec{T}_{AB} = -\vec{T}_{BA}$$

$$T_{AB} = T_{BA}$$

$$\vec{T}_{BC} = -\vec{T}_{CB}$$

$$T_{BC} = T_{CB}$$

V horizontálnom smere platí

$$T_{AB} = m_A a$$

$$-T_{AB} + T_{BC} = m_B a$$

$$F - T_{BC} = m_C a$$

Riešenie sústavy rovníc

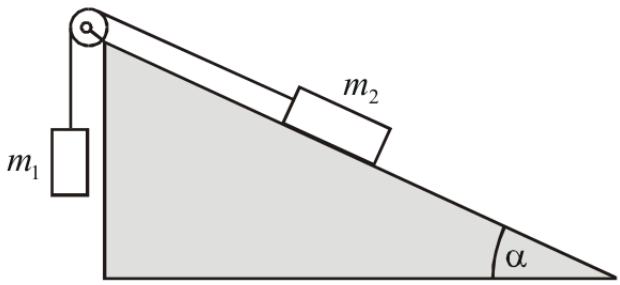
$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C} = \frac{50\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg} + 20\,\mathrm{kg}} = 1{,}1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$T_{AB} = \frac{F m_A}{m_A + m_B + m_C} = \frac{50\,\mathrm{N}\;10\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg} + 20\,\mathrm{kg}} = 11{,}1\,\mathrm{N}$$

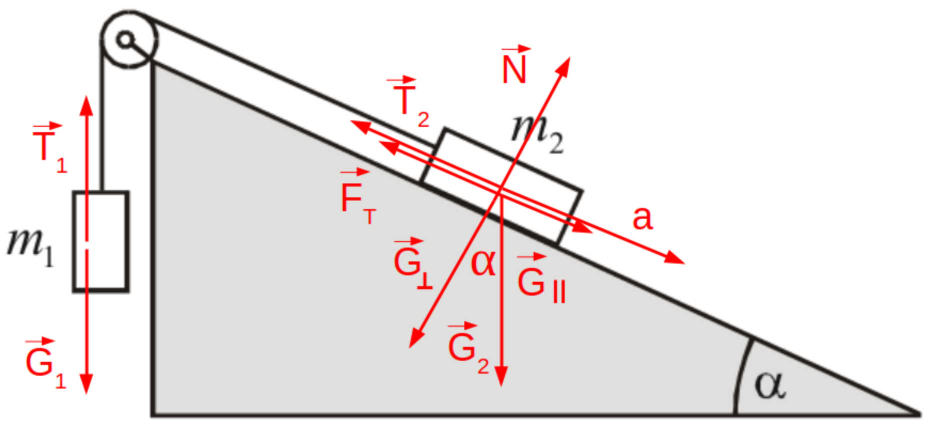
$$T_{BC} = \frac{F(m_A + m_B)}{m_A + m_B + m_C} = \frac{50\,\mathrm{N}\;(10\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg})}{10\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg} + 20\,\mathrm{kg}} = 27{,}8\,\mathrm{N}$$

Zadanie:

Telesá m_1 a m_2 sú spojené lankom prechádzajúcim cez kladku podľa obrázku. Faktor trenia medzi telesom m_2 a naklonenou rovinou zvierajúcou s horizontálou uhol α je μ. Odvoďte vzťah pre zrýchlenie telies a vyjadrite silu T, ktorá napína lanko. Hmotnosť kladky a lanka je zanedbateľná a kladka nemá žiadne trenie.



Riešenie:



Tiažovú silu telesa rozložíme do zložiek

$$\vec{G}_2 = \vec{G}_{||} + \vec{G}_{\perp}$$

$$G_{||} = G_2 \sin \alpha$$

$$G_{\perp} = G_2 \cos \alpha$$

Trecia sila

$$F_T = \mu G_{\perp} = \mu G_2 \cos \alpha$$

2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare

$$\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp} + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{F}_T = m_2 \vec{a}_2$$

2. Newtonov zákon v skalárnom tvare

$$-G_1 + T_1 = m_1 a$$

$$G_{\parallel} - T_2 - F_T = m_2 a$$

$$-G_{\perp} + N = 0$$

3. Newtonov zákon

$$T_1 = T_2 = T$$

Tiažová sila

$$G_1 = m_1 g$$

$$G_2 = m_2 g$$

Sústava dvoch pohybových rovníc

$$-m_1 g + T = m_1 a$$

$$m_2 g \sin\alpha - T - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 a$$

Zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Sila napínajúca lanko

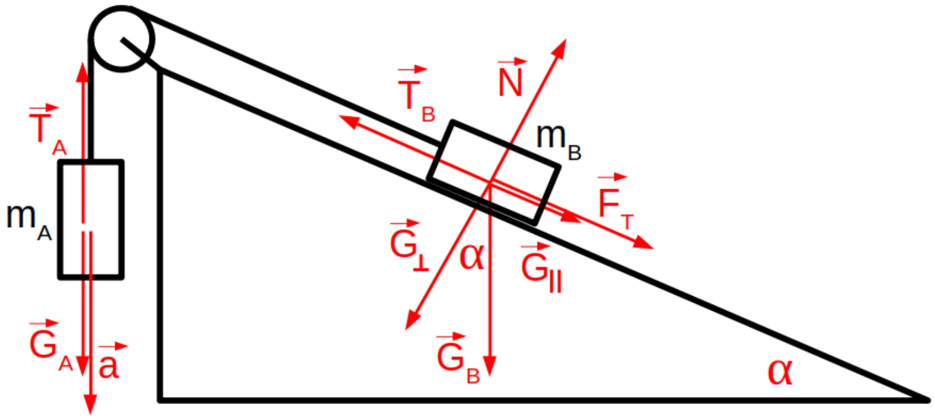
$$-m_1 g + T = m_1 a \implies T = m_1 a + m_1 g$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)}{m_1 + m_2}$$

Zadanie:

Telesá A a B s rovnakými hmotnosťami $m = 2\,\mathrm{kg}$ sú spojené niťou preloženou cez voľne sa otáčajúcu kladku. Hmotnosti nite a kladky sú zanedbateľné. Naklonená rovina zviera s horizontálou uhol $\alpha = 30°$. Určte zrýchlenie telies a silu, ktorou je napínaná niť, ak a) medzi telesom a naklonenou rovinou nie je trenie, b) medzi telesom B a naklonenou rovinou je trenie s faktorom trenia $\mu = 0{,}1$.

Riešenie:



Tiažovú silu telesa rozložíme do zložiek

$$\vec{G}_B = \vec{G}_{||} + \vec{G}_\perp$$

$$G_{||} = G_B \sin\alpha$$

$$G_\perp = G_B \cos\alpha$$

Trecia sila

$$F_T = \mu G_\perp = \mu G_B \cos\alpha$$

2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare

$$\vec{G}_A + \vec{T}_A = m_A \vec{a}_A$$

$$\vec{G}_{||} + \vec{G}_\perp + \vec{N} + \vec{T}_B + \vec{F}_T = m_B \vec{a}_B$$

Hmotnoť telies je rovnaká

$$m_A = m_B = m$$

Tiažová sila je rovnaká

$$\vec{G}_A = \vec{G}_B = \vec{G} = m\vec{g}$$

3. Newtonov zákon

$$T_1 = T_2 = T$$

Sústava dvoch pohybových rovníc

$$mg - T = ma$$

$$-mg\sin\alpha + T - \mu mg\cos\alpha = ma$$

Zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{g(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2}$$

Sila napínajúca lanko

$$mg - T = ma \implies T = mg - ma$$

$$T = \frac{mg(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2}$$

A:

Trenie zanedbáme

$$\mu = 0$$

Zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{g(1 - \sin\alpha)}{2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}(1 - \sin 30^\circ)}{2} = 2{,}45\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Sila napínajúca lanko

$$T = \frac{mg(1 + \sin\alpha)}{2} = \frac{2\,\mathrm{kg}\;9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}(1 + \sin 30^\circ)}{2} = 14{,}72\,\mathrm{N}$$

B:

Trenie nezanedbáme

$$\mu = 0{,}1$$

Zrýchlenie sústavy

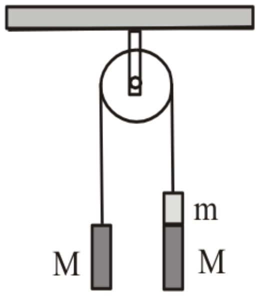
$$a = \frac{g(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}(1 - \sin 30^\circ - 0{,}1\cos 30^\circ)}{2} = 2{,}03\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Sila napínajúca lanko

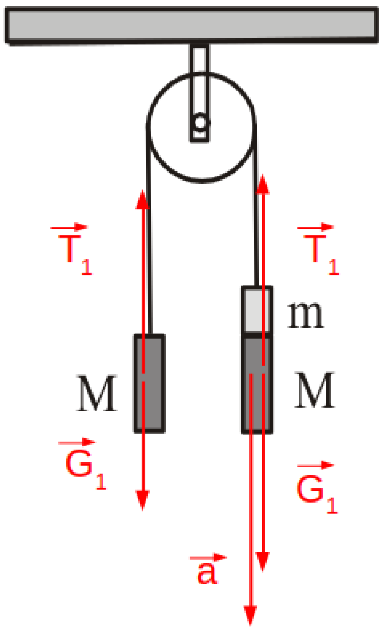
$$T = \frac{mg(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2} = \frac{2\,\mathrm{kg}\;9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}(1 + \sin 30^\circ + 0{,}1\cos 30^\circ)}{2} = 15{,}56\,\mathrm{N}$$

Zadanie:

Na koncoch nite prevesenej cez kladku, ktorej hmotnosti zanedbávame, visia rovnaké závažia hmotnosti M. K jednému závažiu pridáme prívažok hmotnosti m. Akú dráhu prejde závažie za čas t po uvoľnení kladky, keď trenie a odpor vzduchu neuvažujeme?



