

VYBRANÉ MATEMATICKÉ METÓDY

Veronika Gáliková
2024

Tento výber matematických nástrojov sa orientuje na tie, ktoré sa veľmi osvedčili vo fyzike a technických vedách. Viaceré sú študentom technických škôl známe minimálne na algoritmickej úrovni. Snahou bolo doplniť intuitívnejší aj hlbší pohľad a prepojenie s rozličnými časťami fyziky. Metódy sú prezentované zjednodušene, ako krok k preklenutiu priepasti medzi vyslovene užívateľským prístupom k matematike a postojom, v ktorom všeobecnosť, stručnosť a matematická korektnosť idú niekedy na úkor zrozumiteľnosti vopred nepoučeným.

Optimalizácia a variačný počet sa zaoberajú princípom "myslieť globálne, konať lokálne". V mnohých systémoch je možné identifikovať celkovú agendu, ktorá sa naplňuje istou voľbou lokálnych postupov. Indexová notácia je veľmi užitočná metóda, keď je potrebné vo výpočtoch organizovať operácie s množstvom dát. Aplikácie vektorovej analýzy vo fyzike a technických vedách sú dosť rozsiahle na to, aby stálo za to mať do notoricky sa opakujúcich výpočtových algoritmov aj intuitívny vhľad. Fourierovská analýza pomáha napríklad ilustrovať význam vlastných funkcií a spektier, detekovať rezonančné javy, porovnať charakter veľmi známych diferenciálnych rovníc, a tiež matematicky uchopiť niektoré javy z kvantovej fyziky. Symetria je mimoriadne efektívny nástroj na organizáciu výpočtov a orientovanie sa medzi matematickými objektmi. Uchopenie jej reprezentácie v matematike stojí trochu štúdia príslušného aparátu, ale umožňuje nadhľad z viacerých rozmerov než sa azda predtým zdalo možné.

Tento projekt získal financovanie z výskumného a inovačného programu EU Horizon 2020 v rámci Marie Skłodowska-Curie Dohody o grante č. 945478.

Obsah

1	Optimalizácia, alebo hádanie agendy	4
1.1	Víťazná stratégia závisí od cieľa hry	4
1.2	Váženie ciest	6
1.3	Aj newtonovská mechanika zahŕňa optimalizáciu	8
1.4	Rozvíjanie nástrojov: Funkcionálna derivácia	8
1.5	Skúšanie nástrojov: Voľná častica v 1D	12
1.6	Skúšanie nástrojov: Častica v 3D, v poli konzervatívnej sily	12
1.7	Skúšanie nástrojov: Harmonické funkcie ako riešenia variačného problému	13
1.8	Skúšanie nástrojov: Vyššie derivácie	14
1.9	Spoločná agenda a jednotiacie princípy	14
2	Indexová notácia	16
2.1	Pravidlá a konvencie pre narábanie s indexmi	16
2.2	Príklady	18
3	Po tokoch vektorových polí, alebo vektorová analýza	21
3.1	Nabla	22
3.2	Gradient	23
3.3	Rotácia	24
3.3.1	Špeciálny význam 3D	24
3.3.2	Miera cirkulácie	25
3.3.3	Gradient necirkuluje	26
3.4	Divergencia	27
3.4.1	Miera zdrojovosti	28
3.4.2	Cirkulácia bez zdrojov	29
3.5	Laplacián	30
3.5.1	Stredná krivosť alebo miera nerovnomernosti	31
3.5.2	Vlastné funkcie	32
3.5.3	Symetrie laplaciánu	33
4	Harmonická analýza	35
4.1	Vektor nemusí byť šípka	36
4.2	Skalárny súčin nie je len pravidlo pre násobenie komponent	37
4.3	Rozklad do Fourierovho radu	38
4.4	Diferenciálne za algebraické	40
4.5	Skratky medzi reálnymi faktami vedú cez komplexnú rovinu.	49
4.6	Fourierova transformácia	51
4.7	Princíp neurčitosti	51
5	Symetrie - stopy krásy v matematike	56
5.1	Transformácie a toky, analógia s tečením	56
5.1.1	Zhrnutie: Súvis toku a generujúceho poľa	58
5.1.2	Posunutie v rovine	59
5.1.3	Rotácia v rovine	60
5.1.4	Hyperbolická rotácia v rovine	61
5.2	Transformácia obrazcov	62
5.2.1	Rotácia priamky	63
5.2.2	Rotácia kružnice	64
5.2.3	Neizotropné škálovanie a jeho vplyv na kružnicu	64
5.3	Invarianty transformácie	65
5.3.1	Kritérium infinitezimálnej invariantnosti	66
5.3.2	Rotácie v rovine okolo počiatku a ich integrálne krivky	66

5.3.3	Invariantnosť funkcie vs vrstevnice	67
5.4	Transformácie v 3D a symetrie algebraických rovníc	68
5.5	Transformácie v jetovom priestore	71
5.5.1	Transformácia bodov vs transformácia grafu funkcie	72
5.5.2	Diferenciálne rovnice - geometrický pohľad	73
5.5.3	Diferenciálna rovnica ako (nad)plocha v jetovom priestore $J^{(n)}$	74
5.5.4	Predĺženie grafu funkcie v $J^{(0)}$ do jetového priestoru $J^{(n)}$	74
5.5.5	Predĺženie vektorového poľa do jetového priestoru	75
5.5.6	Prípád viacerých závislých a nezávislých premenných	77
5.5.7	Kritérium infinitezimálnej invariantnosti pre diferenciálnu rovnicu	78
5.5.8	Príklad: Diferenciálna rovnica v jetovom priestore	79
	Použité alebo doporučené zdroje	85

1 Optimalizácia, alebo hádanie agendy

1.1 Vítazná stratégia závisí od cieľa hry

Uvažujme nasledujúci scenár: Detektív sleduje cestujúceho, o ktorom vie, že ide z mesta A do mesta B. Na výber má množstvo spojnic medzi mestami. Detektív sa snaží zistiť kľúč k rozhodovaniu cestujúceho. Existuje niečo, čo sa dotyčný snaží svojimi voľbami **optimalizovať**? Sledovaný človek najprv volí časť najpriamejšej spojnice medzi A, B. Detektív vezme ako predbežnú hypotézu, že sa snaží minimalizovať prejdenú dráhu alebo čas trvania cesty. Na úsekoch, ktoré minimalizujú aj čas aj prejdenú dráhu, detektív nevie rozhodnúť, ktoré kritérium výberu je vyššie. **Kľúčové sú situácie, keď rôzne priority vedú k rôznym výberom.** Pokiaľ vopred nevieme, aké rôzne priority môžu byť v hre, môže byť vážnym problémom vôbec zistiť, ktoré situácie si všimnúť a kedy sme už s kontrolou hotoví.

Po chvíli sa cestujúci odkloní od priamej spojnice medzi mestami A, B a ide okľukou, a až od istého bodu sa pohybuje opäť priamo k B. Okľuku robil v oblasti, kde sa na priamej línii medzi A a B nachádza akási obec. Detektív vie, že v obci je nutná znížená rýchlosť, a najnovšie aj dopravné obmedzenia pre akési podujatie, ktoré sa tam koná. Keďže cestovateľova obchádzka šetrila čas na úkor šetrenia dráhy, detektív usúdi, že azda sa jedná prioritne o minimalizovanie času. Na základe tohoto predpokladu sa detektív môže pokúsiť predpovedať, ako si bude sledovaný muž cestu voliť ďalej, a overiť svoju teóriu na základe ďalšieho pozorovania.

Môže sa však stať, že predpovede budú detektívovi potvrdzovať jeho aktuálnu teóriu aj napriek tomu, že ešte neuhádol najvšeobecnejší, najvyšší princíp výberu - iba zatiaľ nenarazil na situáciu, v ktorej by tento princíp nariaďoval iné voľby, než aké by boli urobené aj na základe minimalizácie času.

Napríklad na ďalšom úseku ide náš cestujúci poľnými nespevnenými komunikáciami namiesto krajskej cesty. Minimalizácie vzdialenosti ani času by k tejto voľbe nevedli, lebo krajská cesta umožňuje v oboch ohľadoch efektívnejšiu voľbu.

Nakoniec sa môže ukázať, že cestujúci sa usiloval minimalizovať počet stretnutí s policajnými hliadkami - na začiatku išiel čo najpriamejšie, lebo na tom úseku to zároveň šetrilo čas strávený na cestách a pravdepodobnosť že nejakú hliadku stretne; obci sa vyhol, aby jednak znížil túto pravdepodobnosť stretnutia spojenú so samotným zotrúvaním vonku a jednak preto, že počet hliadok tam bol vyšší pre podujatie, čo sa tam chystalo (a ktoré detektív interpretoval ako potvrdenie svojej hypotézy o minimalizácii času). Na poslednom úseku šiel sledovaný muž poľnými cestami celkom bez policajných hliadok, lebo také cesty boli konečne k dispozícii. Okolo jeho štartovacieho mesta neboli, preto tam detektív ani nemal možnosť brať do úvahy možnosti s nimi spojené.

Všimnime si, že detektív sa musel zaoberať komplexným pohľadom na situáciu, aby prišiel k správnejmu záveru. Bolo potrebné správne interpretovať, akú rolu hrala absencia poľných ciest blízko mesta A a ich výskyt okolo mesta B, znížená povolená rýchlosť a zvýšená ostraha v obciach medzi mestami, atď. Tým sa dostávame k veľmi dôležitému pojmu - k **väzbám**, obmedzeniam a s tým súvisiacej **optimalizácii v rámci možnosti**. Nesprávne interpretované pozorovania sa môžu stať zdrojom väčších zmätkov, než aké by nastali bez daných pozorovaní, ale to je samozrejme len upozornenie, nie argument pre ukončenie pozorovaní a pokusov o ich interpretácie.



Obr. 1: Prečo práve tieto cesty? Akú má agendu?

Aj vo vede robíme detektívne úvahy. Sledujeme kroky, ktorými sa systém dostal z A do B, vykresľujúc krivku v abstraktnom či "konkrétnom" priestore (závisiac od toho, či A,B predstavujú stav, konfiguráciu,...). Pýtame sa, či existujú aj v prírode vedúce princípy v zmysle, že lokálne kroky sú volené tak, že niečo bolo globálne (v rámci celého deja) **extremalizované**. Opäť v rámci možností, so zohľadnením väzieb. V závislosti od väzieb môžu dva systémy s rovnakou agendou vyzerat veľmi rôzne.



Obr. 2: V islandských vodopádoch aj delte Okavanga má voda tendenciu ísť smerom k nižšiemu gravitačnému potenciálu. Rozdielne väzby majú za následok veľmi rôzne prejavy sledovania tej istej agendy.

V mechanike sme zvyknutí mať stav telesa zadaný polohou x a hybnosťou p , a stav o malý časový interval neskôr bude daný tým aktuálnym a pravidlami hry (pohybovými rovnicami) diktujúcimi nasledujúci krok. Poznať tieto je podobné detektívovej znalosti veľmi lokálnych, krátkodobých rozhodnutí sledovaného človeka.

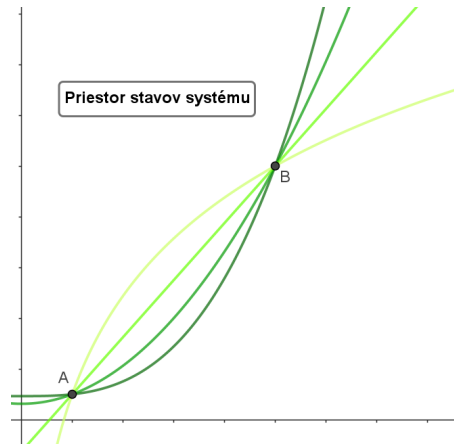
Ak máme daný stav - bod vo fázovom priestore, Hamiltonove rovnice nám hovoria, ako vyzerá prvá derivácia, teda prvý krok z daného miesta, resp. prvý člen v taylorovskom rozvoji, v závislosti od energie.

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

Potom sme v novom stave, (v novom bode fázového priestoru), a môžeme vyhodnotiť Hamiltonove

rovnice pre tento stav, teda získať inštrukcie pre ďalší krok atď. Takto sa iteráciami dostávame do ďalších a ďalších stavov, aj takých, ktoré boli neinfinitezimálne ďaleko od počiatočného stavu. Dá sa potom skúmať celá množina prejdenných stavov z globálneho pohľadu. Je to krivka vo fázovom priestore parametrizovaná časom - každý bod predstavuje stav systému v nejakom okamihu. Čím je taká vykreslená krivka - ako celok - význačná medzi všetkými ostatnými, ktoré predstavujú nezrealizované postupy priestorom stavov? Vieme matematicky sformulovať túto význačnosť?



Obr. 3: Podľa čoho si systém vyberie cestu zo stavu A do stavu B?

1.2 Váženie ciest

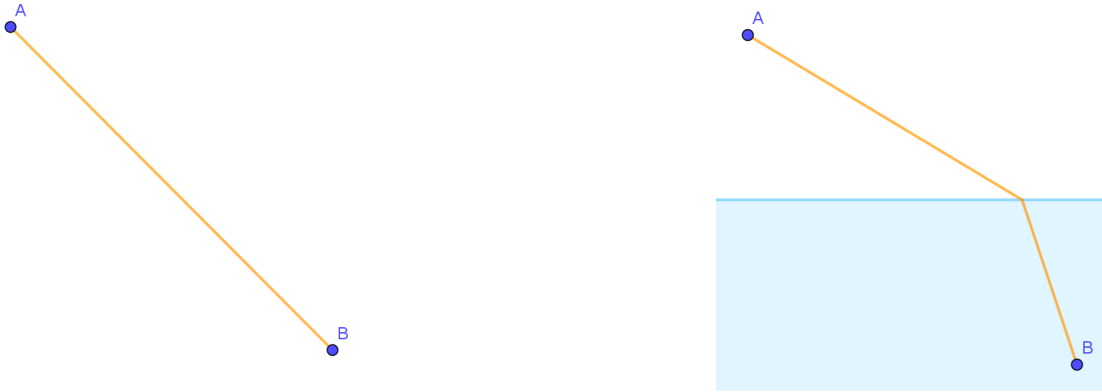
Ako veľmi užitočný nástroj sa tu ukazuje pojem tzv. **funkcionálu**. Umožňuje priradiť čísla objektom ako su napríklad parametrizované krivky vo fázovom priestore.

Teda funkcionál je akási funkcia na funkciách, predpis priradujúci celej funkcii jedno číslo. Každý možnej krivke spájajúcej dva fixné body vo fázovom priestore priradíme pomocou vhodného funkcionálu číselnú hodnotu, a potom môžeme hľadať krivku, ktorej bola priradená extrémálna - minimum či maximum. Existuje množstvo funkcionálov definovaných na množine kriviek, a pre rôzne funkcionály sú rôzne krivky extrémálne, význačné. Fyzik však má kritérium na výber správneho funkcionálu - má to byť ten, podľa ktorého je extrémálna krivka práve tá, ktorá sa realizovala. Teda vlastne sa snažíme pomocou funkcionálu a jeho extremalizácie **matematicky reprezentovať výberové kritérium** prírody, aspoň na nejakej úrovni.

Zdá sa, že pre mnohé deje v prírode sa nejaký taký princíp dá nájsť. Funkcionál priradujúci krivkám v priestore stavov (teda vlastne **časovým vývojom stavov**) číslo voláme **účinnok**. Vo fyzike sa vyskytuje v klasickej aj kvantovej mechanike, v špeciálnej aj všeobecnej relativite. Samozrejme, to, že nám predpovede urobené na základe extremalizácie nejakého účinku vychádzajú, ešte neznamená, že sme ten účinok uhádli správne. Možno sme prišli len na kritérium, ktoré sa s tým ozajstným zhoduje v situáciách, na ktoré sme zatiaľ narazili. Vo fyzike sa teórie nedokazujú, len sa porovnávajú s pozorovaním a ich dôveryhodnosť stúpa, ak s ním súhlasia. Je potrebné robiť ďalšie pozorovania v rozličných situáciách a ak sa v niektorej náš účinok ukáže ako nepostačujúce kritérium (systém sa nesprávne tak aby ho extremalizoval), pokúšame sa nájsť vyšší princíp než ten, čo práve zlyhal.

Príkladom je sledovanie svetelných lúčov v klasickej geometrickej optike. V rovnomernom prostredí možno prídeme k hypotéze, že lúč si vyberá cestu tak, aby minimalizoval prejdennú dráhu. Alebo čas - tu to vedie k rovnakej stratégii. Potom však vyskúšame šírenie v aspoň dvoch prostrediach, v ktorých sa svetlo šíri s rôznou rýchlosťou, a zistíme, že štetrenie geometrickej dráhy nevyzerá byť najvyššia priorita, štetrenie času je uprednostnené. Podobne ako detektív z podobenstva na

začiatku, nemôžeme ešte prehlásiť, že už o systéme vieme všetko¹.



Obr. 4: Vo vode sa signál šíri pomalšie. Pre šetrenie času sa oplatí "nadbahnúť" si časť vzdialenosti na vzduchu, aj za cenu predĺženia geometrickej dráhy.

Silné postavenie, ktoré má účinok vo fyzike, je naznačené jednak tým, že sa vyskytuje v toľkých fyzikálnych modeloch, ale aj v tom že jeho **fyzikálnou jednotkou je J.s**, jednotka v akej je aj **Planckova konštanta**. Pripomeňme tu, že táto je jednou z fundamentálnych konštánt v prírode, ktorej hodnotu zatiaľ nevieme z ničoho odvodiť (len namerať). Je spojená s mnohými javmi v prírode. Veličiny merané v jednotkách ako ona môžu mať význam hlbší ako tie, ktoré sme zaradili v rámci SI sústavy ako "základné" (lebo pre bytosti s našimi rozmermi, zmyslami a spôsobom vyjadrovania sa tak javili). Táto myšlienka je minimálne podporená veľkým významom **momentu hybnosti** naprieč fyzikou. Ten je tiež meraný v spomenutých jednotkách. Pre ľudí používajúcich mechaniku predovšetkým na technické výpočty je to azda jedna z mnohých odvodených veličín, ale ak si uvedomíme, že kvantový spin častíc s celým jeho dopadom na správanie hmoty je tiež druhom momentu hybnosti, jeho osobitné postavenie začína byť výraznejšie, ak aj nie jasnejšie.

Optimalizáciou funkcionálov (hľadaním extrémov pre ne) sa v matematike zaoberá **variačný počet**. Proces variovania funkcionálu, teda hľadanie funkcií (alebo ich grafov - kriviek) ktoré ho extremalizujú, sa trochu podobá hľadaniu extrému funkcie, teda hľadaniu bodov v ktorých je extrémna. Užitočnosť derivácie ťažko poprieť - okrem iného ako nástroja umožňujúceho hľadať extrémny. Na základe toho možno aspoň trochu odhadnúť význam funkcionálu a hľadania jeho extrémov, keďže sa vlastne jedná o spôsob, ako celej **funkcii priradiť číslo - akúsi váhu** a na jeho základe urobiť "hierarchiu" medzi funkciami, a nájsť tie, ktoré sú v rámci nej najvýznačnejšie. Sú to veľmi silné nástroje nielen vo fyzike. Matematicky sformulovateľné úlohy z mnohých oblastí, kde je potrebné robiť optimalizáciu niečoho, sú často riešiteľné práve tým, že sa identifikuje (toto nemusí byť triviálna úloha, ale je aj akýmsi testom vzhľadom do problému) veličina definovaná na jednotlivých možnostiach, ktorá sa má optimalizovať. Správna možnosť je potom pravdepodobne jedna z tých, pre ktoré hľadaná veličina nadobúda extrém.