Riešenie:



2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare

$$\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = M\vec{a}$$

$$\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = (M + m)\vec{a}$$

2. Newtonov zákon v skalárnom tvare

$$-G_1 + T_1 = Ma$$

$$G_2 - T_2 = (M + m)a$$

3. Newtonov zákon

$$\vec{T_1} = -\vec{T_2}$$

$$T_1 = T_2 = T$$

Tiaž telies

$$G_1 = Mg$$

$$G_2 = (m + M)g$$

Sústava rovníc

$$-Mg + T = Ma$$

$$(m + M)g - T = (m + M)a$$

Zrýchlenie sústavy

$$a = \frac{mg}{2M + m}$$

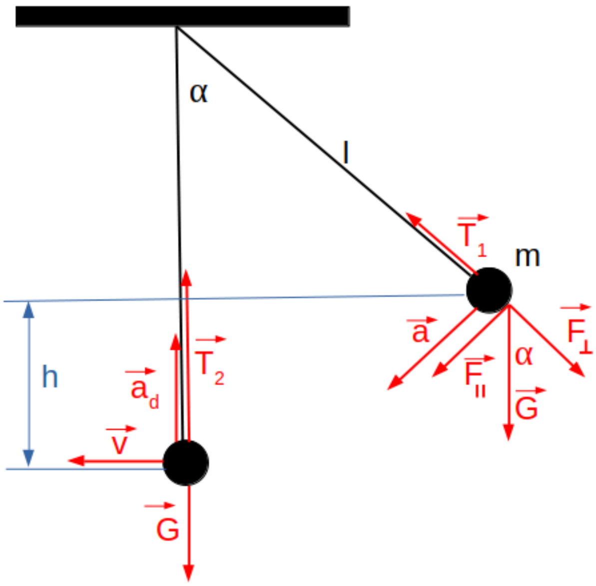
Prejdená dráha

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{mgt^2}{2(2M + m)}$$

Zadanie:

Závažie o hmotnosti m zavesené na niti dĺžky l kýva s maximálnou uhlovou výchylkou α. Aká sila F_1 napína niť v krajných polohách a aká sila F_2 pri prechode najnižšou polohou? Pri akom uhle α je sila F_2 napínajúca niť v najnižšej polohe závažia dvojnásobkom jeho tiaže?

Riešenie:



2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare pre teleso v krajnej polohe

$$\vec{G} + \vec{T}_1 = m\vec{a}$$

2. Newtonov zákon v skalárnom tvare pre teleso v krajnej polohe

$$mg\cos\alpha - T_1 = 0$$

$$mg\sin\alpha = ma$$

Sila napínajúca lanko v krajnej polohe

$$T_1 = mg\cos\alpha$$

Výška telesa

$$h = l - l\cos\alpha$$

Zákon zachovania mechanickej energie

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Rýchlosť telesa v najnižšej polohe

$$v = \sqrt{2gh}$$

2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare pre teleso v najnižšej polohe

$$\vec{G} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_d$$

2. Newtonov zákon v skalárnom tvare pre teleso v najnižšej polohe

$$mg - T_2 = -ma_d$$

Dostredivé zrýchlenie

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{2gh}{l} = 2g(1 - \cos\alpha)$$

Sila napínajúca lanko v najnižšej polohe

$$T_2 = mg + ma_d = mg(3 - 2\cos\alpha)$$

Pri akom uhle je sila v najnižšej polohe dvojnásobok tiaže?

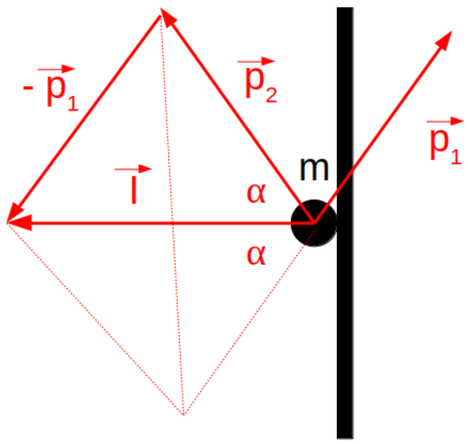
$$T_2 = 2mg$$

$$mg(3 - 2\cos\alpha) = 2mg \implies \cos\alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = 60^\circ$$

Zadanie:

Aký impulz udelí stena pružnej guli hmotnosti $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, ktorá na ňu narazí v smere zvierajúcom s normálou uhol $\alpha = 60°$, rýchlosťou $v_0 = 20\,\mathrm{ms^{-1}}$?