Štandardný postup pri variačných problémoch môže byť nasledovný: máme funkcionál a množinu funkcií na ktorých je definovaný - variovaním nájdeme (tzv. **Euler-Lagrangeove**) rovnice ktorých **riešenia môžu byť význačné funkcie**. Upozorníme tu, že byť riešením takýchto rovníc je pre funkciu len nutnou, nie postačujúcou podmienkou extremalizácie funkcionálu. Veľmi podobne to bolo v obyčajnej analýze - tak splnenie $\frac{df}{dx} = 0$ v nejakom bode x bolo nutné ak v x bolo minimum alebo maximum, ale nebolo to postačujúce. Niekedy máme inverzný problém - máme k dispozícii diferenciálne rovnice popisujúce správanie systému, a pýtame sa či tieto rovnice sú Euler-Lagrangeove pre nejaký funkcionál. Nie je to len akademická otázka - nakoniec poznať funkcionál znamená do istej miery **identifikovať globálnu agendu**, ktorú systém sleduje.

¹Už trochu kvantovej mechaniky a relativity nám povie, že nevieme.

1.3 Aj newtonovská mechanika zahŕňa optimalizáciu

Ako príklad spomeňme newtonovskú mechaniku. Mnohokrát sa študenti najprv naučia Newtonove pohybové rovnice, obvykle bez úvah o tom, či systém ich poslúchaním optimalizuje nejakú veličinu. **Z matematického hľadiska je druhý zákon diferenciálna rovnica druhého rádu, Euler-Lagrangeova rovnica, pre funkcionál predstavujúci rozdiel kinetickej a potenciálnej energie integrovaný počas celého časového vývoja vývoja.** Ilustrujme si tu čo to znamená na jednoduchom príklade.

Najprv zvažme voľnú časticu pohybujúcu sa pozdĺž osi x . Nech v čase t_1 bola v mieste X_1 a v čase t_2 v mieste X_2 . Jej trajektória nech je nejaká časom parametrizovaná krivka - úsek na osi x , vo zvolenej vzťažnej sústave povedzme $x(t)$, pričom $x(t_1) = X_1$, $x(t_2) = X_2$. Jedná sa o voľnú časticu, potenciálna energia je teda nulová a globálnou agendou nášho telesa bude extremalizovať len kinetickú energiu preintegrovanú cez celý čas pohybu.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i$$

Ako sa bude častica pohybovať v čase $t_1 < t < t_2$ medzi bodmi X_1 a X_2 ? Človek ani nemusí vedieť, ako sa hľadá extrém funkcionálu, aby vedel, že v tomto prípade častica pôjde stále rovnako veľkou rýchlosťou na základe nasledujúcej úvahy: ak má za čas $t_2 - t_1$ prejsť vzdialenosť $X_2 - X_1$, potom priemerná rýchlosť musí byť

$$v_p = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Uvažujme najprv pre jednoduchosť, že ide stále rýchlosťou v_p , okrem časového intervalu dt kde ide rýchlosťou $v_p - \epsilon$, a nutne aj časového intervalu dt keď musí za stratu kompenzovať a ísť rýchlosťou $v_p + \epsilon$. Zložitejšie fluktuácie rýchlosti sa dajú vyskladať analogicky. Keby výraz pod integrálom bol úmerný len prvej mocnine rýchlosti, fluktuácie by sa kompenzovali a hodnota integrálu sa nezmenila. Ale v prípade druhej mocniny rýchlosti kompenzácia nie je úplná a akákoľvek fluktuácia (za podmienky, že teleso prejde za daný čas danú dráhu) hodnotu integrálu navýši: uvažme príspevky z úseku kde teleso ide o ϵ pomalšie a z úseku kde ide o ϵ rýchlejšie. Prispievajú hodnotami

$$\frac{1}{2} m (v_p - \epsilon)^2 dt = \frac{1}{2} m (v_p^2 - 2\epsilon v_p + \epsilon^2) dt$$

$$\frac{1}{2} m (v_p + \epsilon)^2 dt = \frac{1}{2} m (v_p^2 + 2\epsilon v_p + \epsilon^2) dt$$

Vidíme, že pri sčítaní vypadnú členy úmerné prvej mocnine rýchlostnej fluktuácie, ale tie úmerné druhej mocnine sa sčítajú. Celkovo teda do integrálu oproti rovnomernému pohybu pribudne kladný príspevok $m\epsilon^2 dt$.

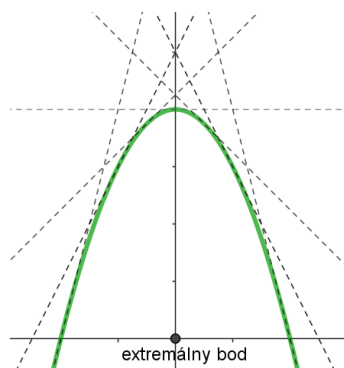
Teda na základe samotnej informácie, že systém (tu: voľná častica) má agendu extremalizovať istý určitý integrál, vieme nanovo odvodiť pravidlo pre rovnomerný priamočiary pohyb pre voľnú časticu - zatiaľ aj bez znalosti ako extremalizovať všeobecné funkcionály!

1.4 Rozvíjanie nástrojov: Funkcionálna derivácia

Spomeňme si, ako sa hľadali extrémny funkcie. Funkcia je predpis, ktorý každému bodu z definičného oboru priradil nejaký bod z oboru hodnôt. Body definičného oboru boli obvykle buď čísla alebo usporiadané skupiny čísel (pre funkcie viacerých premenných). Body oboru hodnôt boli čísla, v prípade vektorových funkcií usporiadané skupiny čísel (ale vektorová funkcia sa dá chápať ako usporiadaný súbor skalárnych funkcií, tak tu nebudeme ďalej spomínať takéto všeobecnejšie prípady.) Pri hľadaní extrému sa vlastne hľadal taký bod z definičného oboru, ktorému funkcia priradila nejaké lokálne výnimočné číslo - buď menšie alebo väčšie ako všetkým ostatným bodom

v jeho okolí. Pre spojité funkcie navyše platilo, že všetky body v okolí toho výnimočného majú funkčnú hodnotu odlišnú až v druhom ráde.

Ilustrujme myšlienku na príklade funkcie jednej premennej, ktorej graf nech predstavuje kopec. Povedzme že vieme robiť nekonečne malé kroky. Pre body na svahu platí, že každým krokom sa posunieme buď hore alebo dole. Strmosť stúpania či klesania je daná dotyčnicou v danom bode, ktorej smernica je práve prvá derivácia v tom bode. Prvá derivácia je zároveň faktor násobiaci veľkosť infinitezimálneho kroku v taylorovskom rozvoji aproximujúcom funkciu. V bode na vrchole kopca je dotyčnica nulová a smernica vodorovná. Do prvého rádu (vo veľkosti kroku) sú hodnoty funkcie v okolí maxima rovnaké. Samozrejme v ďalších rádoch sa už líšia, inak by nešlo o lokálny extrém. Pri hľadaní extrému sa poobzeráme po hodnotách funkcie v okoliach skúmaných bodov



Obr. 5: Do prvého rádu sa hodnoty funkcie v okolí maxima nemenia - funkcia nestúpa a neklesá.

a ako z extrému podozrivé body identifikujeme tie, v okolí ktorých sa funkcia do prvého rádu nemení. (Až potom skúmame druhú deriváciu, aby sme rozlíšili inflexný a extrémny bod.)

Analogicky postupujeme pri **hľadaní extrémov pre funkcionály**. Zhruba povedané, funkcionál je predpis, ktorý **priraduje čísla funkciám**. Z geometrického hľadiska, prvky ("body" v abstraktnom zmysle) jeho definičného oboru sú krivky (grafy funkcií), a jeho obor hodnôt sú čísla. Priradiť číslo funkcii sa dá všelijako. Napríklad by sme každej mohli priradiť priemer jej hodnôt. Alebo jej maximálnu alebo minimálnu hodnotu, pre funkcie pre ktoré to má zmysel. A tak ďalej - podobne ako existuje mnoho funkcií (spôsobov ako číslu priradiť číslo), je aj mnoho funkcionálov (spôsobov ako funkciám priradiť číslo). Jedným z veľmi užitočných funkcionálov je určitý integrál nejako závislý na našej funkcii. Veľmi často aj na jej deriváciách. Naozaj, určitý integrál je spôsob ako z funkcií dostávať čísla:

$$\mathcal{S} : f \mapsto \mathcal{S}[f] = \int_A^B dx L(x, f(x), f_x(x), f_{xx}(x), \dots) \quad (1)$$

Výrazu L pod integrálom sa hovorí **Lagranžian**. Predstavuje nejakú kombináciu nezávislých a závislých premenných a ich derivácií². V jeho konkrétnej podobe je kódovaná agenda systému, teda *cieľ hry* pri optimalizácii. Samozrejme nie každá funkcia taký integrál vôbec má, ale to je v poriadku. Funkcionál je definovaný len pre istý definičný obor funkcií, pre ktoré taká operácia má zmysel (podobne ako funkcie boli definované len pre istý definičný obor číselných hodnôt). Podobne ako sme sa pri funkciách mohli pýtať, pre ktorý prvok definičného oboru nadobúdajú maximum či minimum, sa môžeme pre funkcionály pýtať, pre ktorý prvok ich definičného oboru (teda pre akú funkciu) nadobúdajú extrém. Pri hľadaní použijeme analóg derivácie - **funkcionálnu**

²Tu f_x, f_{xx}, \dots značia prvú, druhú, ... deriváciu podľa premennej. Začíname s funkciou jednej premennej, ale variačný počet sa samozrejme dá - vcelku triviálne - zovšeobecniť na prípady viac závislých aj nezávislých premenných.

deriváciu. Z extrémnosti sú podozrivé tie funkcie, v okolí ktorých sa funkcionál do prvého rádu nemení. Nezabudnime, že okolím sa myslia blízke prvky definičného oboru, čo sú tu funkcie. Pri obyčajných deriváciách sme skúmali, ako sa malé kroky v definičnom obore prejavajú na funkčných hodnotách:

$$x \rightarrow x + \epsilon \qquad f(x) \rightarrow f(x + \epsilon) \approx f(x) + \epsilon \frac{df}{dx}$$

Pri funkcionálnych deriváciách skúmame, ako sa malé kroky v definičnom obore prejavajú na hodnote funkcionálu:

$$f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon \eta(x) \qquad \mathcal{S}[f] \rightarrow \mathcal{S}[f + \epsilon \eta] \approx \mathcal{S}[f] + \epsilon \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta f} \quad (2)$$

Tu $\eta(x)$ je **ľubovoľná variácia** či modifikácia k skúmanej funkcii f , **nulová v okrajových bodoch** intervalu, cez ktorý integrujeme, teda

$$\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0 \quad (3)$$

Výrazu $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta f}$ hovoríme funkcionálna derivácia, keďže naozaj je mierou citlivosti funkcionálu na malú zmenu funkcie (reprezentovanú príspevkom $\epsilon \eta(x)$). Konkrétne vyjadrenie získame jednoduchým rozpísaním $\mathcal{S}[f + \epsilon \eta]$, rozvinutím do prvého rádu v ϵ , použitím základnej vety integrálneho počtu a nulovosti variácie v okrajových bodoch.

$$\mathcal{S}[f + \epsilon \eta] = \int_{x_A}^{x_B} dx L(x, f + \epsilon \eta, f_x + \epsilon \eta_x, f_{xx} + \epsilon \eta_{xx}, \dots) \quad (4)$$

$$\mathcal{S}[f] + \epsilon \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta f} = \int_{x_A}^{x_B} dx L(x, f, f_x, f_{xx}, \dots) + \epsilon \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{dL}{d\epsilon}$$

Ak je funkcionálna derivácia pre nejaký argument f nulová, funkcionál \mathcal{S} sa pri zmene argumentu o $\epsilon \eta(x)$ do prvého rádu v ϵ nezmení.

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{dL}{d\epsilon} = 0 \quad (5)$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{dL}{d\epsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial f_x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \eta_{xx} + \dots \right) \quad (6)$$

Chceme nájsť takú f , aby funkcionálna derivácia bola nulová pre hocikaké η . Potrebujeme podmienku (6) dostať do tvaru

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{dL}{d\epsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx (\dots) \eta$$

Treba sa teda zbaviť derivácií η_x , η_{xx} atď. Použijeme na to metódu integrovania per partes, základnú vetu integrálneho počtu a fakt, že $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$. Najprv si to ukážme na člene

úmernom η_x . Symbolom D_x označujme totálnu deriváciu podľa nezávislej premennej x .

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial L}{\partial f_x} \eta_x &= \int_{x_A}^{x_B} dx D_x \left(\frac{\partial L}{\partial f_x} \eta \right) - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \eta \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial f_x} \eta \right) \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \eta \\ &= - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_x} \right) \eta \end{aligned}$$

Člen úmerný η_{xx} ošetríme podobne, ale tu samozrejme treba použiť integráciu per partes dvakrát.

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \eta_{xx} &= \int_{x_A}^{x_B} dx D_x \left(\frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \eta_x \right) - \int_{x_A}^{x_B} dx \left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta_x \\ &= \int_{x_A}^{x_B} dx D_x \left(\frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \eta_x \right) - \int_{x_A}^{x_B} dx D_x \left[\left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta \right] + \int_{x_A}^{x_B} dx \left(-D_x (-D_x) \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \eta \right) \Big|_{x_A}^{x_B} - D_x \left[\left(D_x \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta \right] \Big|_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} dx \left((-D_x)(-D_x) \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta \\ &= \int_{x_A}^{x_B} dx \left((-D_x)(-D_x) \frac{\partial L}{\partial f_{xx}} \right) \eta \end{aligned}$$

Vidno, že členy zahŕňajúce vyššie derivácie sa dajú upraviť opakovaným použitím metódy per partes, že nulovosť variácie v okrajových bodoch nás zbaví všetkých členov okrem jedného, ktorý bude mať alternujúce znamienko - plus pre párny počet použitých per partes a mínus pre nepárny.

$$\int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial L}{\partial f_J} \eta_J = \int_{x_A}^{x_B} dx \left((-D)^J \frac{\partial L}{\partial f_J} \right) \eta$$

Tu J používame ako multiindex označujúci podľa čoho všetkého sa derivuje a koľkokrát. Pre jednu nezávislú premennú stojí J namiesto x , xx , xxx ... pre viac nezávislých premenných to môže byť trebárs xy označujúce deriváciu podľa prvej a druhej nezávislej premennej atď. Napríklad pre $J = xy$ budeme výraz $(-D)_{xy}$ rozumiieť ako $(-D_x)(-D_y) = D_x D_y$.

Teraz sa vráťme k hľadaniu funkcie extremalizujúcej funkcionál (1), teda k požiadavke nulovosti funkcionálnej derivácie (5).

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} = 0 &\rightarrow \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{dL}{d\epsilon} = 0 \quad (7) \\ &\rightarrow \int_{x_A}^{x_B} dx \sum_J \left((-D)^J \frac{\partial L}{\partial f_J} \right) \eta = 0 \end{aligned}$$

Suma cez multiindex J nie je nekonečná - nenulové sú len členy zahŕňajúce derivácie f_J vyskytujúce sa v Lagranžiáne L . Člen $J = 0$ je v sume zahrnutý tiež, pričom $D_0 = 1$. Keďže nulovosť (7) má platiť pre ľubovoľnú η spĺňajúcu (3), musí sa nule rovnať faktor, ktorý ju násobí, teda

$$\delta \mathcal{S} = 0 \rightarrow \sum_J \left((-D)^J \frac{\partial L}{\partial f_J} \right) = 0 \quad (8)$$

Týmto dostávame **podmienku stacionárnosti** funkcionálu $\mathcal{S}[f]$. Je to **nutná**, nie postačujúca podmienka extrémnosti. Na funkcii f , ktorá ju spĺňa, môže mať funkcionál extrém (maximum alebo minimum). Alebo len akýsi analóg inflexného bodu.

Podmienke (8) sa hovorí **Euler-Lagrangeova rovnica**. Ak Lagranžián zahŕňa **viac nezávislých premenných** x^i , $i = 1, \dots, p$, potom multiindex J prebieha cez všetky možnosti relevantných derivácií podľa nich. Ak Lagranžián obsahuje **viac závislých premenných**, povedzme f^α , $\alpha = 1, \dots, q$ potom máme toľko Euler-Lagrangeových rovníc koľko je týchto závislých premenných, a pre stacionárnosť funkcionálu je nutné aby boli splnené všetky, teda aby platilo

$$\sum_J \left((-D)_J \frac{\partial L}{\partial f_J^\alpha} \right) = 0 \quad \forall \alpha \quad (9)$$

1.5 Skúšanie nástrojov: Voľná častica v 1D

Vráťme sa k prípadu voľnej častice. Spomínali sme už, že zákony klasickej mechaniky sa dajú napísať aj vo forme variačného princípu - častice budú sledovať také dráhy v priestore stavov (v klasickej mechanike hmotných bodov je to priestor polôh a hybností), aby extremalizovali rozdiel kinetickej (T) a potenciálnej (U) energie preintegrovaný cez čas pohybu. V prípade voľnej častice ($U = 0$) hmotnosti m v jednom rozmere máme teda nezávislú premennú čas t (okrajové okamihy intervalu označme t_A, t_B), ako závislú premennú máme polohu³ častice $x(t)$, Lagranžián je jednoducho kinetická energia, a účinok je časový integrál z nej:

$$\mathcal{S}[x] = \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{1}{2} m \dot{x}_t^2 = \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{L(t, x, \dot{x})}$$

Podľa dávnej newtonovskej tradície sme časové derivácie označili bodkou. Hľadáme $x(t)$ pre ktorú je tento funkcionál stacionárny, tentoraz už použitím našej mašinerie Euler-Lagrangeových rovníc. Keďže Lagranžián obsahuje len závislú premennú x , jednu nezávislú premennú t , a nanajvýš prvú deriváciu podľa nej, bude pre multiindex J v sume (9) stačiť prebiehať hodnoty $0, t$. Navyše náš Lagranžián neobsahuje explicitne x , takže člen zodpovedajúci nulovému J aj tak vypadne.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{J=0}^t \left((-D)_J \frac{\partial L}{\partial x_J} \right) = D_0 \frac{\partial L}{\partial x} - D_t \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \\ &= 0 - m \ddot{x} \end{aligned}$$

Inak povedané, voľná častica pôjde bez zrýchlenia, výsledok ktorý poznáme z dávnych štúdií i nedávnych úvah na začiatku kapitoly. Teraz sme tento jav použili ako test nášho nového nástroja, Euler Lagrangeových rovníc.

1.6 Skúšanie nástrojov: Častica v 3D, v poli konzervatívnej sily

Aby sme vyskúšali rovnice (9) pre **viac závislých premenných** a zároveň zovšeobecnilí skúmaný systém aj na prípad nenulového potenciálu, vezmime časticu hmotnosti m v trojrozmernom priestore, ktorej poloha je v každom okamihu daná trojicou súradníc $x(t), y(t), z(t)$. Nech potenciálna energia častice v závislosti od miesta je popísaná skalárnou funkciou $U(x, y, z)$. Nezávislá

³Zvyk automaticky považovať veci označené ako x za nezávislé premenné má za následok mnoho nedorozumení pri prebiehaní z matematickej literatúry k fyzikálnej. Treba čítať kontext, nie písmená, inak sa podobáme deťom ktoré si neporadia s Pythagorovou vetou ak odvesny a prepona nie sú označené v abecednom poradí.

premenná je čas t (skúmame pohyb medzi okamihmi označenými t_A, t_B), závislé premenné sú x, y, z . Hľadáme také funkcie $x(t), y(t), z(t)$, pre ktoré je stacionárny funkcionál

$$\mathcal{S}[x, y, z] = \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right)}_{L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}$$

Podmienka stacionárnosti je v tomto prípade vyjadrená tromi Euler-Lagrangeovými rovnicami:

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} - m\ddot{x}$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right) = -\frac{\partial U}{\partial y} - m\ddot{y}$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \right) \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right) = -\frac{\partial U}{\partial z} - m\ddot{z}$$

Alebo stručnejšie môžeme zbaľiť tri rovnice do vektorového tvaru

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U$$

Čiže sila je záporne vzatý gradient potenciálnej energie. Pri známej U je známy aj jej gradient, teda jedná sa potom už "len" o obyčajnú diferenciálnu rovnicu (v nezávislej premennej t) druhého rádu a možnosti jej doriešenia (a nájdenia funkcií $x(t), y(t), z(t)$ extremalizujúcich daný funkcionál) značne závisia od konkrétneho tvaru U . Neprišli sme k novinke, ale to nebolo cieľom. Overili sme, že zatiaľ naša variačná metóda dáva výsledky konzistentné s tým, čo sa v mechanike osvedčilo doposiaľ.

1.7 Skúšanie nástrojov: Harmonické funkcie ako riešenia variačného problému

Už sme si vyskúšali prípad viacerých závislých premenných. Pre zmenu si teraz metódu ukážme na prípade jednej závislej premennej (volajme ju u) a **viacerých nezávislých premenných** (volajme ich x, y, z)⁴. Nech oblasť integrovania je nejaký objem Ω . Nájdime $u(x, y, z)$ v ktorom je stacionárny funkcionál

$$\mathcal{S}[u] = \int_{\Omega} dx dy dz \frac{1}{2} (\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}u) = \int_{\Omega} dx dy dz \underbrace{\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}_{L(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z)}$$

Príslušná Euler Lagrangeova rovnica (jedna, lebo máme len jednu závislú premennú) bude

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial}{\partial u_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial u_z} \right) \left(\frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right) \\ &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u \end{aligned}$$

Toto je dobre známa Laplaceova rovnica, tu vystupujúca ako podmienka pre extremalizáciu istého funkcionálu. Na jej riešeniach, harmonických funkciách, je tento funkcionál stacionárny.

⁴Toto je tréning postrehu, pochopenia a ešte niekoľkých ďalších kvalít. V predošlom príklade boli tieto symboly použité na označenie závislých premenných!

1.8 Skúšanie nástrojov: Vyššie derivácie

Doposiaľ sme si ukázali variačné metódy na prípadoch, keď Lagranžian obsahoval nanajvyš prvú deriváciu, a v tom prípade sú Euler-Lagrangeove rovnice nanajvyš druhého rádu. Takéto majú zatiaľ asi najširšie uplatnenie vo fyzike aj technike. Význam druhej derivácie súvisí s hlbokými geometrickými skutočnosťami, súvisiacimi so samotným priestorom a časom. Ale je dobré vedieť zaobchádzať aj s vyššími deriváciami. Ukážme si teraz našu metódu na prípade nasledovného hypotetického funkcionálu: Nezávislé premenné nech sú x, t , a uvažujem ich na nejakej oblasti Ω . Závislá premenná nech je $u(x, t)$ a povedzme, že agendou systému je extremalizovať funkcionál

$$\mathcal{S}[u] = \int_{\Omega} dx dt \underbrace{L(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt})}_{u_{xt}^2}$$

Suma operátorov v Euler-Lagrangeovej rovnici teda musí siahať ďalej ako v predošlých prípadoch, ale vzhľadom na jednoduchosť Lagranžianu bude nenulový len jeden člen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_t} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \frac{d^2}{dt dx} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} \right) (u_{xt}^2) \\ &= \frac{d^2}{dt dx} \frac{\partial (u_{xt}^2)}{\partial u_{xt}} = 2u_{xxtt} \end{aligned}$$

Riešením je napríklad $u = axt + bx + ct + d$, kde a, b, c, d sú konštanty.

1.9 Spoločná agenda a jednotiacie princípy

Matematické metódy variačného počtu nám ponúkajú nástroje, ako efektívne hľadať funkcie extremalizujúce rôzne funkcionály. Azda presnejšie je povedať, pomáhajú nám hľadať rovnice, ktoré tieto funkcie majú spĺňať⁵.

Ale je tu hlbšia otázka ako len zefektívnenie algoritmu na výpočty. *Ako vieme, čo bude príroda optimalizovať?* Napríklad v prípade klasického pohybu častice, prečo je agendou práve minimalizácia rozdielu medzi kinetickou a potenciálnou energiou? Odpovedať sa dá na viacerých úrovniach a povedzme vopred, ešte je v tých úrovniach čo dopĺňať. Ak takto (ako rozdiel kinetickej a potenciálnej energie preintegrovaný cez čas) zvolíme účinok, ako Euler-Lagrangeove rovnice dostávame práve Newtonov druhý zákon (teraz sa obmedzujeme na prípady keď má zmysel hovoriť o potenciálnej energii, teda o konzervatívnej sile). Aj Newtonove rovnice boli v teórii postulované, nie odvádzané. Uhádnutím správneho účinku (alebo zatiaľ nie preukázateľne nesprávneho) sme v situácii detektíva, ktorému sa podarilo sformulovať kritérium, podľa ktorého si sledovaný jedinec vyberal postup. Samozrejme to nezodpovedá všetky otázky, ktoré môžu byť položené, ale môže to pomôcť robiť predpovede pre ďalšie pozorovania. Otázku prečo má byť optimalizované práve to a to však rozhodne netreba zamietnuť do kúta. Nakoniec optimalizovaná veličina bude zrejme nejakým spôsobom hovoriť veľa. Na tejto úrovni možno ešte nie je dobre vidieť, čo je také hlboké za rozdielom kinetickej a potenciálnej energie nasčítanom na časovom intervale. Z pohľadu štatistickej fyziky môže ísť o akúsi variantu ekvipartičnosti, princípu rozdeľovať energiu do všetkých dostupných foriem rovnomerne (teda aj robiť čo najmenšie rozdiely v preferencii jednej či druhej - kinetickej či potenciálnej - energie. "Presnejšie" teórie ako relativita a kvantová mechanika vec dávajú agendu telesa pri jeho pohybe do súvisu s jeho vlastným časom a zmenou fázy jeho vlnovej funkcie. Naše znalosti prírody ešte nie sú úplné ani tak.

⁵Je k tomu pridaná ešte výhoda ktorú sme tu neilustrovali, len ju spomeňme: Symetrie pomáhajú riešiť diferenciálne rovnice. Ak nájdeme symetriu pre nejaký funkcionál, pomáhajú nám riešiť jeho Euler-Lagrangeove rovnice v istom zmysle dvojnásobne. Teda mať explicitne formulovaný variačný problém môže byť v istom zmysle výhodnejšie ako mať len rovnice, ktoré ho riešia. (Osobitne ak ani nevieme že za nimi nejaká optimalizácia je.)

Každopádne identifikovať dostatočne všeobecne globálnu agendu systémov je vhodná stratégia k hľadaniu jednotiacich princípov vo fyzike.



Obr. 6: Počiatočné, okrajové a väzbové podmienky sú rozličné, následne aj priebeh pádov vyzerá byť veľmi rôzny. Ale Mesiac padá podľa rovnakej agendy ako jablká. Možno je širšia ako momentálne vidíme, a množstvo ďalších javov je jej zatiaľ nerozpoznaným prejavom.

2 Indexová notácia

Fyzika a technické vedy sa hemžia **viaczložkovými objektmi**. Vektormi to začína a vyššími tenzormi pokračuje. Akonáhle máme dočinenia s usporiadaným súborom dát, je veľmi praktické mať v nich poriadok. Organizácia jednotlivých zložiek (teda ich očíslovanie - napríklad prvá, druhá, tretia zložka zložka vektora) je prirodzený krok. Znalosť niekoľkých trikov umožňujúcich **efektívne zaobchádzanie so samotnými identifikátormi dát** vyžaduje trochu časovej investície (a počiatočného podvihnutia obočia nad zbytočnými zdanlivými komplikáciami), ktorá sa však mnohonásobne vracia pri praktických výpočtoch. Nakoniec, indexovú notáciu používajú hojne ľudia zaoberajúci sa tenzorovými rovnicami (kde sa bežne píše "desať parciálnych diferenciálnych rovníc jedným ťahom"). Ako motiváciu na začiatok spomeňme rozličné vektorové identity pre trojitý vektorový súčin, zmiešaný súčin a podobne - je možné ich odvodiť či dokázať aj bez indexovej notácie, ale stojí to viac času ako jej naštudovanie - a s ňou ide o omnoho rýchlejší proces, nehovoriac o širšom použití.

2.1 Pravidlá a konvencie pre narábanie s indexmi

Čo je **index**? Zhruba povedané číslo číslujúce vstupné údaje (ktoré sú vo fyzike a technike často tiež numerické). Napríklad: n-ticu údajov (a_1, \dots, a_n) možno zapísať ako a_i , $i = 1, \dots, n$. Nič prevratného, namiesto konkrétnej zložky je niekedy vhodné hovoriť jednoducho o i -tej ako o zástupcovi ktorejkoľvek a všetkých (mušketersky princíp).

Ruža by rovnako voňala pod iným menom. **Je jedno, aký symbol zvolíme ako index, podstatný je rozsah hodnôt, ktoré môže nadobúdať**. Samozrejme, keby sme náš index nazvali "j" namiesto "i", neslúžil by svojmu účelu o nič menej, v tomto prípade má Shakespeare pravdu ohľadne mien a kvalít. Je tu však isté "ale".

Sloboda v pomenovaní má svoj háčik: **Nenazývajte rôzne veci rovnako tam, kde to môže viesť ku zmätkom**. Napríklad $a_i b_j$, značí súčin i -tej zložky a j -tej zložky (kde i sa môže a nemusí rovnať j), kým $a_i b_i$ značí súčin zložiek na tej istej pozícii - plus ešte implicitnú sumu o ktorej si povieme niečo nižšie.

Časté operácie sa prestávajú zapisovať a rozumejú sa implicitne: takým prípadom je **Einsteinova sumačná konvencia**. V prípade súčinov, v ktorých vystupujú rovnaké indexy, sa suma cez celý rozsah, ktorý môže index nadobúdať, často vynecháva a rozumie sa ako samozrejme:

$$x_i x_i = \sum_{i=1}^N x_i x_i$$

Zvyk je zažitý tak veľmi, že ak chceme napísať naozaj len súčin dvoch zložiek na rovnakej pozícii bez sumovania cez všetky pozície, treba to explicitne povedať. ("Nielenže nepíšem sumu, ale ani ju nemyslím!")

Sumačná konvencia spolu s možnosťou premenovávania nám umožňuje šikovne manipulovať **"hlučné"** (alebo **"nemé"**) indexy. To sú tie, cez ktoré sa sumuje v celom ich rozsahu. Potom samozrejme

$$x_i x_i = x_j x_j = \dots = x_q x_q = \sum_{\text{index}=1}^N x_i x_i$$

Táto samozrejmosť prevedená v správnom čase, mieste a príležitosti je jedným z trikov, ktoré neoboznámeným čitateľom pripomínajú ťahanie králikov z prázdneho klobúka.

Často potrebná dvojmožnosť "jedna alebo nič" je zapisovaná **Kroneckerovou delťou** δ_{ij}

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & i &= j \\ \delta_{ij} &= 0 & i &\neq j \end{aligned}$$

Symetria tohto objektu, teda fakt, že $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, má viac uplatnení ako by človek čakal na základe jeho triviality. Kronekerov symbol má formálne funkciu "**premenovávača** indexov": napr. $\delta_{ik}b_k = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik}b_k = b_i$, pretože zo všetkých členov jediný nenulový bude ten, v ktorom $i = k$

Často potrebná trojmožnosť "jedna, mínus jedna alebo nič" je šikovne zapisovaná cez **Levi-Civita symbol** ϵ_{ijk} . Na rozdiel od Kroneckerovej delty varianta "nič" nastáva, ak sa ktorákolvek dva indexy zhodujú. Jednotku máme ak sa jedná o párnú permutáciu základného zoradenia indexov, mínus jednotku pre nepárne permutácie. Teda⁶

$$1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{132}$$

Pravidlá pre zmenu znamienka pri permutácii indexov a nula pri rovnakosti indexov sa dajú zhrnúť ako **úplná antisymetria voči permutáciám**: Ak $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ a zároveň $i = j$, potom vlastne má platiť $\epsilon_{jjk} = -\epsilon_{jjk}$, čo je možné len ak $\epsilon_{jjk} = 0$. (V tomto prípade nepredpokladáme sumačnú konvenciu).

Jedna z mála vecí, čo sa pri indexovej notácii oplatí naučiť naspamäť, je identita

$$\epsilon_{jki}\epsilon_{mni} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Dôkaz sa dá urobiť vyskúšaním všetkých nenulových možností pre Levi-Civitove symboly naľavo (raz za život, počas uviaznutia na letisku a pod) a potom sa ju oplatí naučiť naspamäť namiesto premnohých vektorových identít, ktoré predstavujú jej konkrétne aplikácie.

Počet indexov pre daný objekt a **ich rozsahy** poskytujú informáciu, koľko údajov (nie nevyhnutne nezávislých) daný objekt zahŕňa. Napríklad na charakteristiku veľkosti, smeru a orientácie sily (vzhľadom na danú referenčnú sústavu) stačia tri čísla; na charakteristiku deformácie neizotropného materiálu pri aplikovanom napätí ich treba omnoho viac. Niekedy sa v literatúre vyskytuje nejednotná terminológia a implicitné konvencie, na ktoré si treba dávať pozor. Tak možno občas stretnúť výrazy ako "vektor a_i " či "matica A_{ij} " nerozlišujúc verbálne zložky a objekty samotné. Obvykle to nevedie k nedorozumeniam, pokiaľ človek číta myšlienku a nie literu. Nakoniec "tenzor T" nám nepovie o koľko údajov sa v ňom jedná; naproti tomu pri výraze "tenzor T_{abcd} " je jasné že sa jedná o "štvorrozmerný" súbor čísel a pod⁷.

Súčin symetrického a anisymetrického je nula: majme dva objekty s niekoľkými indexmi, a nech prebiehajú rovnaký rozsah hodnôt. Povedzme, že sa nám vo výpočte objaví výraz $A_{ijk}S_{mjk}$, pričom objekt A je antisymetrický a S symetrický vzhľadom na výmenu posledných dvoch indexov a ako obvykle predpokladáme sumačnú konvenciu, teda

$$A_{ijk}S_{mjk} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ijk}S_{mjk}$$

⁶Najčastejšie budeme mať dočinenia s prípadom, keď indexy môžu nadobúdať hodnoty 1,2,3, ale dá sa v istom zmysle zovšeobecniť.

⁷Mimochodom, na zaobchádzanie s "mnohorozmernými" matematickými objektmi nie je potrebná nadľudská predstavivosť. Na narábanie s nimi nie je vždy potrebná vizualizácia akú si azda ľudia prajú (aj keď čo si pod ňou predstavujú je otázne). Indexov je niekedy toľko, že sa oplatí použiť index na ich číslovanie. Neznamená to nevyhnutne väčšiu náročnosť ako situácia s jedným indexom.

Potom tento výraz je nula. Je za za tým jednoduchá trojkrová úvaha:

$A_{ijk}S_{mjk} = -A_{ikj}S_{mjk}$, pretože sme prepermutovali indexy v antisymetrickom A

$A_{ijk}S_{mjk} = A_{ikj}S_{mkj}$, pretože sme len premenovali dve sady hluchých indexov (cez ktoré sa sumuje), "j" sme premenovali na "k" a "k" na "j".

$A_{ikj}S_{mkj} = A_{ikj}S_{mjk}$, pretože S je symetrický vzhľadom na danú zámenu indexov

Teraz však, porovnaním prvého a tretieho riadku, dostávame $-A_{ikj}S_{mjk} = A_{ikj}S_{mjk}$, čo môže byť splnené len ak sa jedná o nulu.

2.2 Príklady

Uvedme si niekoľko príkladov na zápis indexovou notáciou, spoužitím niekoľkých pravidiel spomenutých vyššie. Čitateľovi neoboznámenému s týmito trikmi je silne odporúčané považovať zvyšok tejto kapitoly za cvičenie ktorého sa treba zúčastniť s kusom papiera a ceruzkou. Pri dostatočnom cviku výpočty bývajú ešte kratšie ako tie uvedené nižšie, keďže mnoho krokov uvádzaných pre pedagogické účely je ľahké urobiť "v hlave".

Najznámejší "základoškolský" **skalárny súčin** medzi dvoma trojzložkovými vektormi \vec{a}, \vec{b} , v kartézskych súradniciach:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i$$

Súčin dvoch (pre jednoduchosť $n \times n$) matíc $C = AB$: zložku i, j matice C nájdeme ako súčin i -teho riadka matice A a j -teho stĺpca matice B.

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{kj}$$

Vektorový súčin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Toto je prvý z mnohých prípadov, kde stručnosť a prehľadnosť indexovej notácie výrazne kontrastuje s "bežným" vektorovým zápisom. Stačí si spomenúť na krkolonné mnemotechnické pomôcky ktoré sa vyskytujú pri prvých školských výpočtoch s týmto typom súčinu. Postupujeme nasledovne: Vieme, že výsledkom vektorového súčinu je opäť vektor, teda objekt so zložkami. Namiesto postupného výpočtu prvej, druhej, tretej, nájdeme i -tu zložku hľadaného vektora:

$$[\vec{c}]_i = c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Napríklad pre $i = 1$ máme

$$c_1 = \epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + 0 + \dots + 0 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

pričom nuly predstavujú členy obsahujúce $\epsilon_{112}, \epsilon_{133}$ atď.