Riešenie:



Impulz sily

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

Impulzová veta

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$$

Pružná zrážka

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = const.$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$p_2 = p_1 = p = mv$$

Z obrázku vyplýva

$$\cos\alpha = \frac{I}{2p}$$

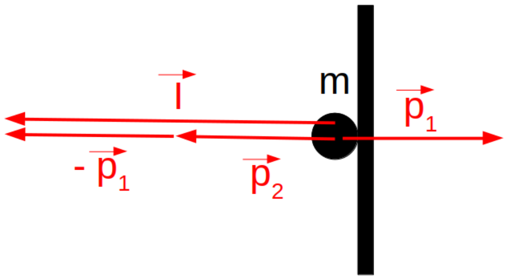
Impulz steny

$$I = 2p\cos\alpha = 2mv\cos\alpha = 2\,.\,0{,}2\,\mathrm{kg}\,.\,20\,\mathrm{ms^{-1}}\cos 60° = 4\,\mathrm{N\,s}$$

Zadanie:

Molekula hmotnosti $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ narazí kolmo na stenu nádoby rýchlosťou $v = 600\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Náraz je dokonale pružný a molekula sa odrazí bez straty rýchlosti. Vypočítajte veľkosť impulzu sily pri tomto náraze.

Riešenie:



Impulz sily

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

Impulzová veta

$$\vec{I} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$$

$$\vec{I} = \vec{p_2} + (-\vec{p_1})$$

Pružná zrážka

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = const.$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$p_2 = p_1 = p = mv$$

Z obrázku vyplýva

$$I = 2p$$

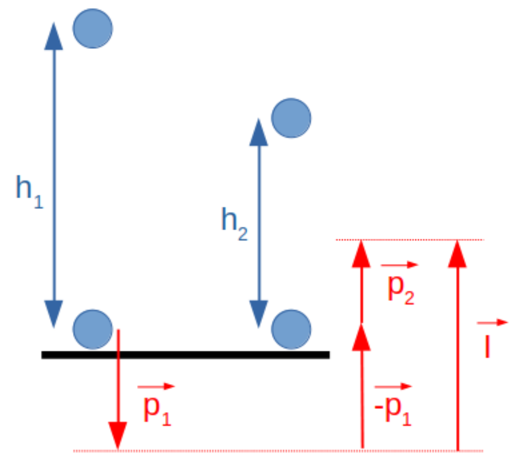
Impulz steny

$$I = 2mv = 2 \,.\, 4{,}65 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \,.\, 600\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 5{,}58 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{N\,s}$$

Zadanie:

Lopta hmotnosti $m = 0{,}4\,\mathrm{kg}$ padne kolmo na podložku z výšky $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ a odrazí sa po nepružnom náraze do výšky $h_2 = 0{,}8\,\mathrm{m}$. Vypočítajte veľkosť impulzu sily pôsobiacej pri tomto náraze.

Riešenie:



Zákon zachovania celkovej mechanickej energie pri dopade

$$E_{p1} = E_{k1}$$
$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Zákon zachovania celkovej mechanickej energie pri odraze

$$E_{k2} = E_{p2}$$
$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2$$
$$v_2 = \sqrt{2gh_2}$$

Impulzová veta

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$$

Impulz sily

$$I = p_1 + p_2 = mv_1 + mv_2 = m\sqrt{2gh_1} + m\sqrt{2gh_2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$I = 0{,}4\,\mathrm{kg}\sqrt{2.9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}.1\,\mathrm{m}} + 0{,}4\,\mathrm{kg}\sqrt{2.9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}.0{,}8\,\mathrm{m}} = 3{,}36\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Na teleso hmotnosti $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ ležiace na vodorovnej podložke pôsobí vo vodorovnom smere sila, ktorej časová závislosť je $F(t) = A + Bt$, kde $A = 0{,}2\,\mathrm{N}$ a $B = 0{,}4\,\mathrm{N\,s^{-1}}$. Aký je impulz sily za čas $t_1 = 5\,\mathrm{s}$?

Riešenie:

Definícia impulzu sily

$$I = \int_0^{t_1} F(t)dt = \int_0^{t_1} (A + Bt)\,dt = At_1 + \frac{At_1^2}{2}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$I = 0{,}2\,\mathrm{N}.5\,\mathrm{s} + \frac{0{,}4\,\mathrm{N\,s^{-1}}.(5\,\mathrm{s})^2}{2} = 6\,\mathrm{N\,s}$$

Zadanie:

Na hmotný bod hmotnosti $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ pôsobia sily $\vec{F_1} = 2\vec{i}\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 2\vec{j}\,\mathrm{N}$. Hmotný bod sa v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ nachádza v počiatku súradného systému a jeho rýchlosť je nulová. Určte polohu telesa v čase $t_1 = 2\,\mathrm{s}$.