Dvojitý vektorový súčin $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Na miesto podivného mnemotechnického "bác mínus cáb" si uvedomme, že výsledkom je znova vektor, ktorému nájdeme všeobecnú i -tu zložku (a teda

všetky):

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \epsilon_{ijk} a_j [\vec{b} \times \vec{c}]_k \\
&= \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{kmn} b_m c_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} a_j b_m c_n \\
&= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) a_j b_m c_n \\
&= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
&= [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]_i
\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Zmiešaný súčin $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i [\vec{b} \times \vec{c}]_i \\
&= a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = c_k \epsilon_{kij} a_i b_j = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})
\end{aligned}$$

Vektorová analýza. Pripomeňme, že operácie ako rotácia, divergencia, gradient zahŕňajú aplikáciu "nabla operátora" spôsobom veľmi pripomínajúcim vektorovú algebru. Uvedme najprv trochu efektívnejšiu notáciu než aká sa prezentuje obvykle: namiesto priestorových súradníc x, y, z používajme x_1, x_2, x_3 . Čitateľ už snáď tuší motiváciu: chceme mať možnosť písať x_i a starať sa o všetky zložky súčasne, s bonusom skrátenia zápisu parciálnych derivácií v štýle $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$.

$$\begin{aligned}
\text{grad} f &= \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \\
[\text{grad} f]_i &= \partial_i f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{div} \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) \\
\text{div} \vec{V} &= \partial_i V_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{div grad} f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right) \\
\Delta f &= \partial_i \partial_i f
\end{aligned}$$

$$\text{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)$$

$$[\text{rot} \vec{V}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j V_k$$

Vyzbrojení vyššie uvedeným, môžeme si odvodiť niekoľko identít vektorovej analýzy hojne využívaných napríklad vo výpočtoch súvisiacich s elektromagnetizmom či hydrodynamikou. Prvé dve sú "maskované identické nuly", totiž rotácia gradientu a divergencia rotácie. Obe nuly sa dajú ukázať aj krkolomným rozpísaním do zložiek, ktoré sa (za predpokladu bezomylnnej manipulácie)

nakoniec vzájomne vykompenzujú na nulu. Avšak s našou mašinériou ide o veľmi stručný výpočet, pretože $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$, a $\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j$ a ako vieme, súčin takýchto objektov (antisymetrického a symetrického vzhľadom na zámenu tej istej dvojice indexov) je nula. Dosiaľ nepresvedčený čitateľ je pozvaný vyskúšať všetky uvedené výpočty bez indexovej notácie a ponúknutých skratiek.

$$\begin{aligned} [\text{rot grad } f]_i &= [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)]_i \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{V}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \\ &= \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Na záver si spočítajme známu identitu pre rotáciu rotácie vektorového poľa. Ide o špeciálny prípad dvojitého vektorového súčinu, ktorý sme videli vyššie.

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j [\vec{\nabla} \times \vec{V}]_k \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m V_n \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j \partial_m V_n \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m V_n \\ &= \partial_i \partial_j V_j - \partial_j \partial_j V_i \\ &= [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}]_i \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

Toto je pomerne technická partia matematiky, pre ľudí počítajúcich s mnohozložkovými objektami podobne vítaná ako bolo logaritmické pravítko pred príchodom vreckových kalkulačiek. Pre niekoľko výpočtov sa možno neoplatí investovať do jej zvládnutia. Viac výpočtov bez nej prispieva k ochote si ju naštudovať, akokoľvek sa zdá byť cvičením v presúvaní symbolov⁸.

⁸ Aj básnik sa najprv musí naučiť pravopis (aspoň natoľko aby mu bolo rozumieť), a keby mal pri každom verši dodatočne konzultovať slovník, možno by aj ľutoval, že nevenoval trochu času aj veľmi prozaickým štúdiám.

3 Po tokoch vektorových polí, alebo vektorová analýza

S algebrou sa dá urobiť veľa. Diferenciálny počet však priniesol tiež mnoho. Je užitočné vedieť ho aplikovať nielen na skalárne funkcie, ale aj na všeobecnejšie objekty. Tento text si nekladie ako prvotný cieľ matematickú úplnosť. Ostávame tu s vysvetleniami na intuitívnej úrovni. Po takom osvojení si pojmov je čitateľ pozvaný siahnuť po rigoróznějších pojednaniach, než poskytujú tieto poznámky.

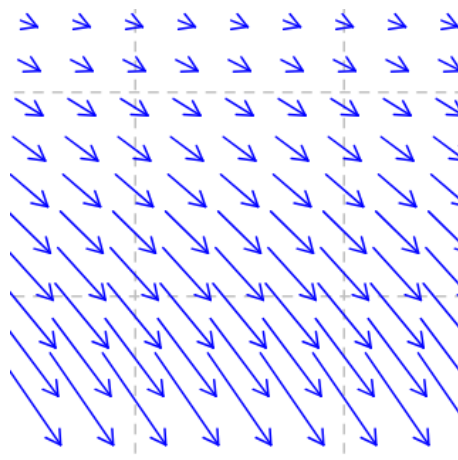
Na začiatok si ujasníme pojem **poľa**. Poznáme už azda čísla, vektory, tenzory... a poznáme funkcie, ktoré jednému objektu priradia nejaký ďalší. Zovšeobecním a spojením týchto pojmov prichádzame k pojmu skalárnych, vektorových, tenzorových polí. Pole priradzuje nejaký typ objektu každému bodu v priestore, na ktorom je definované.

Obyčajná funkcia jednej premennej je v podstate **skalárne pole** definované na číslenej osi (alebo jej časti). Každému jej bodu priradí číslo (funkčnú hodnotu). Funkcia dvoch premenných nám na rovine (x,y) definuje tiež skalárne pole, lebo každému bodu z roviny (resp jej časti spadajúcej do definičného oboru) priradí práve jedno číslo (Např. $f(x,y) = x^3 - y^2$ priradí bodu $(1,2)$ číslo -3). A tak ďalej do vyšších rozmerov. Skalárne pole je predpis priradzujúci každému bodu jedno číslo - skalár. Teda funkcia definovaná na nejakom priestore predstavuje skalárne pole.

Vektorové pole priradí každému bodu priestoru vektor. Napríklad pole \vec{V} s komponentami (x,y^2) priradí bodu $(3,2)$ vektor s komponentami $(3,4)$. **Tenzorové pole** (vektor a skalár sú typmi tenzorov) priradí každému bodu tenzor atď.



Obr. 7: Pole obilia



Obr. 8: Pole vektorov

Skalárne pole vyčíslené v nejakom konkrétnom bode je číslo. Vektorové pole vyčíslené v nejakom bode je vektor, tenzorové pole vyčíslené v nejakom bode je jednoducho tenzor, všetko ako poznáme z elementárnej lineárnej algebry. Je veľmi užitočné skúmať, ako sa tieto hodnoty z miesta na miesto menia a ako prudko sa to deje. V prípade skalárneho poľa na 1 rozmernom priestore sa jedná o obyčajnú deriváciu, o využití ktorej asi niet mnoho pochyb; zovšeobecnenie má azda podobnú šancu na úspech.

Dostávame sa tak do ríše vektorovej analýzy.

3.1 Nabla

Význačnú úlohu vo vektorovej analýze v euklidovsko svete hrá **nabla operátor**

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\end{aligned}\tag{10}$$

Pozrime sa naň ako na ”**bázové operátorové vektorové pole**”, kde na mieste bázových vektorov v smere jednotlivých osí, teda namiesto $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, máme $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Je to azda nečakaný krok v tomto štádiu, ale ospravedlnený jeho neskoršou užitočnosťou. Určité náznaky motivácie však možno ponúknuť už teraz:

- **Bázovosť:** vyjadrenie cez derivácie voči súradniciam hovorí o prepojení s bázou, na ktorú sa tie súradnice vzťahujú.
- **Operátorovosť:** parciálne derivácie zrejme budú pôsobiť (operovať) na niečom (čo závisí od niekoľkých premenných).
- **Vektorovosť:** značenie sugestívne naznačuje, že počet zložiek zodpovedá rozmerom definičného oboru objektov, na ktoré má operátorové pole pôsobiť. Vektor síce nie je vektorom len svojim počtom zložiek, ale toto dáva nádej, že sa o nejaký môže jednať.
- **Polnosť:** parciálne derivácie naznačujú možnosť zmien ”z miesta na miesto”

Ako s viaczložkovou vecou sa s nabla operátorom dajú aspoň formálne robiť **analogické operácie ako poznáme z algebry**, teda vyzerá to, že sme na dobrej ceste k rozšíreniu starých známych operácií ako násobenie skalárom, skalárne násobenie (snáď sa tieto už toľko nepletú), vektorový súčin.

Upozornenie k značeniu: v tejto kapitole niekedy voľne zamieňame výrazy *vektorové pole* a *komponenty, ktorými je reprezentované*. Prísne vzaté, ak máme zvolené bázové vektory $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, potom vektorové polia možno písať ako kombinácie týchto bázových vektorov, pričom koeficienty kombinácie sa z miesta na miesto môžu meniť ⁹

$$\vec{V} = V^x(x, y, z)\vec{e}_x + V^y(x, y, z)\vec{e}_y + V^z(x, y, z)\vec{e}_z$$

Budeme si to skracovať na

$$\vec{V} = (V^x(x, y, z), V^y(x, y, z), V^z(x, y, z))$$

v duchu zásady, že v didaktike je úzkostlivá dôslednosť niekedy na škodu zrozumiteľnosti. Vektorové pole má svoje komponenty jednoznačne priradené, ak je zafixovaná báza, voči ktorej tie komponenty má. Tu budeme predpokladať, že báza je daná a fixovaná.

⁹O rovnakosti či nerovnakosti bázy samotnej na rôznych miestach tu nemusí byť reč, sme v euklidovskej geometrii kde ignorovanie tejto otázky obvykle neprináša problémy, aj keď to azda býva viac vďaka šťastiu než rozumu.

3.2 Gradient

Jedná sa o analóg jednoduchšej operácie, ktorú vo vektorovej algebre poznáme ako **násobenie vektora skalárom**. Obvykle sa na vec pozeráme tak, že každú zložku vektora vynásobíme tým istým číslom:

$$a\vec{V} = (aV^x, aV^y, aV^z)$$

Dá sa to však vyjadriť aj z druhej strany - že násobíme skalár vektorom, teda všetky zložky nášho vektora necháme pôsobiť na to isté číslo jednoduchým algebraickým násobením:

$$\vec{V}a = (V^xa, V^ya, V^za)$$

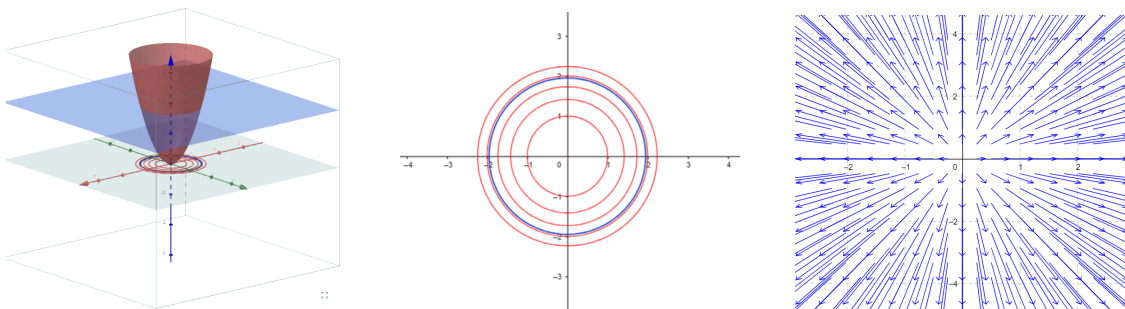
Samozrejme je to to isté - ale taká formálna zmena pohľadu na *pôsobenie na skalár* má výhodu v tom, že je potom ľahšie operáciu zovšeobecniť na polia, osobitne na naše operátorové pole $\vec{\nabla}$, ktorého každá zložka pôsobí na skalárne pole (už nie tradičným násobením, ale ako môže):

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \quad (11)$$

Dostávame tak **gradient funkcie, vektorové pole**¹⁰, ktorého zložky nám hovoria, ako sa funkcia mení v smere zodpovedajúcej osi. Je to naozaj rozšírenie jednorozmerného prípadu, keď nám obyčajná derivácia funkcie $f(x)$ podľa jedinej relevantnej premennej x hovorila, ako sa funkčné hodnoty menia pozdĺž osi x , aj keď v 1D nemalo veľa zmyslu hovoriť o smere.

Vo viacerých rozmeroch $\vec{\nabla}f$ má smer, ktorým treba postupovať pre najprudšiu zmenu funkčných hodnôt. Jedná sa o vektorové pole v definičnom obore, teda pre funkciu 2 premenných je 2D, pre funkciu troch premenných 3D...).

Gradient úzko súvisí s pojmom **vrstevnice**, ujasnime si teda ešte aj ten. Vrstevnica je množina bodov na definičnom obore, na ktorých má funkcia f konštantnú hodnotu. Pre funkciu 2 premenných $f(x, y)$ je to vo všeobecnosti krivka v rovine x, y , súbor bodov viazaných podmienkou $f(x, y) = c$. Pre funkciu 3 premenných $f(x, y, z)$ ide o plochu v priestore x, y, z , súbor bodov viazaných podmienkou $f(x, y, z) = c$ atď. Názov vrstevnica pochádza z analógie s turistickými mapami. Keďže je ťažké znázorniť nadmorskú výšku, funkciu dvoch premenných, na plochý papier, rieši sa vec tak, že sa zakreslia jej vrstevnice. **Pozdĺž vrstevnice sa funkčná hodnota nemení vôbec. V smere kolmom na vrstevnicu, čo je práve smer gradientu, sa mení najprudšie.**



Obr. 9: Graf funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2$, vrstevnice $x^2 + y^2 = \text{konšt.}$ a gradient $(2x, 2y)$

¹⁰Poznámka pre nadšencov diferenciálnej geometrie: Slovo vektor má viac významov. V istom kontexte je gradient funkcie kovektor, prvok z duálneho priestoru k objektom, ktoré sa tam nazývajú vektory. Avšak priestor kovektorov je tiež vektorový priestor (v zmysle lineárny), teda v tomto zmysle kovektor je vektor. Zložky gradientu nemusia byť vo všeobecnosti iba parciálne derivácie ako sú uvedené v texte, ale v euklidovskom prípade tomu tak je. Nenadšenci diferenciálnej geometrii po prečítaní tejto poznámky nepochybné modifikujú svoj prístup, otáznne len je, ktorým smerom.

3.3 Rotácia

Z formálneho hľadiska ide o analóg **vektorového súčinu**. Teda $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ bude pôsobiť na vektorové pole $\vec{V} = (V^x, V^y, V^z)$ podobne ako pri vektorovom násobení čo sa týka kombinácie zložiek, ale samozrejme jedná sa o operátorové pôsobenie. Výsledkom je opäť **vektorové pole**.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V^x & V^y & V^z \end{vmatrix} \quad (12)$$

teda zložky sú

$$(\partial_y V^z - \partial_z V^y, \partial_z V^x - \partial_x V^z, \partial_x V^y - \partial_y V^x)$$

Už samotný fakt, že hovoríme o vektorovom súčine, naznačuje, že na rozdiel od divergencie a gradientu, pri ktorých rozšírenie do iného počtu rozmerov znamená len pridanie ďalších členov, tu je veľmi význačná trojrozmernosť. Teda $\vec{\nabla}$ treba aplikovať na vektorové pole s tromi zložkami. Ak má len jednu alebo dve, dajú sa doplniť dvoma alebo jednou nulou a máme o trojrozmernosť postarané, vo vyššom počte rozmerov sa rotácie treba zriecť.

Rotácia vyjadruje **mieru vírivosti, cirkulačného charakteru** vektorového poľa, a tiež **zmysel** otáčania (proti smeru alebo v smere hodinových ručičiek) a **smer** osi, okolo ktorej otáčanie zisťujeme. Ako takýto intuitívny popis súvisí s algoritmom výpočtu zložiek rotácie (12) si ukážeme o chvíľu.

3.3.1 Špeciálny význam 3D

Ujasnime si však ešte trochu pohľad na rotácie. Bežne sa o rotáciách vyjadrujeme ako o *otočeniach okolo nejakej osi*, ale práve tak by sme mohli hovoriť o *otočeniach v rovine kolmej na túto os*. Práve tak však len v 3D, kde ku každej osi jednoznačne prislúcha práve jedna rovina na ňu kolmá. Vo iných rozmeroch sa už o otočeniach *okolo osi* jednoznačne hovoriť nedá. V 1D je ťažko o rotácii vôbec hovoriť v zaužívanom zmysle, keďže tam je rotáciou zrkadlenie okolo nejakého bodu, diskretná, nespojitá operácia (v zmysle nemožnosti pootočiť objekt infinitezimálne málo). V 2D nám os otáčania ani nespadá do daného priestoru (vyčnieva kolmo na uvažovaný svet). V 4 a viac rozmeroch ku každej rovine otáčania prislúcha viac nezávislých kolmých osí. Jedine v 3D platí, že máme práve toľko navzájom kolmých osí (tento počet sa zhoduje s dimenziou priestoru) ako rovín. Počet nezávislých osí je počet "bázových" translácií, počet nezávislých rovín je počet "bázových" rotácií. Ťažko vôbec odhadnúť, akú hĺbku tento fakt v našom svete má¹¹. Každopádne rotačná a translačná symetria sa objavuje naprieč fyzikou odkedy táto vôbec vznikla, na veľmi očividných aj veľmi abstraktných úrovniach.

Ešte ujasnime, prečo je vo všeobecnosti veľmi prirodzené chápať rotácie ako operáciu *v nejakej rovine*. Jednoducho to vidno v popise transformácie, ktorá rotáciu sprevádza. Napr. pri operácii, ktorej hovoríme *otočenie okolo osi z*, sa nám miešajú x-ové a y-ové súradnice objektov, kým z-ová sa len vezie.

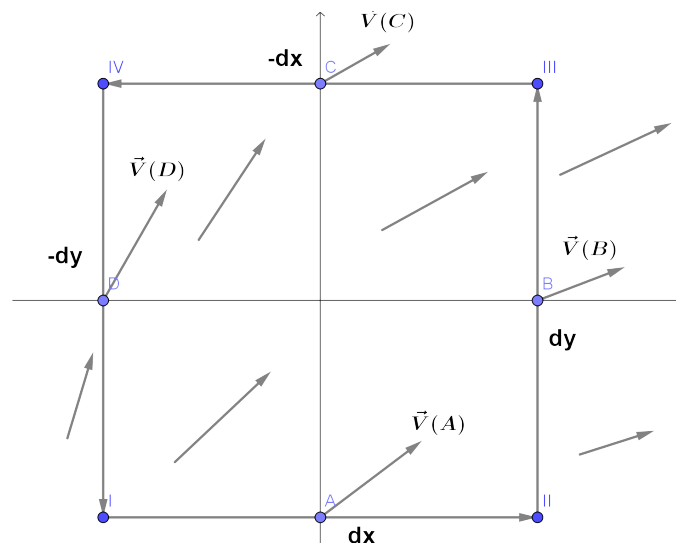
$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos \phi - y \sin \phi \\ \tilde{y} &= y \cos \phi + x \sin \phi \end{aligned}$$

¹¹Pre nadšencov špeciálnej relativity: Okrem iného súvisí s tým, že potom je počet boostov zhodný s počtom rotácií a štruktúra, ktorá tak vzniká, je príbohatá na poznámku pod čiarou.

3.3.2 Miera cirkulácie

Vráťme sa však k rotácii ako *mieri cirkulácie* vektorového poľa. Že sa bude jednať o rotovanie v nejakej ploche, je zrejmé z komentára o vektorovom súčine. Keďže v nabla operátore vystupujú derivácie, bude sa zrejme jednať o niečo citlivé na infinitezimálnych vzdialenostiach - vhodné merať vírovosť na veľmi malej plôške. Čo je veľmi pozitívna vec, keď si človek uvedomí, že kúsok ľubovoľnej hladkej plochy, ak je dostatočne malý, možno považovať za kúsok roviny. S plochými vecami sa dobre počíta. Takáto plôška disponuje nejakou ohraničujúcou krivkou, a miera vírivosti poľa bude vlastne mierou toho, nakoľko sa prúdica poľa *ovíja* súhlasne s ohraničujúcou krivkou (znamienko orientácie krivky je vecou konvencie). Miera takéhoto súhlasu toku poľa a obiehania dokola po krivke sa ľahko nájde pre vhodne zvolenú krivku.

Ukážme si to na situácii, keď je plochou malý obdĺžnik s vrcholmi *I, II, III, IV* v rovine (x,y) , hraničnou krivkou *c* je štvorica jeho strán dĺžky dx, dy , kladný smer obiehania vezmeme proti smeru hodinových ručičiek. Povedzme, že máme dané nejaké vektorové pole \vec{V} so zložkami $V^x(x, y), V^y(x, y)$, teda vektor v každom bode, teda aj v každom bode našej obiehajúcej krivky.



Obr. 10: Veľkosť rotácie je mierou cirkulácie poľa

Ak je náš štvoruholník dost' malý a pole dost' hladké (žiadne divoké zmeny medzi susednými bodmi), potom pole má v blízkych bodoch blízke hodnoty. Nedopustíme sa praveľkej chyby, ak budeme predpokladať, že pozdĺž jednej strany obdĺžnika má všade hodnotu ako v strede tejto strany. Teda vezmeme hodnoty poľa \vec{V} v "reprezentatívnych bodoch - stredoch strán A,B,C,D". Priemet nášho poľa do obiehanej krivky je vecou jednoduchého skalárneho súčinu a počítavania príspevkov zo všetkých 4 strán obdĺžnika. Ak si ešte uvedomíme, že stredy protifaľných strán sú od seba vzdialené len o infinitezimálne dx, dy , máme k dispozícii Taylorov rozvoj komponent

$V^x(x, y), V^y(x, y)$. V ďalšom píšeme skrátene A namiesto (x_A, y_A) atď.

$$\begin{aligned}
 \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{r} &= V^x(A)dx + V^y(B)dy - V^x(C)dx - V^y(D)dy & (13) \\
 &= V^x(A)dx + V^y(B)dy - V^x(A + dy)dx - V^y(B - dx)dy \\
 &= V^x dx + V^y dy - (V^x dx + \partial_y V^x dy dx) - (V^y dy - \partial_x V^y dx dy) \\
 &= -\partial_y V^x dy dx + \partial_x V^y dx dy \\
 &= (\partial_x V^y - \partial_y V^x) dx dy \\
 &= (\vec{\nabla} \times \vec{V})_z dx dy
 \end{aligned}$$

Ako vidíme, výpočet cirkulovania v rovine x, y nám dal z -ovú zložku rotácie ako bola uvedená v algoritme (12) prenásobenú veľkosťou obiehanej plôšky.

Pre plochy väčšie ako infinitezimálne platí veľmi priamočiare zovšeobecnenie v podobe Stokesovej vety. (Veľká plôška sa dá podeliť na malé, zdieľajúce svoje vnútorné hranice. Príspevky od týchto zdieľaných hraníc sa však vyrušia kvôli orientácii, a ostane len cirkulácia po vonkajšej krivke.)

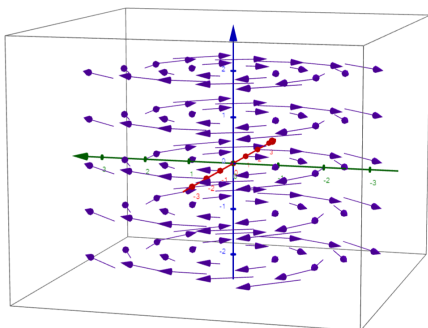
$$\oint_{c=\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{V} dS \quad (14)$$

Tu ∂S znamená hranicu¹² plochy S , teda uzavretú krivku c .

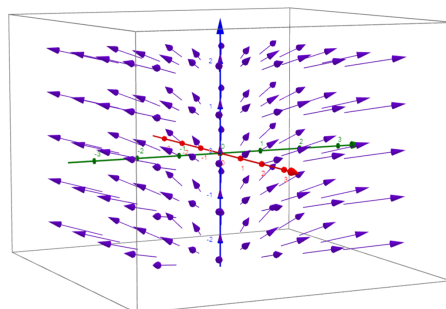
Toto je integrálne chápanie rotácie: **Integrál z rotácie poľa cez nejakú plochu je cirkulácia tohto poľa pozdĺž hranice spomínanej plochy**, čo je uzavretá krivka. Špeciálne teda integrál z rotácie cez uzavretú plochu musí byť nulový, keďže taká plocha nemá hranicu.

3.3.3 Gradient necirkuluje

Ukážme si príklad poľa $\vec{W} = (y, -x, 0)$ s nenulovou rotáciou v každom bode a poľa $\vec{U} = (2x, 2y, 1)$, ktoré má všade rotáciu nulovú.



Obr. 11: Negradientové pole
 $\vec{W} = (y, -x, 0)$
 $\vec{\nabla} \times \vec{W} = (0, 0, -2)$



Obr. 12: Gradientové pole
 $\vec{U} = (2x, 2y, 1)$
 $\vec{\nabla} \times \vec{U} = (0, 0, 0)$

Všimnime si, že pole \vec{W} nie je gradientom nijakej funkcie - neexistuje taká, ktorá by spĺňala $\vec{\nabla} f = \vec{W}$. To by znamenalo $\partial_x f = y \cap \partial_y f = -x$, čo nie je možné súčasne splniť. Naproti tomu

¹²Značenie pripomínajúce deriváciu má svoju motiváciu v teórii diferenciálnych foriem, kde jeho použitie vyzerá omnoho prirodzenejšie ako tu.

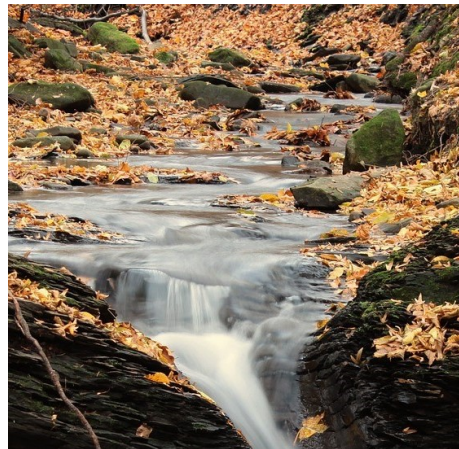
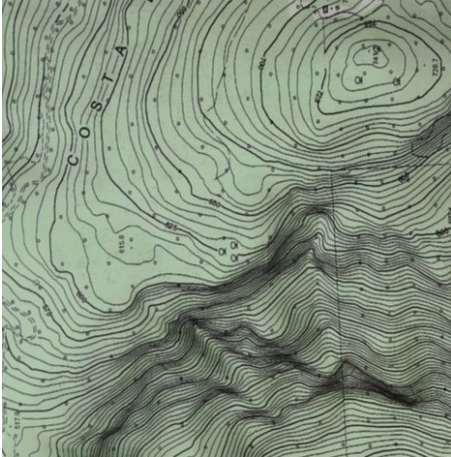
pole \vec{U} je gradientom funkcie $x^2 + y^2 + z$. Nie je to len náhoda. Rotácia gradientu je identicky nulová:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (15)$$

pretože parciálne derivácie komutujú

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{e}_x(\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f) + \vec{e}_y(\partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f) + \vec{e}_z(\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) = 0$$

V niektorých prípadoch je to vcelku názorné. Predstavme si potok na horách - steká ako môže dole, v línii gradientu (prísne vzaté s opačnou orientáciou), teda kolmo na vrstevnice. Nebude nás vodiť v kruhu.



Obr. 13: Kolmo na vrstevnice sa netočíme dokola. Nielen kvôli smädu sa stratení pútnici držia potoka.

3.4 Divergencia

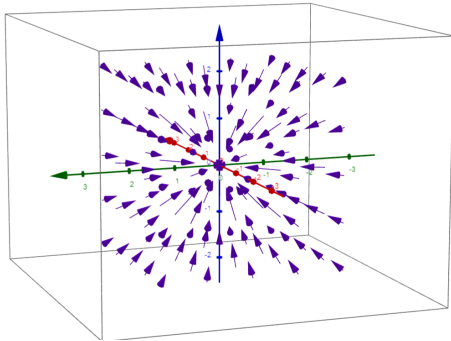
Výpočtovo ide o analóg **skalárneho súčinu** operátora $\vec{\nabla}$ s komponentami $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ a vektorového poľa \vec{V} s komponentami (ktoré sú vo všeobecnosti funkciami všetkých premenných) V^x, V^y, V^z . Ako sa patrí na skalárny súčin, výsledkom je **skalárne pole**.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_x V^x + \partial_y V^y + \partial_z V^z \quad (16)$$

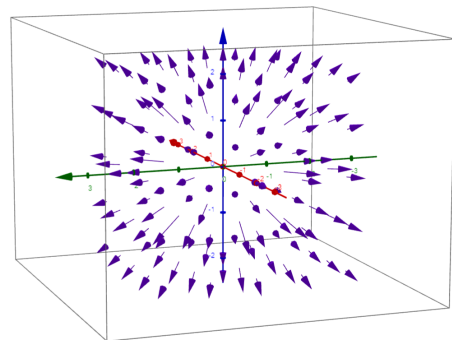
Zovšeobecnenie do iného počtu rozmerov spočíva len v očividnej úprave počtu členov sčítaných v (16). Pozrime však, čo tento výraz intuitívne predstavuje, aké je interpretácia. **Divergencia** vektorového poľa je "lokálny" pojem, vďaka zastúpeniu derivácií je citlivá na zložky vektorového poľa v danom bode a jeho infinitezimálnom okolí. Predstavuje zdrojovosť poľa v danom bode.

Vektorové pole vytvára akýsi **tok**. Pokiaľ do nejakej oblasti vymedzenej nejakou hranicou - napríklad trojrozmerného objemu ohraničeného uzavretou plochou - priteká dnu práve toľko čo odteká von, potom daná oblasť je len **tranzitná** - nič tam nepribúda, nič sa nestráca. Divergencia by tam mala byť nulová. Príkladom je pole rýchlosti nestlačiteľnej kvapaliny alebo magnetické pole,

ktorého siločiaru predstavujú uzavreté krivky bez zdrojov a prepádísk. Pokiaľ do nejakej oblasti viac priteká ako odteká, predstavuje táto oblasť **prepadlisko** a divergencia by tam mala byť záporná. Príkladom je tok elektrického poľa cez uzavretú plochu okolo záporného elektrického náboja - siločiaru idú všetky dnu. Pokiaľ je bilancia opačná, z oblasti viac vychádza ako do nej vchádza, je oblasť **zdrojová** a divergencia je tam kladná. Príkladom je elektrické pole tečúce cez uzavretú plochu okolo kladného náboja - všetky siločiaru idú von¹³.



Obr. 14: pole budené záporným nábojom v počiatku



Obr. 15: pole budené kladným nábojom v počiatku

3.4.1 Miera zdrojovosti

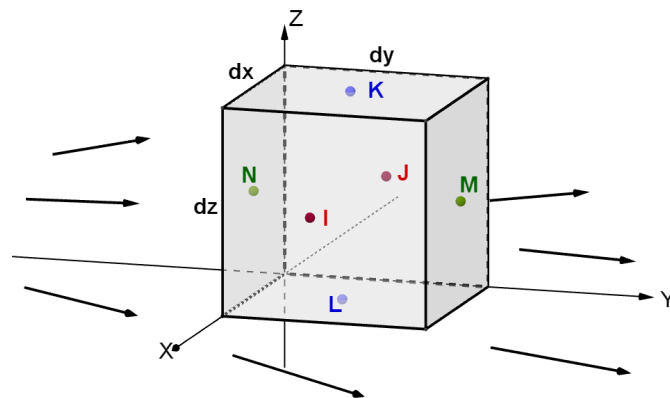
Ako súvisí tok cez hranicu nejakej oblasti s divergenciou počítanou ako (16)? Ukážme si to na príklade jednoduchšej oblasti v tvare kvádra, ktorej plášť bude predstavovať hranicu. Kváder má jeden z vrcholov v počiatku súradnej sústavy a hrany rovnobežné s osami.

Označme si stredy strán nasledovne:

N je stred strany v rovine xz , M je stred protiláhlej strany, vzdialenej o dy .

L je stred strany v rovine xy , K je stred protiláhlej strany, vzdialenej o dz .

J je stred strany v rovine yz , I je stred protiláhlej strany, vzdialenej o dx .



Obr. 16: Tok poľa \vec{V} cez uzavretú plochu ohraničujúcu malý objem

Nechajme cez kváder pretekať nejaké vektorové pole s komponentami V^x, V^y, V^z (všetky môžu

¹³Samozrejme orientácia siločiar dnu či von pre záporný či kladný náboj je vec konvencie, akurát musia byť tieto voľby opačné.

závisieť od x, y, z , obrázok je len ilustračný). Pokiaľ je kváder veľmi malý, môžeme približne predpokladať, že pole na ktoromkoľvek mieste danej steny sa veľmi neodlišuje od hodnoty, ktorú má v strede tej steny. Tok poľa nejakou plochou počítame ako skalárny súčin tohto poľa a vektora priradeného danému elementu plochy (je to vektor rovnobežný s normálou na plochu, veľký ako daná plocha, a orientovaný konvenčne "smerom von" z uzavretého objemu). **Tok cez celú uzavretú plochu** je potom jednoducho **plošný integrál** cez ňu. V našom prípade, s uvážením, že steny kvádra majú veľmi jednoduché normály (vždy v smere osi komplementárnej k rovine s ktorou sú rovnobežné) a veľkosť (napríklad $dx dz$) atď., a že protifaľhé steny sú od seba vzdialené buď o dx , alebo dy , alebo dz , a teda že je možné urobiť Taylorov rozvoj komponent poľa v bodoch takto blízko pri sebe, máme:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} &= [-V^y(N) + V^y(M)]dx dz + [-V^z(L) + V^z(K)]dx dy + [-V^x(J) + V^x(I)]dy dz \quad (17) \\ &= [-V^y(N) + V^y(N + dy)]dx dz + [-V^z(L) + V^z(L + dz)]dx dy \\ &\quad + [-V^x(J) + V^x(J + dx)]dy dz \\ &= \partial_y V^y dy dx dz + \partial_z V^z dz dx dy + \partial_x V^x dx dy dz \\ &= (\partial_x V^x + \partial_y V^y + \partial_z V^z)dx dy dz \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dV \end{aligned}$$

Úvaha v (17) sa dá zovšeobecniť aj pre väčšie a zložitejšie oblasti, lebo tie sa dajú nasekať na menšie, podobné nášmu malému kvádríku. Tok cez zdieľané vnútorné hranice sa vyruší (čo ide z kvádríka von, ide do susedného dnu) a ostane len tok cez vonkajší obal. Potom dostávame **súvis divergencie poľa preintegrovanaj cez objem a toku cez plochu ohraničujúcu tento objem**, v podobe **Gaussovej vety**:

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dV \quad (18)$$

kde ∂_V označuje hranicu¹⁴ objemu V , teda uzavretú plochu S .

Toto je integrálne chápanie divergencie: **Interál divergencie poľa cez nejaký objem je celkový tok poľa hranicou tohto objemu (čo je uzavretá plocha)**.

3.4.2 Cirkulácia bez zdrojov

Spomeňme ešte zaujímavý prípad polí s identicky nulovou divergenciou. Sú to polia, ktoré sú samy rotáciami nejakých polí.

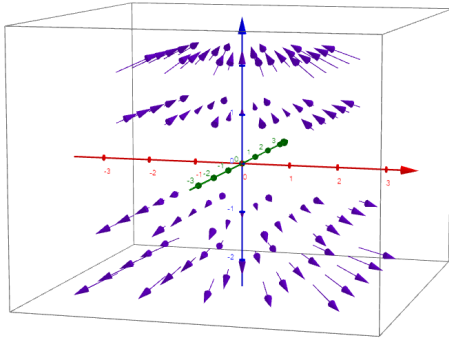
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \partial_x (\partial_y V^z - \partial_z V^y) + \partial_y (\partial_z V^x - \partial_x V^z) + \partial_z (\partial_x V^y - \partial_y V^x) = 0$$

Intuitívne pochopenie faktu, že divergencia rotácie je identicky nulová, je azda ľahšie v integrálnej verzii. Potrebujeme Gaussovú vetu (18), Stokesovu vetu (14) a fakt, že uzavretá plocha nemá hranicu:

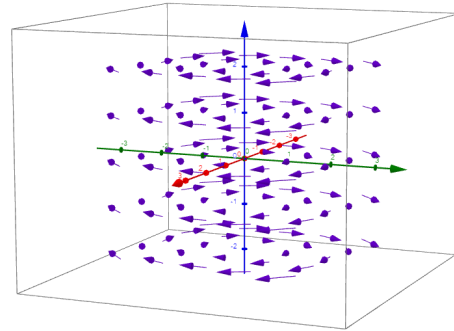
Objemový integrál z divergencie poľa $\vec{\nabla} \cdot \vec{R}$ nám hovorí, aký je tok poľa \vec{R} hranicou objemu, teda uzavretou plochou. Ale ak $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$, potom ten plošný integrál je mierou cirkulácie poľa \vec{U} po hranici tejto plochy. Uzavretá plocha však nemá hranicu (hranica hranice je nula).

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) dV = \oiint_{S=\partial V} (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \cdot d\vec{S} = \oint_{c=\partial S=\partial \partial V} \vec{U} \cdot d\vec{r} = 0$$

Vyskúšajme si konkrétny príklad: $\vec{U} = (-xz, -yz, z)$: toto má divergenciu nenulovú všade okrem bodov rovin $z = \pm 0, 5$. Jeho rotácia $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$ so zložkami $(y, -x, 0)$, má všade divergenciu



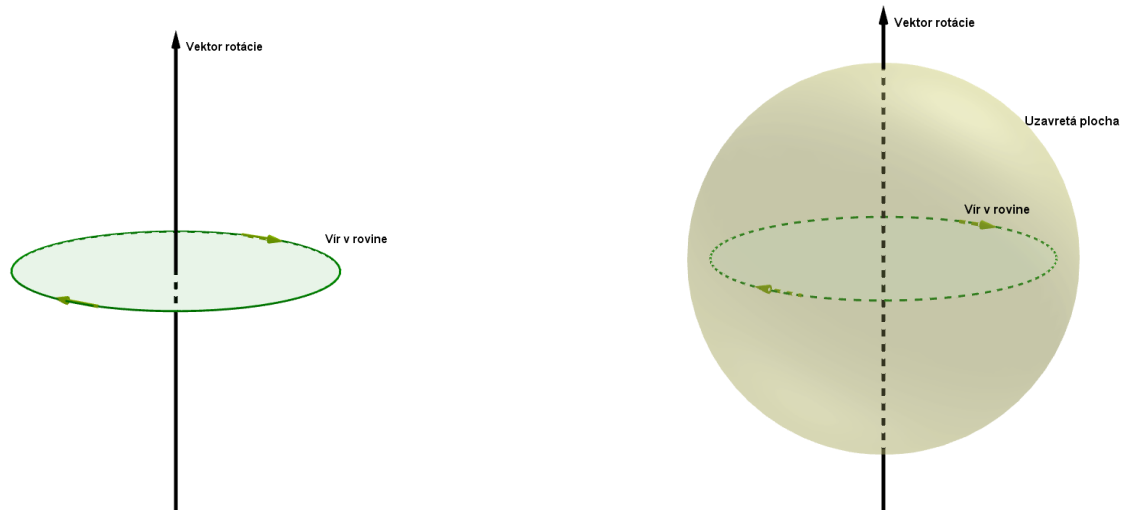
Obr. 17:
 $\vec{U} = (-xz, -yz, z)$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 1 - 2z$



Obr. 18:
 $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = (y, -x, 0)$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$

nulová.