Riešenie:

Výsledná sila pôsobiaca na hmotný bod

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

2. Newtonov zákon

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Zrýchlenie hmotného bodu

$$\vec{a} = \frac{\vec{F_1}}{m} + \frac{\vec{F_2}}{m}$$

Rýchlosť hmotného bodu

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \int \left(\frac{\vec{F_1}}{m} + \frac{\vec{F_2}}{m}\right) dt = \frac{\vec{F_1}t}{m} + \frac{\vec{F_2}t}{m} + c_1$$

Rýchlosť na počiatku bola nulová

$$\vec{v}(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

Poloha hmotného bodu

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int \left(\frac{\vec{F_1}t}{m} + \frac{\vec{F_2}t}{m}\right) dt = \frac{\vec{F_1}t^2}{2m} + \frac{\vec{F_2}t^2}{2m} + c_2$$

Poloha na počiatku bola nulová

$$\vec{r}(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

Poloha hmotného bodu v čase t_1

$$\vec{r} = \frac{\vec{F_1}t_1^2}{2m} + \frac{\vec{F_2}t_1^2}{2m} = \frac{2\,\mathrm{N}\ .\ (2\,\mathrm{s})^2}{2\ .\ 0{,}2\,\mathrm{kg}}\vec{i} + \frac{2\,\mathrm{N}\ .\ (2\,\mathrm{s})^2}{2\ .\ 0{,}2\,\mathrm{kg}}\vec{j} = 20\,\mathrm{m}\,\vec{i} + 20\,\mathrm{m}\,\vec{j}$$

Zadanie:

Hmotný bod hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ sa pohybuje účinkom sily F tak, že jeho dráha je vyjadrená funkciou $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, kde $C = 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $D = -0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-3}}$ a t je čas. Vypočítajte veľkosť sily pôsobiacej na hmotný bod v čase $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ a určte čas t_0, kedy bude sila F rovná nule.

Riešenie:

Rýchlosť hmotného bodu

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)}{\mathrm{d}t} = B + 2Ct + 3Dt^2$$

Zrýchlenie hmotného bodu

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(B + 2Ct + 3Dt^2)}{\mathrm{d}t} = 2C + 6Dt$$

2. Newtonov zákon

$$F(t) = ma(t) = m(2C + 6Dt)$$

Sila v čase t_1

$$F(t_1) = m(2C + 6Dt_1)$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$F(t_1) = 5\,\mathrm{kg}(2.1\,\mathrm{m\,s^{-2}} + 6.(-0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-3}}).2\,\mathrm{s}) = -2\,\mathrm{N}$$

Sila bude nulová v čase t_0

$$F(t_0) = 0$$

$$m(2C + 6Dt_0) = 0$$

$$t_0 = \frac{-2C}{6D}$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$t_0 = \frac{-2.1\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{6.(-0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-3}})} = 1{,}67\,\mathrm{s}$$

Zadanie:

Na teleso hmotnosti m pôsobí v smere osi x sila $F(t) = F_0 - kt$, kde F_0 a k sú konštanty. Vyjadrite zrýchlenie $a(t)$, rýchlosť $v(t)$ a polohu $x(t)$ ako funkcie času, ak v čase $t = 0$ mala častica rýchlosť $v = v_0$ a nachádzala sa v polohe $x = x_0$.

Riešenie:

2. Newtonov zákon

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Zrýchlenie hmotného bodu

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} - \frac{kt}{m}$$

Rýchlosť hmotného bodu

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int \left(\frac{F_0}{m} - \frac{kt}{m}\right)\,dt = \frac{F_0 t}{m} + \frac{kt^2}{2m} + c_1$$

Rýchlosť na počiatku bola v_0

$$v(0) = v_0 \implies c_1 = v_0$$

Rýchlosť hmotného bodu

$$v(t) = \frac{F_0 t}{m} + \frac{kt^2}{2m} + v_0$$

Poloha hmotného bodu

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\frac{F_0 t}{m} - \frac{kt^2}{2m} + v_0\right)\,dt = \frac{F_0 t^2}{2m} - \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + c_2$$

Poloha na počiatku bola x_0

$$x(0) = x_0 \implies c_2 = x_0$$

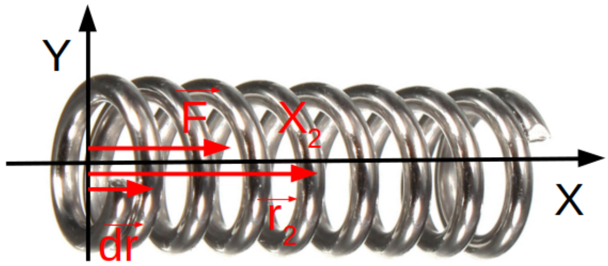
Poloha hmotného bodu

$$x(t) = \frac{F_0 t^2}{2m} - \frac{kt^3}{6m} + v_0 t + x_0$$

Zadanie:

Vypočítajte potenciálnu energiu stlačenej pružiny, keď sme ju stlačili o dĺžku $x_2 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ a keď sme zistili, že na jej stlačenie o $x_1 = 0{,}01\,\mathrm{m}$ je treba silu $F_1 = 2000\,\mathrm{N}$!