Veľmi jednoduchá vizualizácia faktu, že divergencia rotácie je nulová, je založená na predstave jednoduchého víru v rovine, vektora rotácie kolmého na ňu a uzavretej plochy obopínajúcej vír.



Obr. 19: Vír v rovine. Rotácia je vektor kolmý na túto rovinu. Pri jeho vizualizácii nezabudnime znázorniť os otáčania na obe strany roviny, v ktorej je vír - vynechať jednu je obdobou vynechania polovice slučky. Potom akákoľvek uzavretá plocha obsahujúca náš vír je vektorom rotácie prepichnutá rovnako dnu ako aj von. Inými slovami, koľko rotácie ide dnu, toľko ide von, teda divergencia rotácie je nulová.

3.5 Laplacián

Tento operátor sa vyskytuje v matematickej fyzike tak často, že dostal meno. Môže operovať na skalárnych aj vektorových či vyšších tenzorových poliach (jednoducho po zložkách, teda laplacián skalárneho/vektorového poľa je skalárne/vektorové pole). Pri pôsobení na skalárne pole f sa z

¹⁴Podobnosť s deriváciou v symbole hranice je ospravedlnená teóriou diferenciálnych foriem.

hľadiska výpočtových algoritmov jedná o **divergenciu gradientu**, teda sumu druhých parciálnych derivácií (bez miešaných)

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f$$

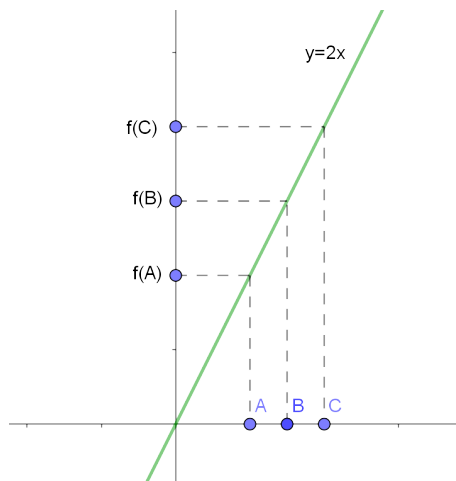
Už zastúpenie **druhých derivácií** z neho robí prominentný operátor vo fyzike, kde majú druhé derivácie zastúpenie dosť bohaté na to, aby človeku trochu zovšedneli a hrozí, že sa prestane pýtať čo im dáva taký význam. Je ešte stále otázne, či sme to už naplno pochopili.

3.5.1 Stredná krivosť alebo miera nerovnomernosti

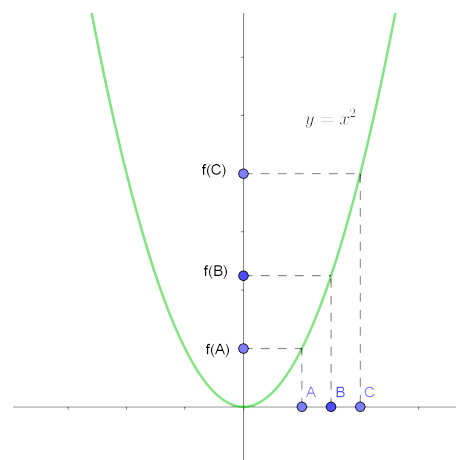
Intuitívny význam laplaciánu môžeme vyjadriť nasledovne: Δf v nejakom bode je úmerné rozdielu funkčnej hodnoty v danom bode od priemeru funkčných hodnôt v susedných bodoch. Ide teda o **mieru odchýlky od lokálneho priemeru** (strednú krivosť). Ukážeme si to v 1 rozmere, kde je laplacián jednoducho druhá derivácia. Zovšeobecnenie na viac rozmerov je len otázka viacerých členov a parciálnych derivácií namiesto obyčajných.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} - \frac{f(x) - f(x-\epsilon)}{\epsilon}}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon) - 2f(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon^2} \left(\frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)}{2} - f(x) \right) \end{aligned} \tag{19}$$

Funkcie, ktoré majú v nejakom bode nulový laplacián, majú v blízkom okolí takého bodu "v priemere vyrovnaný" graf, pretože funkcia tam musí mať rovnomerne rozložené hodnoty - o koľko na jednu stranu menej, o toľko na druhú stranu viac (špeciálny prípad: na oboch stranách rovnako). V 1 rozmere to môže splniť len funkcia, ktorej grafom je priamka alebo jej časť. V 2 a viacerých rozmeroch je už situácia pestrejšia.

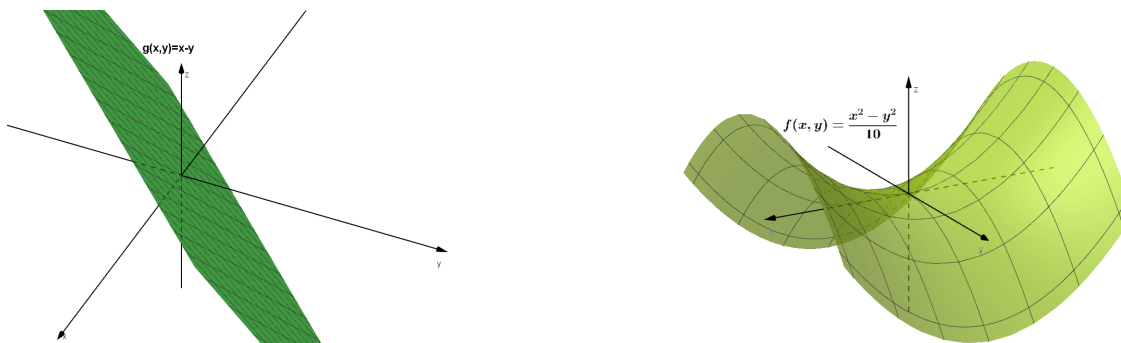


Obr. 20: Funkčná hodnota v bode je priemerom hodnôt v susedných bodoch, teda $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$



Obr. 21: Funkčná hodnota v bode sa líši od priemeru hodnôt v susedných bodoch, teda $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$

Vo viacerých rozmeroch už nulovosť laplaciánu môže nastať aj u funkcií, ktorých grafy nie sú rovné ako rovina (tieto samozrejme laplacián nulový majú), ale sú v "priemere vyrovnané". Funkcie spĺňajúce $\Delta f = 0$ sa volajú **harmonické funkcie**.



Obr. 22: Obe funkcie majú funkčné hodnoty rozložené rovnomerne v zmysle nulového laplaciánu.

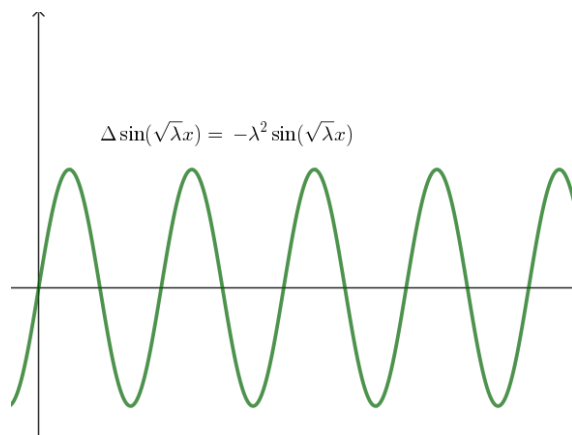
3.5.2 Vlastné funkcie

Harmonické funkcie sú vlastne osobitým prípadom **vlastných funkcií laplaciánu**, na ktoré laplacián pôsobí veľmi jednoducho - preškákuje ich príslušnou vlastnou hodnotou λ , teda

$$\Delta f = \lambda f \quad (20)$$

Vlastné funkcie laplaciánu majú "strednú krivosť", mieru toho, ako sa rozloženie funkčných hodnôt líši od "priemerne rovnomerného", úmernú svojej vlastnej hodnote. Harmonické funkcie, zodpovedajúce nulovej vlastnej hodnote, teda sú majú funkčné hodnoty "v priemere rovnomerne rozložené" všade.

Napríklad funkcie sínus alebo kosínus, vlastné funkcie druhej derivácie (laplaciánu v 1D), sú v takomto zmysle najviac zakrivené vo svojich minimách a maximách.



Obr. 23: Odchýlka funkčných hodnôt od priemeru susedov je pre funkciu $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ priamo úmerná funkčnej hodnote v danom bode, s konštantou úmernosti $-\lambda^2$.

Keďže laplacián sa vyskytuje v mnohých lineárnych rovniciach popisujúcich dôležité javy (vedenie tepla, tepelná rovnováha, šírenie vln...), majú jeho vlastné funkcie osobitný význam. Osobitne preto, že často tvoria pre daný problém tzv. úplný systém, čo zhruba znamená, že všetky relevantné funkcie (osobitne hľadané riešenia rovnice) sa dajú napísať ako ich lineárne kombinácie. Známa **Fourierova transformácia** je príkladom systematického využívania vlastných funkcií laplaciánu v kartézskych súradniciach, na pravouhlých doménach. Niektoré špeciálne funkcie (napr. Besselove) súvisia s problémom vlastných hodnôt laplaciánu v cylindrických či sférických súradniciach (nemusia byť priamo jeho vlastnými funkciami). Keďže vyjadrenie laplaciánu v iných ako

kartézskych súradniciach vyzerá relatívne zložito, je namieste otázka, prečo vôbec nejakú rovnicu písať v iných súradniciach a rozkladať veci do zložitejších funkcií namiesto fourierovských sínusov a kosínusov. Odpoveď je jednoduchá - laplacián nie je jediná vec čo, sa v rovniciach vyskytuje, plus ešte je tu tvar domény a okrajové podmienky, ktoré majú na tvar riešenia porovnateľný dopad ako rovnica samotná. Ak iné prvky v rovnici alebo okrajové podmienky vykazujú inú ako translačnú symetriu (táto volá po kartézskych súradniciach), býva často výhodné voliť súradnice, ktoré ju rešpektujú. Osobitne je to výhodné pre sféricky alebo cylindricky symetrické situácie, keďže tie vykazujú aj laplacián, a teda príslušná zámena súradníc jeho kvality rešpektuje tiež.

3.5.3 Symetrie laplaciánu

Pod symetriou rozumieme nasledovné: Je to invariantnosť voči nejakej transformácii. Tu budeme spomínať dvojrozmerný priestor, samozrejme vec sa dá zovšeobecniť. Teda urobíme transformáciu premenných

$$x, y \longrightarrow \tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)$$

a máme nové vlnkové premenné vyjadrené pomocou starých bezvlnkových. Podľa situácie si niekedy potrebujeme ešte explicitne vyjadriť aj inverznú transformáciu, teda staré premenné pomocou nových, $x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})$. Potom prepíšeme náš skúmaný objekt (operátor, rovnicu atď) do nových súradníc. Ak sa tým nezmení jeho tvar (okrem pridania vlnoviek na symboly), je ten objekt voči danej transformácii invariantný.

Ukážme si to na translácii zodpovedajúcej posunutiu o konštantné (a, b) : to je operácia, ktorá nám prevedie $x, y \longrightarrow \tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)$ nasledovne:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(x, y) &= x + a \\ \tilde{y}(x, y) &= y + b\end{aligned}$$

Keby sme na niečo potrebovali (v tomto prípade nebude treba) inverznú transformáciu (vyjadrenie starých súradníc pomocou nových), je

$$\begin{aligned}x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{x} - a \\ y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \tilde{y} - b\end{aligned}$$

Nabla operátor je voči transláciám invariantný, lebo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial(x+a)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(y+b)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial(x+a)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(y+b)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\end{aligned}$$

Teda nabla operátor si v nových, posunutých súradniciach zachoval tvar ako predtým

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)$$

Laplacián potom samozrejme tiež zachová formu, je tiež translačne invariantný, alebo symetrický voči transláciám:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$$

Podobne možno ukázať, aj keď s trochu väčšou spotrebou času a papiera, že laplacián si zachová formu pri pootočení súradníc. V troch rozmeroch je invariantný voči transláciám podľ všetkých osí a rotáciám vo všetkých súradných rovinách (a voči ich kombináciám).

Symetrie laplaciánu vyjadrujú veľmi hlboké fakty o geometrii daného priestoru. To, že v euklidovskom priestore je symetrický vzhľadom na translácie a rotácie, súvisí s tým, že uhly a dĺžky, ako sú definované v euklidovskej geometrii, sú invariantné voči takýmto transformáciám. Intuitívne to možno očakávať na základe interpretácie laplaciánu funkcie ako miery odchýlky funkčnej hodnoty v danom bode od priemeru hodnôt u susedov. Myslia sa samozrejme všetci rovnako vzdialení susedia. A pojem "rovnako vzdialení" vyžaduje mať jasno v tom, ako sa v danom priestore počítajú vzdialenosti - teda o geometrii toho priestoru.

4 Harmonická analýza

S Fourierovou analýzou sa stretajú študenti mnohých technických aj prírodovedných oborov. Vedieť napísať periodickú funkciu ako nejakú lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov s vhodne zvolenými periódami, či už je to kombinácia v podobe diskkrétnej sumy alebo integrálu, je požiadavka tradičná takmer ako znalosť Taylorovho rozvoja. Odhliadnuc od tradície, prečo je také užitočné vedieť rozkladať funkcie, a konkrétne rozkladať ich na sínusy a kosínusy? Motiváciu možno hľadať na viacerých úrovniach.

Rozkladať veci na zložky je niekedy rovnako dôležité ako ich zložiť. Stručnejšie neznamená vždy jednoduchšie. Pri mnohých výpočtoch je snaha skomprimovať výrazy na čo najmenší počet členov, "zabaliť" k sebe patriace údaje do matíc či tenzorov, zaobchádzať s celkami namiesto častí. Táto metóda má svoje miesto, ale zostručňovanie nie je základným výpočtovým princípom, v zmysle že by vždy pomohlo. Niekedy sa oplatí veci rozkladať namiesto skladania. Často je motiváciou **analýza daného objektu**. Je to čosi ako spätná rekonštrukcia receptu z hotového jedna - majú celok, hľadáme "komponenty". (Laboratóriá na lekárskech pohotovostiach v hubárskej sezóne by vedeli rozprávať). Vo fyzike je príkladom analýza vektorových veličín - nie vždy nás zaujíma celý vektor sily, niekedy sú kľúčové jeho zložky v konkrétnych význačných smeroch atď. Samozrejme vec sa obvykle dá rozložiť rôznymi spôsobmi, a výber z nich má vplyv na náročnosť (povedzme rovno prevediteľnosť) výpočtu.

Prečo zrovna **rozklad do sínusov a kosínusov**? Mnoho procesov v prírode a technike je **periodických**. (A nakoniec ak pripustíme zovšeobecnenie na nekonečne dlhú periódu, sú efektívne periodické všetky - čo je práve myšlienka zovšeobecnenia rozvoja do Fourierovho radu na Fourierovu transformáciu.) Sínus a kosínus sú azda najznámejšie periodické funkcie a je známych mnoho trikov ako s nimi efektívne narábať. Jednoducho sa derivujú a integrujú, sú to slušné, ohraničené, analytické funkcie definované na celej číselnej osi. Ale ešte kľúčovejšie je, že sa jedná o **vlastné funkcie Laplaciánu v kartézskych súradniciach**. Laplacián sa vyskytuje v mnohých rovniciach popisujúcich významné procesy v prírode (a často má problém translačnú symetriu ktorá volá po použití kartézskych súradníc). Vlastné funkcie sa pri pôsobení Laplaciánom len preškálujú svojou vlastnou hodnotou, teda z derivovania sa efektívne stáva násobenie. Vymeniť **diferenciálne rovnice za algebraické** je vo všeobecnosti veľmi výhodný ťah.

Osobitou výhodou je **dostupnosť týchto kvalít aj pre ostatné funkcie** v nasledujúcom zmysle: Obvykle máme dočinenia s doménami, na ktorých je Laplacián hermitovský a jeho vlastné funkcie tam tvoria **úplný systém**. Teda dajú sa nimi vyjadriť všetky relevantné funkcie ako nejaká ich suma. Výhodu "derivácia zľavnená na násobenie" tak možno rozšíriť aj na ne (aj keď niekedy za cenu rozsiahleho sumovania nekonečných radov), aspoň v prípade, keď sa jedná o **lineárne diferenciálne rovnice** (kde diferenciálne operátory fungujú na sumách "distributívne").

Algoritmus Fourierovho rozvoja/transformácie si pre úplnosť uvedieme aj tu, hoci je známy a možno ho nájsť v takmer každej učebnici základnej analýzy. (Počet rozličných normovacích a označovacích konvencií sa blíži k počtu spomínaných učebníc, a nie je vylúčené jeho presiahnutie. Záležitosť Fourieriových radov je posiatá rozličnosťou konvencií a mohla by byť štandardnou odvykacou kúrou pre ľudí príliš sa spoliehajúcich na automatické preberanie formuliek a vizuálnu pamäť.) Často sa však stáva, osobitne na technických školách, že algoritmus je naozaj len mechanickým návodom, napriek názornosti myšlienky čo je za ním. Práve na túto názornosť by sme sa tu mali sústrediť. Možno si pritom tiež rozšíriť chápanie notoricky známych operácií vo vektorovom priestore, ujasniť si rolu laplaciánu v známych lineárnych parciálnych diferenciálnych rovniciach, oceniť služby komplexnej roviny aj pre reálne problémy, a nazrieť do matematickej stránky toľko spomínaného "princípu neurčitosti" z kvantovej mechaniky.

4.1 Vektor nemusí byť šípka

Rozkladanie funkcie do Fourierovských zložiek je analogické **rozkladu vektora do bázových komponent**. Prísne vzaté nie len analogické, je to špeciálny prípad takej procedúry. Vektory sú síce poväčšinou predstavované ako nejaké orientované smerové šípky, ale to, čo tieto reprezentujú, je len jedna z mnohých realizácií pojmu vektora. Na otázku, čo je vektor, je vhodné odpovedať "**prvok vektorového priestoru**". Nejde o vtíp. Vektor je vzťahové označenie - nevyhnutne v sebe nesie **vzťah k ostatným prvkom svojho druhu** a bez nich "vektorovosť" nemá zmysel. Je to čosi podobné ako povedať o niekom že je "brat nevyhnutne vyvstáva jeho vzťah k nejakej rodine, bez ktorej taká identifikácia nemá zmyslu. Teda vektor je prvok vektorového priestoru, čo je akási rodina vektorov. Na to, aby sa nejaká skupina objektov kvalifikovala na vektorový priestor (nad nejakým poľom, odkiaľ sa berú koeficienty lineárnej transformácie - napr. reálne či komplexné čísla), musí spĺňať isté predpoklady. Ich plnú korektnú formuláciu možno nájsť v korektných matematických príručkách, tu si uvedme tie, ktoré budú teraz pre nás kľúčové:

- ak nejaký prvok patrí do vektorového priestoru, tak tam patrí aj každý jeho skalárny násobok
- ak dva vektory patria do tohto priestoru, potom aj ich lineárna kombinácia tam patrí
- patrí tam nulový vektor, s vlastnosťou že jeho pripočítanie k ľubovoľnému členovi tohto člena nezmení
- ku každému členovi prislúcha aj opačný, v zmysle že ich súčet je nulový vektor
- sčítavanie je komutatívne a asociatívne
- násobenie skalárom je distributívne, komutatívne, asociatívne

Samozrejme "šípkové vektory" sa kvalifikujú podľa týchto pravidiel, ale zďaleka nie len ony. Aj polynómy konečného stupňa, so sčítaním a násobením chápanými najintuitívnejším spôsobom ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$) tvoria vektorový priestor. Podobne matice či samotné reálne čísla, alebo ohraničené funkcie, po častiach hladké a s konečným počtom nespojitostí na každom konečnom intervale. Trieda funkcií rozvinuteľných do Fourierovho radu alebo transformovateľných Fourierovou transformáciou tiež tvorí vektorový priestor. (Čitateľ je povzbudený skontrolovať každú požiadavku pre aspoň niektoré tieto rodiny, prípadne si naštudovať literatúru pojednávajúcu o rozšírení nielen pojmu vektorového priestoru, ale aj mnohých operácií, ktoré sa často považujú za synonymné svojej základnoškolskej reprezentácii.)