Riešenie:



Sila je priamoúmerná skráteniu pružiny

$$F = kx$$

Tuhosť pružiny

$$F_1 = kx_1 \implies k = \frac{F_1}{x_1}$$

Mechanická práca

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Vektor posunutia a vektor sily majú rovnaký smer

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = F dr \cos\alpha = F dr$$

V súradnicovom systéme platí

$$dr = dx$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = x_0$$

Mechanická práca

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\, dr = \int_0^{x_0} F\, dx = \int_0^{x_0} kx\, dx = \frac{kx_0^2}{2}$$

Po dosadení tuhosti pružiny

$$A = \frac{F_1 x_0^2}{2x_1}$$

Potenciálna energia pružiny je rovná práci, ktorú sila vykoná pri jej stlačení

$$E_p = A = \frac{F_1 x_0^2}{2x_1}$$

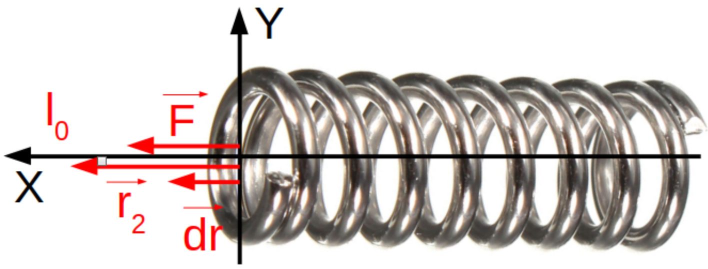
Po dosadení číselných hodnôt

$$E_p = \frac{2000\,\mathrm{N}\ (0{,}1\,\mathrm{m})^2}{2\ .\ 0{,}01\,\mathrm{m}} = 1000\,\mathrm{J}$$

Zadanie:

Oceľová špirála dĺžky $l_0 = 0{,}8\,\mathrm{m}$ sa predĺži silou $F_1 = 20\,\mathrm{N}$ o hodnotu $x_1 = 5\,\mathrm{cm}$. Aká práca sa vykoná, keď sa špirála predĺži o celú svoju pôvodnú dĺžku? (Za predpokladu, dokonalej pružnosti a keď je sila úmerná predĺženiu špirály.)

Riešenie:



Sila je priamoúmerná predĺženiu pružiny

$$F = kx$$

Tuhosť pružiny

$$F_1 = kx_1 \implies k = \frac{F_1}{x_1}$$

Mechanická práca

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Vektor posunutia a vektor sily majú rovnaký smer

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = F dr \cos\alpha = F dr$$

V súradnicovom systéme platí

$$dr = dx$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = l_0$$

Mechanická práca

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr = \int_0^{l_0} F\,dx = \int_0^{l_0} kx\,dx = \frac{kl_0^2}{2}$$

Po dosadení tuhosti pružiny

$$A = \frac{F_1 l_0^2}{2x_1}$$

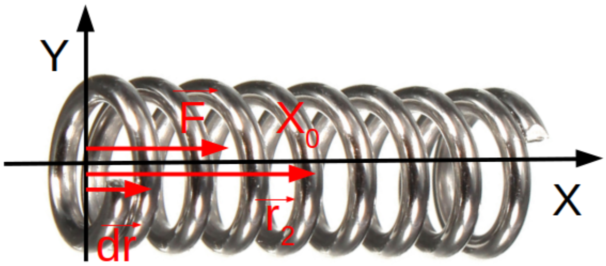
Po dosadení číselných hodnôt

$$A = \frac{20\,\mathrm{N}\ (0{,}8\,\mathrm{m})^2}{2\ .\ 0{,}05\,\mathrm{m}} = 128\,\mathrm{J}$$

Zadanie:

Akú prácu treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o $x_0 = 5\,\mathrm{cm}$, keď na jej stlačenie o $x_1 = 1\,\mathrm{cm}$ treba silu $30\,000\,\mathrm{N}$ a keď platí, že sila je priamoúmerná skráteniu špirály.