Naše príklady vektorových priestorov uvedené vyššie majú všetky **lineárnu štruktúru**, ale sa veľmi líšia nielen povahou svojich objektov, ale aj ich počtom či spočítateľnosťou. Toto súvisí s **bázou** daného priestoru. Každú maticu $n \times n$ vieme napísať ako konečnú kombináciu n^2 "bázových matíc" (trebárs typu "všade nuly, okrem i, j -teho miesta"). Báza môže mať mnoho členov, ale je konečná. Polynómy konečného stupňa však majú bázu pozostávajúcu z nekonečného počtu prvkov (polynóm $n+1$ stupňa totiž nijako nezapišeme ako lineárnu kombináciu nižších polynómov - a počet stupňov menších ako nekonečno je nekonečný). Taká báza je však aspoň spočítateľná (v zmysle v akom sú spočítateľné prirodzené čísla). Mnohé rodiny funkcií majú nespočítateľnú bázu.

Nekonečnosť bázy by nás však nemala odradiť. Je pravda, že v konečnorozmerných vektorových priestoroch (napríklad prípad "známych" geometrických vektorov ako ich poznajú deti v škole) jeden z dôvodov, prečo sa báza zavádza, je práve ekonomickosť - je výhodné mať niekoľko vektorov, pomocou ktorých vieme vyjadriť nekonečne veľa iných. V prípade **nekonečnorozmerných vektorových priestorov** máme bázu s nekonečným počtom prvkov, pomocou ktorej vieme vyjadriť nekonečne veľa iných - ale "nie je nekonečno ako nekonečno". Navyše, bázové vektory volíme čo najvýhodnejšie - počet prvkov nebol jediný dôvod, prečo vôbec zavádzať bázy.

Ukážme si, ako veľmi sa metódy z lineárnej algebry dajú preniesť aj do vektorových priestorov periodických funkcií. Táto partia sa týka rozvoja do Fourierových radov. Prípad Fourierovej

transformácie, čo je zovšeobecnenie metódy na neperiodické funkcie (resp. funkcie s nekonečnou periódou), sa potom pomerne hladko pripojí.

4.2 Skalárny súčin nie je len pravidlo pre násobenie komponent

Pripomeňme najprv, ako to bolo v lineárnej algebre: Zvolila sa báza, niekoľko význačných vektorov. Počet zodpovedal rozmeru priestoru, teda v 2D dva vektory, v 3D tri - nie viac, nie menej. Pri privedení vektoroch by bol rozklad nejednoznačný, pri primálo by nebol vždy možný. Okrem **správneho počtu prvkov bázy** bolo potrebné, aby boli **nezávislé**. Teda žiaden z nich nesmel byť lineárnou kombináciou ostatných. Osobitne žiaden z nich nesmel byť nulový vektor. Potom nasledovali ešte ďalšie požiadavky na bázu, tieto ale boli viac vecou pohodlia ako nutnosti. Bázové prvky boli obvykle volené kolmé a s jednotkovou veľkosťou. Tu sa však treba trochu zastaviť. Ak v nejakom vektorovom priestore máme možnosť hovoriť o **veľkosti vektorov** a ich vzájomných **uhloch**, potrebujeme nejakú **štruktúru navyše**, samotná, minimálna lineárna výbava vektorového priestoru na zadefinovanie pojmov dĺžky a uhla nestačí. Potrebujeme **skalárny súčin**, operáciu kompatibilnú s lineárnou štruktúrou, pomocou ktorej spomenuté pojmy možno zaviesť. Ak dĺžky a uhly patria k základným geometrickým pojmom, potom v definícii skalárneho súčinu na danom priestore je vlastne vyjadrená geometria tohto priestoru. Je to hlbšia téma než je vhodné otvárať v poznámke "pomimo", ale treba to spomenúť. Pripomenieme si tu vlastnosti skalárneho súčinu, a potom si spomenieme jeho realizáciu v euklidovskej geometrii - s vedomím, že euklidovskosť geometrie je zakódovaná práve spôsobom, akým tam skalárny súčin funguje.

- ako argumenty (vstupné dáta) berie dva vektory a ako hodnotu dá číslo $\vec{v} \cdot \vec{u}$
- je symetrický $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- v oboch vstupoch je lineárny, teda $(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) \cdot \vec{w} = \alpha\vec{v} \cdot \vec{w} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w}$
- je nedegenerovaný v zmysle $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Disponujúc takýmto nástrojom, dĺžka vektora bola definovaná ako

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (21)$$

a uhol dvoch vektorov ako

$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{uv} \quad (22)$$

Naproti tomu mnemotechnická pomôcka "sčítania súčinu po zložkách", teda algoritmus výpočtu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$$

je až dôsledkom výberu bázy a správania sa bázových vektorov ohľadne skalárneho súčinu. Nech bázové vektory \vec{e}_i (teda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, kde spodný index¹⁵ neoznačuje komponentu, ale celý bázový vektor v i-tom smere) sú jednotkové, v smere súradných osí, a nech pre ich vzájomné skalárne súčiny máme (v euklidovskej geometrii):

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (23)$$

Potom platí, že komponenty vektorov voči takejto báze sa pri skalárnom súčine kombinujú podľa známeho pravidla. K jeho jednoduchosti prispieva, že množstvo členov pri roznásobovaní je nulových.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v^i \vec{e}_i \cdot u^j \vec{e}_j = v^i u^j \delta_{ij} = v^i u^i \quad (24)$$

¹⁵V nasledujúcom budeme čoraz častejšie využívať indexovú notáciu, zide sa už pri troch rozmeroch (a čo potom pri nekonečných!).

Skalárny súčin sa dá použiť aj na **extrahovanie zložky vektora** v smere niektorého prvku bázy. I-tu komponentu (i-ty koeficient z lineárnej kombinácie báзовých vektorov, ktorou je vektor vyjadrený) dostaneme ako súčin nášho vektora \vec{v} s i-tým báзовým vektorom \vec{e}_i

$$v^i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i = v^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = v^j \delta_{ij} = v^i \quad (25)$$

Tu to vyzerá natoľko samozrejme že je až podivné sa s tým zapodievať, ale práve jednoduché veci treba mať rozpisané do jednoduchých detailov, ak máme v pláne hľadať analógie či zovšeobecňovať.

4.3 Rozklad do Fourierovho radu

Presuňme sa k ďalšiemu vektorovému priestoru, stále sa obzerajúc na analógiu z lineárnej algebry. Vezmime priestor **periodických funkcií** reálnej premennej t , s periódou T (samozrejme to nemusí byť najmenšia perióda, funkcia s periódou $T/100$ má aj periódu T), ktoré spĺňajú tzv. Dirichletove podmienky: integrál z absolútnej hodnoty za periódu je konečný, v rámci jednej periódy je konečne veľa maxím, miním a nespojitostí (a každá nespojitosť je konečná). Toto je široká trieda funkcií, zahŕňajúca modely všakových dejov a signálov s ktorými sa stretávame v technike a fyzike. Je ťažko si vôbec predsať, ako by sa dal vyrobiť signál, ktorého matematický model by nespĺňal Dirichletove podmienky. Mimochodom, aj funkcie obmedzené na konečný interval sa dajú "rozšíriť", v zmysle že na zvyšok osi umiestnime periodicky ich kópie. Tieto funkcie tvoria **vektorový priestor**. Naozaj, lineárna kombinácia dvoch takých funkcií je stále periodická a dirichletovská, identická nula hrá rolu nulového vektora, a záporne vzatá funkcia rolu opačného vektora. Operácie súčtu a násobenia skalárom sa samozrejme myslia "pobodovo", teda pod lineárnou kombináciou funkcií f, g s konštantnými koeficientami α, β rozumieme funkciu $\alpha f + \beta g$ ktorej predpis (pôsobenia na premennú t) je chápaný ako

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Tento priestor funkcií môžeme dokonca vybaviť **skalárnym súčinom**. Potrebujeme predpis, ktorý dvom našim vektorom-funkciám priradí číslo, pričom bude spĺňať požiadavky symetrie, bilinearitu a nedegenerovanosti. Integrál cez jednu periódu tieto požiadavky spĺňa:

$$f \cdot g = \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)g(t) \quad (26)$$

symetria $\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)g(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt g(t)f(t)$

nedegenerovanosť $\int_{-T/2}^{T/2} dt f^2(t) = 0 \rightarrow f(t) = 0$

linearita $\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)(\alpha g(t) + \beta h(t)) = \alpha \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)g(t) + \beta \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)h(t)$

Keďže sa Fourierove rady, ku ktorým tu smerujeme, často používajú na **analýzu signálov** majúcich priebeh v čase, a pod periódou sa myslí naozaj nejaký časový úsek, je množstvo terminológie a označení prispôbené práve časovej tematike. Nemal by však byť problém "preložiť" si potrebné

veci na iné situácie, keď sa trebárs jedná o periodickosť v priestore a pod. Hranice integrálov ovedené vyššie sú tiež do iste miery vecou konvencie - je potrebné integrovať cez celú periódu, ale pokiaľ funkcia nemá nejako ohraňovaný definičný obor, môžeme integrovať od 0 po T , alebo od $-T/2$ po $T/2$, alebo od $T/3$ po $4T/3$ atď.

Teraz k báze. Náš priestor funkcií je nekonečnorozmerný, počet prvkov bázy bude tiež nekonečno. Mala by to byť nekonečne početná rodina funkcií jednak nezávislých, úplná v zmysle že všetko ostatná sa dá vyjadriť pomocou nich, a podľa možnosti v nejakom zmysle jednoduchých, vzájomne kolmých (teda s nulovým skalárnym súčinom), a s jednotkovou veľkosťou. Všetko toto spĺňajú **vlastné funkcie operátora druhej derivácie**, sínusy a kosínusy s periódou rovnou T/n pre nejaké celé n .

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega_n t) = -\omega_n^2 \sin(\omega_n t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega_n t) = -\omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

Pre skrátenie označenia budeme používať pojem **frekvencie**¹⁶

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Môžeme ich v prípade potreby preškálovať vhodným faktorom zabezpečujúcim jednotkovú veľkosť (pod veľkosťou tu samozrejme rozumieme odmocninu zo skalárneho súčinu vektora samého zo sebou).

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(\omega_n t) \sin(\omega_m t) = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad m, n \neq 0 \quad (27)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_n t) \cos(\omega_m t) = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad m, n \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos 0 \cos 0 = T$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_n t) \sin(\omega_m t) = 0$$

Ako vidno, veľkosť našich bazových funkcií je $\sqrt{\frac{2}{T}}$ pre prípady $\omega_n \neq 0$ a $\sqrt{\frac{1}{T}}$ pre prípad $\omega_n = 0$. Teda ortonormálnu bázu, nekonečnorozmerný analóg vektorov \vec{e}_i z lineárnej algebry, tvorí systém normalizovaných ”**harmoník**”

$$\sqrt{\frac{1}{T}}, \quad \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_n t), \quad \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_n t)$$

¹⁶Tu tiež môže nastať trocha zmätku. Pod slovom frkvencia sa často myslí prevrátená hodnoty periódy, teda naša ω je 2π krát väčšia. To sa niekedy rieši pomenovaním ω uhlovou frekvenciou, a niekedy uhlovou rýchlosťou. To následne vyvoláva otázky prečo sa vôbec nejaký uhol spomína, keď sa modeluje systém kde sa nič netočí (hoci v abstraktnom zmysle to zmysel má aj tam...). Vyriešime to tu nazvaním ω frekvenciou a vyzvaním čitateľa, aby vždy čítal kontext.

Veľmi často sa však narába s nenormalizovanou bázou, teda len s $1, \cos(\omega_n t), \sin(\omega_n t)$, aby sa do rozvojov neťahali už od začiatku normalizačné faktory (všimnime si, že funkcia $f = 1$ nie je "jednotková"!). Samozrejme, ony sa potom objavajú inde. Znova vec konvencie a dôvod byť v strehu. Poďme teraz nájsť analóg **rozvoja vektora do bazových zložiek** $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$. S pohľadom na našu bázu to bude

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad (28)$$

$f(t)$ je analógom \vec{v} , harmoniky sú analógom \vec{e}_i , a koeficienty a_0, a_n, b_n sú analógmi komponent v^i . Faktor $1/2$ pri nultom člene je zas vec konvencie, je tu zaradený v preferencii oproti jeho objaveniu sa inde.

Nájdime teraz analóg vzťahu (25), teda spôsob, ako **nájsť komponenty** $f(t)$ voči našej báze. V lineárnej algebre sa postupovalo **vynásobením vektora tým prvkom bázy, ktorého zastúpenie v rozvoji sme hľadali**. To predsa vieme urobiť aj tu, len nezabudíme, že skalárne násobenie tu zahŕňa aj preintegrovanie cez periódu. Nájdime postupne koeficienty a_0, a_n, b_n , tie hovoria o zastúpení $\cos 0, \cos(\omega_n t), \sin(\omega_n t)$ v rozvoji $f(t)$. Teda vynásobme rozvoj (28) postupne $\cos 0, \cos(\omega_m t), \sin(\omega_m t)$ (treba dávať pozor na použitie iného indexu ako "hluchého" sumačného) a preintegrujme cez periódu T , berúc pritom do úvahy vzťahy medzi samotnými bazovými funkciami (27).

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos 0 = \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos 0 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = \frac{a_0}{2} T$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos(\omega_m t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_m t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = a_n \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \sin(\omega_m t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(\omega_m t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = b_n \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

Teda predpis pre koeficienty v rozvoji (28) je

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \cos(\omega_n t) \quad (29)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \sin(\omega_n t)$$

Platí pre $n = 0, 1, 2, \dots$. Jednotnosť predpisu aj pre nultý koeficient je dôvodom, prečo bol v (28) definovaný s faktorom $1/2$.

4.4 Diferenciálne za algebraické

Diferenciálne rovnice, a parciálne osobitne, nemajú vo všeobecnosti nejaký algoritmus na riešenie, ako tomu bolo trebárs pri kvadratických či kubických rovniciach. Niektoré metódy fungujú na niektoré rovnice. Mať niekoľko trikov v zásobe môže veľmi pomôcť. Previesť **diferenciálnu rovnicu**

na algebraickú, alebo aspoň nahradiť niektoré derivácie algebraickými operáciami, znamená veľmi často prísť bližšie k riešeniu. Tu sa sústredíme na **lineárne rovnice**, našťastie veľa dôležitých patrí do takej kategórie. Fourierovská báza funkcií tu má široké použitie. Mnohé dôležité rovnice zahŕňajú **laplacián** (sumu druhých derivácií podľa priestorových premenných, v jednom rozmere jednoducho druhú deriváciu). Druhá derivácia funguje na svojich **vlastných funkciách** (harmonikách) ako **jednoduché preškáľovanie vlastnou hodnotou**. Keďže často pracujeme na doménach, kde tvoria **vlastné funkcie laplaciánu úplný systém**, je vcelku dobrá nádej, že **rozkladom neznámej funkcie do fourierovskej bázy prevedieme aspoň časť "diferenciálnosti" na "algebraickosť"**.

Ukážeme si to na príklade rovnice vedenia tepla a vlnovej rovnice, v 1 priestorovom a 1 časovom rozmere. Povedzme, že skúmame šírenie tepla pozdĺž tyče (popisuje rovnica vedenia tepla), alebo ustálený tepelný stav na tyči (limitný prípad vedenia tepla, popisuje Laplaceova rovnica), alebo kmity takej tyče (popisuje vlnová rovnica). Všetky tri zahŕňajú laplacián (v 1 rozmere druhá derivácia podľa "priestorovej premennej"), takže vlastné funkcie laplaciánu na tejto oblasti budú hrať významnú rolu. Vo všetkých troch prípadoch si predstavme, že skúmame oblasť na úsečke $0 \leq x \leq L$ v čase $0 \leq xt$. Povedzme, že máme zadané všetky okrajové podmienky aj počiatočné podmienky. Postup je v princípe rovnaký všade:

Treba nájsť vlastné funkcie laplaciánu na danej oblasti, spĺňajúce okrajové podmienky. Zostaviť z nich "Ansatz", teda navrhnúť hľadané riešenie rovnice ako ich kombináciu. Naše hľadané riešenie rovnice je síce funkcia definovaná len na malej časti osi x , môžeme z nej urobiť periodickú funkciu jednoducho tak, že jej hodnotu na zvyšku osi definujeme periodicky. Pokiaľ máme úplný systém vlastných funkcií, hľadaná funkcia sa bude dať v každom okamihu vyjadriť ako nejaká ich kombinácia - a tento rozvoj ju bude verne reprezentovať na úseku osi x , na ktorom je definovaná, čo nám stačí. Je namieste očakávať, že v rôznych okamihoch pôjde o rôznu kombináciu. Táto závislosť na čase však znamená akurát to, že rozvojové koeficienty a_n, b_n , aj keď konštantné v priestore, budú závislé od času, teda máme $a_n(t), b_n(t)$. Aby sme zistili, ako konkrétne od času závisia, dosadíme náš "Ansatz" do rovnice - priestorové derivácie sa už prejavujú len ako algebraické násobenie, a časové derivácie nám poskytnú diferenciálnu rovnicu pre $a_n(t), b_n(t)$. Teda sme sa nezbavili všetkého derivovania, ale aj výmena parciálnej diferenciálnej rovnice za obyčajnú nie je málo. Rovnice pre $a_n(t), b_n(t)$ nám ich vo všeobecnosti neurčia jednoznačne, ostanú nejaké voľné parametre (už naozaj konštanty, v čase aj priestore). Tie potom ešte dopočítame z počiatočných podmienok.

Ak tieto kroky zneli príliš abstraktne, konkrétne príklady by mali pomôcť ten dojem vyliečiť.