Riešenie:



Sila je priamoúmerná skráteniu pružiny

$$F = kx$$

Tuhosť pružiny

$$F_1 = kx_1 \implies k = \frac{F_1}{x_1}$$

Mechanická práca

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vektor posunutia a vektor sily majú rovnaký smer

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha = F dr$$

V súradnicovom systéme platí

$$dr = dx$$

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = x_0$$

Mechanická práca

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\, dr = \int_0^{x_0} F\, dx = \int_0^{x_0} kx\, dx = \frac{kx_0^2}{2}$$

Po dosadení tuhosti pružiny

$$A = \frac{F_1 x_0^2}{2x_1}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$A = \frac{30\,000\,\mathrm{N}\ (0{,}05\,\mathrm{m})^2}{2\ .\ 0{,}01\,\mathrm{m}} = 3750\,\mathrm{J}$$

Zadanie:

Strela letiaca rýchlosťou $v_0 = 400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ vnikne do dreva do hĺbky $h_0 = 0{,}3\,\mathrm{m}$. Akou rýchlosťou by vyletela takáto strela po prerazení dosky z rovnakého dreva hrúbky $h = 0{,}15\,\mathrm{m}$.

Riešenie:

Keď strela zostane v dreve, premení sa celá kinetická energia strely na prácu pri vniknutí do dreva

$$E_{k0} = A_0$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = Fh_0$$

$$F = \frac{mv_0^2}{2h_0}$$

Keď strela vyletí z dreva, premení sa časť kinetickej energia strely na prácu pri prerazení dreva

$$E_{k0} = A + E_k$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = Fh + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2 h}{2h_0} + \frac{mv^2}{2}$$

Rýchlosť pri vyletení z dreva

$$v = v_0\sqrt{\frac{h_0 - h}{h_0}}$$

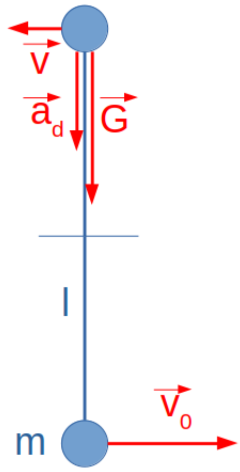
Dosadenie číselných hodnôt

$$v = 400\,\mathrm{m\,s^{-1}}\sqrt{\frac{0{,}3\,\mathrm{m} - 0{,}15\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}}} = 283\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Na niti o dĺžke $l = 1\,\mathrm{m}$ je zavesená guľka o hmotnosti $m = 0{,}3\,\mathrm{kg}$. Akú najmenšiu rýchlosť v o vo vodorovnom smere jej treba udeliť, aby sa vychýlila až do najvyššej polohy a niť bola stále napnutá?

Riešenie:



2. Newtonov zákon pre guľku v najvyššej polohe

$$\vec{G} = m\vec{a}_d$$

$$mg = m\frac{v^2}{l}$$

Rýchlosť guľky v najvyššej polohe

$$v = \sqrt{gl}$$

Zákon zachovania mechanickej energie

$$E_{k0} = E_p + E_k$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Výška guľky

$$h = 2l$$

Rýchlosť guľky v najnižšej polohe

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mgl}{2}$$

$$v_0 = \sqrt{5gl}$$

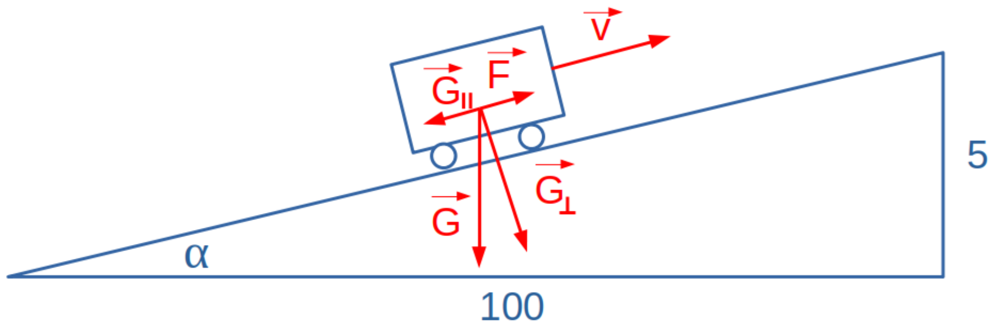
Dosadenie číselných hodnôt

$$v_0 = \sqrt{5\ .\ 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ .\ 1\,\mathrm{m}} = 7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Zadanie:

Vypočítajte výkon motora auta, ktorého hmotnosť je $m = 5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$, keď sa auto pohybuje stálou rýchlosťou $v = 30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ po vozovke s päťpercentným stúpaním! Odpor proti pohybu zanedbajte!

Riešenie:



Rýchlosť auta

$$v = 30\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 8{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Stúpanie vozovky

$$\tan\alpha = 0,05 \implies \alpha = 2{,}86^\circ$$

Výkon auta

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv$$

Sila auta

$$F = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

Výkon auta

$$P = Fv = mgv\sin\alpha$$

Dosadenie číselných hodnôt

$$F = 5\cdot10^3\,\mathrm{kg}\ .\ 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ .\ 8{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}}\ .\ \sin 2{,}86^\circ = 20{,}4\,\mathrm{kW}$$

Zadanie:

Zariadenie na zatĺkanie pilót dvíha baranidlo hmotnosti $m = 200\,\mathrm{kg}$ do výšky $h = 0{,}75\,\mathrm{m}$ 84 razy za minútu. Aký priemerný výkon P_0 musí mať motor poháňajúci zariadenie, keď toto pracuje s účinnosťou $\eta = 70\%$.

Riešenie:

Zariadenie koná prácu

$$A = Fh = mgh$$

Prácu vykoná za čas

$$T = \frac{60\,\mathrm{s}}{84} = 0{,}714\,\mathrm{s}$$

Výkon zariadenia

$$P = \frac{A}{T} = \frac{mgh}{T}$$

Účinnosť sústavy

$$\eta = \frac{P}{P_0}$$

Príkon sústavy

$$P_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{mgh}{\eta T}$$

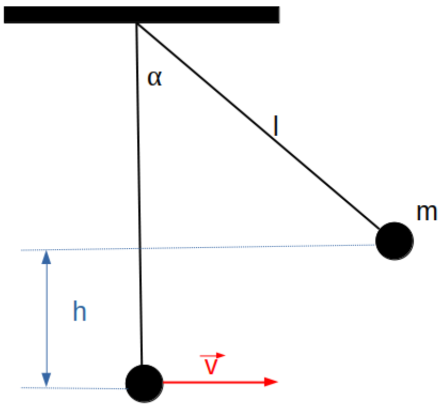
Dosadenie číselných hodnôt

$$P_0 = \frac{200\,\mathrm{kg}\ .\ 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ .\ 0{,}75\,\mathrm{m}}{0{,}7\ .\ 0{,}714\,\mathrm{s}} = 2{,}94\,\mathrm{kW}$$

Zadanie:

Guľka o hmotnosti m visí na niti dĺžky l. Udelíme jej rýchlosť v vo vodorovnom smere. O aký uhol α sa vychýli niť zo zvislej polohy a do akej výšky h vystúpi guľka nad svoju rovnovážnu polohu?

Riešenie:



Zákon zachovania mechanickej energie

$$E_k = E_p$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

Výška do ktorej vystúpi guľka

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Uhol o ktorý sa vychýli niť

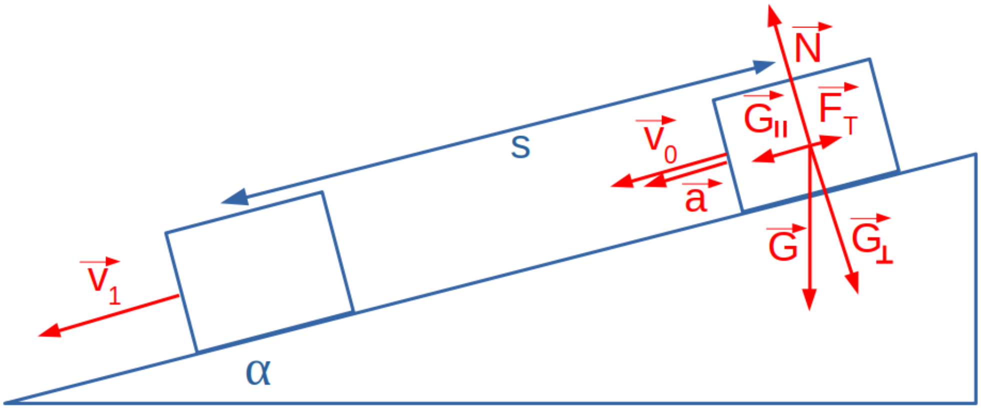
$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l-\frac{v^2}{2g}}{l}\right)$$

Zadanie:

Teleso o hmotnosti m kĺže dolu po naklonenej rovine s uhlom sklonu α. Keď sa posunulo po dráhe s, jeho rýchlosť sa zväčšila zo začiatočnej hodnoty v_0 na hodnotu v_1 . Vypočítajte faktor trenia μ.

Riešenie:



2. Newtonov zákon vo vektorovom tvare

$$\vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp} + \vec{N} + \vec{F}_T = m\vec{a}$$

2. Newtonov zákon v skalárnom tvare

$$G_{\parallel} - F_T = ma$$

$$G_{\perp} - N = 0$$

Sústava rovníc

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$$

$$mg\cos\alpha - N = 0$$

Koeficient trenia

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}$$

Teleso koná rovnomerne zrýchlený pohyb

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t} \implies t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t = \frac{(v_1 - v_0)^2}{2a} + \frac{v_0(v_1 - v_0)}{a} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \implies a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2s}$$

Koeficient trenia

$$\mu = \tan\alpha - \frac{v_1^2 - v_0^2}{2gs\cos\alpha}$$