Vedenie tepla a Fourierova transformácia

Skúmajme model **šírenia tepla**¹⁷ pozdĺž nejakej jednorozmernej oblasti. Môžeme si predstaviť dlhú tyč. Neznáma funkcia $u(x, t)$ bude predstavuje **teplotu**, meniacu sa pozdĺž tyče a v čase. Okrajové podmienky budú v tomto príklade volené tak, aby modelovali situáciu, keď sú konce tyče udržiavané na stabilnej teplote, rovnakej na oboch koncoch. Samozrejme je to len špeciálny prípad. Počiatočná podmienka (jedna, keďže rovnica je prvého rádu v čase) nám zadá rozloženie teploty na začiatku. Koeficient D je parametrom systému, súvisí s vodivosťou, je mierou "priechodnosti" pre teplo. Rovnica samotná nám dáva do súvisu laplacián funkcie Δu (v jednom rozmere je to len druhá derivácia podľa priestorovej premennej, ktorú budeme skrátene značiť u_{xx}), teda mieru nerovnomernosti priestorového rozloženia teploty, s časovou zmenou $\partial_t u$ (ktorú budeme skrátene značiť u_t).

Čím viac sa v nejakom bode líši funkčná hodnota (teplota) od priemeru susedných (mierou tejto odchýlky od priemeru v okolí je laplacián), tým prudšia časová zmena

¹⁷Tento model popisuje aj difúziu látky v rozpúšťadle. Prenos tepla možno chápať ako "difúziu energie".

sa v danom bode dá očakávať. S klesajúcou hodnotou Δu , teda s **klesajúcou odchýlkou od priemernosti, klesá aj časová zmena**. Keď je $\Delta u = 0$, je aj $\partial_t u = 0$, inými slovami, časový vývoj sa skončil a nastal **rovnovážny stav** - všetko **spriemerované** nakoľko okrajové podmienky umožňujú. Toto všetko sa v matematike zapíše stručne ako

$$D u_{xx} = u_t \tag{30}$$

$$0 \leq x \leq L \quad \text{okrajové podmienky } u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$0 \leq t \quad \text{počiatočné podmienky } u(x, 0) = f(x)$$

Táto rovnice je veľmi známa a je viac spôsobov ako s ňou zaobchádzať. Tu ju použijeme na ilustráciu použitia fourierovských rozkladov. Na výsledku je pekne vidieť "priemerovacia tendencia" časového vývoja daného laplaciánom.

Najprv nájdime vlastné funkcie operátora druhej derivácie, spĺňajúce dané okrajové podmienky, teda hľadáme rodinu funkcií

$$f_k(x) : \partial_{xx} f_k = -\lambda_k^2 f_k, \quad f_k(0) = f_k(L) = 0$$

kde vlastnú hodnotu sme zvolili v tvare, ktorý nám neskôr bude pohodlnejší na manipuláciu (asi netreba predstierať, že netušíme, že sa bude jednať o sínusy a kosínusy, a reálna exponenta neprichádza do úvahy pre nemožnosť splniť okrajové podmienky)

$$f_k(x) = \alpha \cos(\lambda x) + \beta \sin(\lambda x)$$

Okrajová podmienka $f_k(0) = 0$ nám z hry vyradí kosínus, a okrajová podmienka $f_k(L) = 0$ nám obmedzí (pokvantage, a to sme ani klasickú fyziku neopustili) možné vlastné hodnoty:

$$\sin(\lambda L) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{\pi k}{L}, \quad k \text{ celé číslo}$$

Teda máme bázu

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Našu hľadanú funkciu $u(x, t)$ a jej derivácie vyjadríme ako kombináciu vlastných funkcií laplaciánu, s koeficientami závislými od času:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\pi k}{L} \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice máme

$$-D \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$-D \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 c_k(t) = \frac{d}{dt} c_k(t)$$

$$c_k(t) = B_k e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}$$

Teda naše riešenie má formu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (31)$$

Koeficienty A_k sú zatiaľ neurčené konštanty, voči priestoru aj času, a zistíme ich z počiatkovej podmienky:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Teda koeficienty B_k sú práve koeficienty fourierovského rozkladu¹⁸ funkcie $f(x)$, zadanej ako popis priestorového rozloženia teploty na začiatku! A tieto už vieme ako sa hľadať:

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (32)$$

Napríklad ak $f(x) = c$ (na počiatku rovnaká teplota c na celej tyči) a potom by sme tyč pripojili k rezervoáru s nulovou teplotou na oboch koncoch, koeficienty by boli $4c/k\pi$ pre nepárne k , 0 pre párne k .)

Konečne máme teda riešenie rovnice vedenia tepla (30) pre naše počiatkové a okrajové podmienky:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (33)$$

Všimnime si podrobnejšie tento rad, a osobitne **časový vývoj jednotlivých harmoník**. Každá je násobená faktorom exponenciálne klesajúcim s časom. Tempo poklesu je ovplyvňované koeficientom D , ktorý je spoločný všetkým harmonikám, ale v exponente vystupuje aj k^2 , ktoré je pre rôzne harmoniky rôzne. **Vyššie, viac oscilujúce harmoniky (ktorých rozdelenie funkčných hodnôt má ďaleko od rovnomerného) majú exponenciálne-kvadraticky silnejší pokles ako tie miernejšie.** K -ta fourierovská zložka aj s jej časovo závislým faktorom je predsa vlastnou funkciou laplaciánu aj prvej časovej derivácie, s tou istou vlastnou hodnotou úmernou k^2

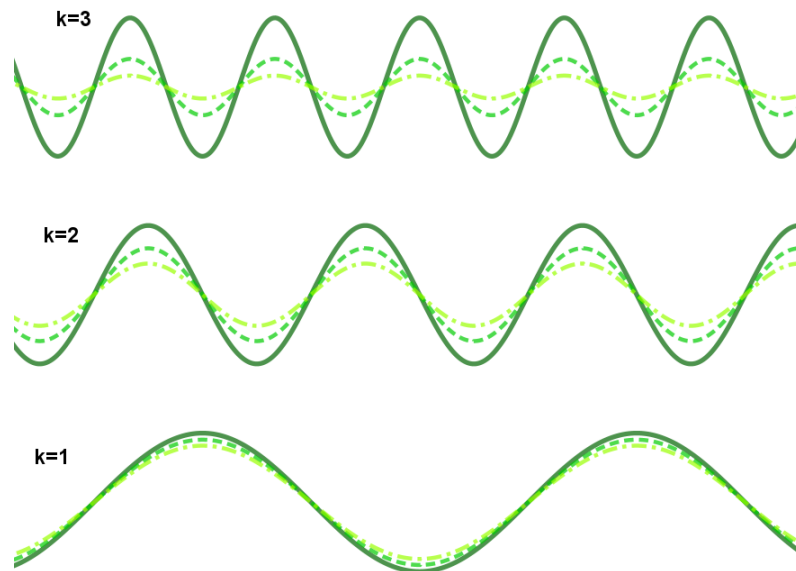
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

¹⁸Integračnú premennú nazveme \tilde{x} namiesto tradičného x , lebo o chvíľu budeme výraz dosádzať do vyjadrenia hľadaného riešenia $u(x, t)$, kde už x vystupuje ako voľná premenná. Nesluší sa (a prináša problémy) volať v jednom výraze voľné a presumované alebo preintegrované premenné rovnako.

To dobre súhlasí s bežnou skúsenosťou rozptylu tepla - **nerovnomernejšie rozdelenia majú tendenciu vyrovnať sa rýchlejšie.**

Na obrázku je znázornený časový útlm pre prvé tri harmoniky. Volili sme tu pre jednoduchosť $L = \pi$, $D = 0,1$ a znázornené sú momentky pre počiatočný čas (plné čiary), a časy o jednotku (prerušované čiara) a dve jednotky (bodkočiarkované krivky) neskôr ($t = 0, 1, 2$). Všetkým harmonikám sme dali počiatočné amplitúdy rovné jednej, vo všeobecnosti samozrejme závisia od počiatočného rozloženia daného podmienkou $u(x, 0) = f(x)$.



Obr. 24: Pri časovom vývoji danom laplaciánom sa nerovnomernejšie rozdelenia vyrovnávajú rýchlejším tempom

To dobre súhlasí s bežnou skúsenosťou rozptylu tepla - **nerovnomernejšie rozdelenia majú tendenciu vyrovnať sa rýchlejšie.**



Obr. 25: Parciálne diferenciálne rovnice a dilemy v kuchyni

Tu je aj odpoveď na "problém cestovín, omáčky a čakania na syr". Máme veľkú studenú kuchyňu, uvarené cestoviny teploty kuchyne, horúcu omáčku (ale sporák už vypnutý), a zabudli sme nastrúhať syr. To nám bude trvať nejaký čas. Za predpokladu, že chceme kompletne jedlo dostať na stôl čím teplejšie, čo je lepšie: Zmiešať omáčku a cestoviny a ísť strúhať syr, alebo nechať ich separátne, kým syr nenastrúhame? Podľa našej rovnice bude v prípade separátnej omáčky rozdiel medzi ňou a okolím veľký a teplo z nej unikne rýchlo. V prípade zmiešaných cestovín a omáčky je menší rozdiel medzi teplotou zmiešaného jedla a okolia, teda teplotná výmena bude prebiehať pomalšie. Samozrejme teplo z omáčky odovzdané cestovinám nepovažujeme za stratené. (Tento model nepočíta so stratou molekúl, ktoré sa deje vyparovaním z povrchu (čo tiež odnáša teplo) - dostupný povrch môže byť pri zmiešaní iný. Presnejší model by mal zahŕňať aj takéto morfológické prvky.)

Rovnica vedenia tepla hovorí aj o **tepelnej rovnováhe**¹⁹ - v tejto sa **časový vývoj sa skončil**, teda $u_t = 0$. Podľa našej rovnice to nastáva práve vtedy, keď je aj $\Delta u = 0$, teda keď je **teplota rozložená rovnomerne, v zmysle že každý bod má teplotu ako priemer teplôt susedných bodov**. Pri našich okrajových podmienkach -oba konce tyče udržiavané na rovnakej teplote - to samozrejme môže vo finále znamenať len to, že každý bod tyče bude mať práve tú teplotu. Pre iné okrajové podmienky by sa mohla ustáliť teplota inak - ale tak, že priemer teplôt u susedov dáva teplotu v danom bode.

Vlnenie a Fourierova transformácia

Skúmame **model vln** na ohraničenej jednorozmernej oblasti, podľa našich okrajových podmienok by sa mohlo jednať o strunu ochytenú na oboch koncoch. Hľadané riešenie $u(x, t)$ predstavuje **výchylku z rovnovážnej polohy**. v je zatiaľ len parameter systému, ale sugestívne nazvaný tak, aby potom vystihoval interpretáciu. Počiatočné podmienky (dve, keďže rovnica je druhého rádu v čase) nám popisujú polohy a rýchlosti častí struny na začiatku. Táto rovnica tiež zaŕňa laplacián, teda bude súvisieť s mierou nerovnomernosti výchyliek v jednotlivých častiach struny. Na rozdiel od rovnice vedenia tepla však táto nerovnomernosť nie je úmerná prvej časovej derivácii, teda nie je mierou časovej zmeny ("rýchlosti"). V tomto prípade nerovnomernosť rozloženia výchyliek v priestore je úmerná druhej časovej derivácii, teda je mierou "zrýchlenia". Rozdiel v časovom vývoji je potom markantne iný než bol v prípade vedenia tepla. Tam sa priestorovo veľmi odlišne zohriate časti veľmi rýchlo vyrovnávali a s klesajúcou hodnotou Δu klesala aj miera zmeny v čase $\partial_t u$. **Pri vlnení však veľmi odlišne vychýlené (relatívne k priemeru susedov) časti budú akurát veľmi rýchlo meniť svoj pohyb**. Zrýchlenie je zmena pohybu-rýchlosti. **Nulový rozdiel od priemeru susedov tak neznamená zastavenie, len nulové zrýchlenie - a zotrvačnosť prenesie kmitajúci bod cez tento rovnovážny bod**, až do opačnej maximálnej výchylky, kde zas naberie dosť veľké zrýchlenie na opačnú cestu atď... Stručne sa to zapíše ako

$$v^2 u_{xx} = u_t \tag{34}$$

$$0 \leq x \leq L \quad \text{okrajové podmienky } u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$0 \leq t \quad \text{počiatočné podmienky } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = h(x)$$

Aj túto rovnicu použijeme na ilustráciu použitia Fourierovských rozkladov. Dá sa potom na výsledku pekne vidieť "miera oscilácií" daná laplaciánom.

Vlastné funkcie operátora druhej derivácie, spĺňajúce nulové okrajové podmienky, sme už našli v prípade rovnice vedenia tepla, kde sa z priestorovej časti jednalo o rovnaký problém. Teda

¹⁹vtedy sa redukuje na Laplaceovu rovnicu $\Delta u = 0$

máme bázu

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Našu hľadanú funkciu $u(x, t)$ a jej derivácie opäť vyjadríme ako kombináciu vlastných funkcií laplaciánu, s koeficientami závislými od času.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \\ u_x &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\pi k}{L} \cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \\ u_{xx} &= -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \\ u_t &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \\ u_{tt} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \end{aligned}$$

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice máme vednoduchú rovnicu pre koeficienty $c_k(t)$

$$-v^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$-v^2 \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 c_k(t) = \frac{d^2}{dt^2} c_k(t)$$

$$c_k(t) = A_k \cos\left(\frac{\pi k v}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k v}{L}t\right)$$

Teda naše riešenie má formu

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{\pi k v}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k v}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (35)$$

Koeficienty A_k , B_k sú zatiaľ neurčené konštanty, voči priestoru aj času, a zistíme ich z počia-

točných podmienok (ako vidno, boli nutné dve):

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$h(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi k v}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Teda koeficienty A_k sú práve koeficienty fourierovského rozkladu funkcie $f(x)$, zadanej ako popis priestorového rozloženia výchyliek z rovnováhy, a koeficienty B_k sú (modulo faktor $\pi k v/L$) koeficienty fourierovského rozkladu funkcie $h(x)$, zadanej ako popis priestorového počiatočných rýchlostí častí struny.:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} f(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (36)$$

$$B_k = \frac{L}{\pi k v} \frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} h(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Tieto veci sú už známe, keďže $f(x)$, $h(x)$ pokladáme za zadané. Napríklad v prípade, že v čase nula boli všetky body struny v rovnovážnej polohe (s nulovou výchylkou), sú nulové všetky A_k . Naproti tomu v prípade, že boli na počiatku všetky body v pokoji (s nulovou počiatočnou rýchlosťou), sú nulové všetky B_k . Samozrejme ak boli na počiatku všetky body struny aj v rovnovážnej polohe aj v pokoji, je trvalo nulové všetko, čo je tiež (hraničný) prípad kmitania, v klasickej mechanike prípustný (kvantová by nedovolila také počiatočné podmienky a teda ani také riešenie).

Pozrime sa teraz na **časový vývoj jednotlivých "priestorových harmoník"**. Každá je prenášaná kombináciou sínusov a kosínusov, ktoré **oscilujú s frekvenciou úmernou k** . Amplitúda týchto oscilácií pritom od času nezávisí. Teda priestorovo "divokejšie", **vyššie harmoniky kmitajú aj v čase s vyššou frekvenciou, ale neutlnujú sa z periódy na periódu** sa ako tomu bolo pri rovnici vedenia tepla. Tak to je, keď laplacián (ktorý je pre vyššie priestorové harmoniky veľký), udáva mieru zmeny pohybu, teda zrýchlenia, ako káže vlnová rovnica.

Upravme ešte naše riešenie pomocou súčtových vzorcov pre sínus a kosínus:

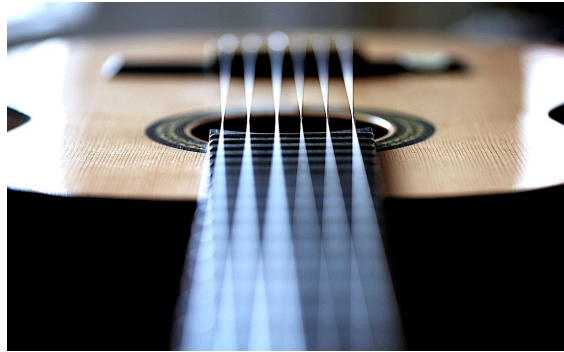
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi k}{L}(x + vt)\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{L}(x - vt)\right) \right] + \quad (37)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi k}{L}(x + vt)\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{L}(x - vt)\right) \right]$$

Tento tvar je omnoho **symetrickejší voči premenným x a t** , a lepšie tak ladí s vlnovou rovnicou, ktorej jedna z najnápadnejších črt je práve takáto symetria (druhá derivácia podľa času je úmerná druhej derivácii podľa polohy). Zároveň nám pomáha ineterpretovať riešenie vlnovej rovnice. Vezmime si trebárs funkciu $\sin(x - vt)$. Vidíme, že závisí od špecifickej kombinácie x a t , že s rozmerovej analýzy parameter v musí mať rozmer rýchlosti, a že ak $\sin(x - vt)$ predstavuje trebárs vlnu šíriacu sa nejakým médiom, je v práve rýchlosť, ktorou sa musíme pohybovať médiom v kladnom smere xy , ak chceme vidieť stále tú istú výchylku (lebo nám ostal tá istá hodnota argumentu - fázy $x - vt$). Inými slovami v je **rýchlosť šíriacej sa vlny**. Podobnou úvahou dospejeme k tomu, že $\sin(x + vt)$ popisuje vlnu šíriacu sa opačným smerom rýchlosťou rovnakej veľkosti. Veľmi podobne pre kosínus, ktorý je len posunutý sínus. V našom riešení (37) je ku každej doprava sa šíriacej vlny pripočítaná doľava sa šíriaca vlna s rovnakou amplitúdou. Takto vznikajú **stojaté vlny**, ktoré sa v bežnom zmysle slova "nešíria". Pri strune upevnenej na oboch koncoch to azda príliš neprekvapuje, aspoň hudobníkov s príslušnými nástrojmi nie. Spomeňme ešte krátko



Obr. 26: stojaté vlny

aj "naozaj cestujúce vlny" trebárs v nejakom médiu, a upozorníme, že v , rýchlosť ich postupu priestorom, nie je rýchlosťou kmitajúcich častíc média. Rýchlosť týchto je daná hodnotou u_t , a vo všeobecnosti sa pre daný bod mení s časom. (Pri stojatých vlnách, ktoré sa (ako súčet oproti sebe sa šíriacich vln) efektívne "nešíria", však máme aj uzly, ktoré majú trvalo nulovú výchylku aj rýchlosť). Nedorozumenie ohľadne rýchlostí azda nastáva aj pre bežnú asociáciu vlnenie - rieka. Tam sa však skladá aj posun média ako celku aj kmitavý pohyb jeho častíc, preto je pri znázorňovaní samotnej vlnovej rovnice vhodné predstaviť si ako príklad trebárs obilné pole vo vetre - obilím sa šíria vlny, ale ich pohyb nie je totožný s pohybom jednotlivých klasov. Tie napokon (pri bežnom vetre) neopúšťajú svoje miesto na poli, kým vlna sa šíri naprieč ním.



Obr. 27: Rýchlosť kmitania klasov nie je rýchlosťou vlny postupujúcej obilím.

4.5 Skratky medzi reálnymi faktami vedú cez komplexnú rovinu.

Ťažko prehliadnuť, že naše výpočty v tejto partii matematiky zahŕňajú integrovanie sínusov a kosínusov. Nie je to nič zložité, nakoniec tieto funkcie sa derivujú a integrujú ako jedny z najľahších. Ale existuje ich kombinácia, ktorá ich aj v tomto smere tromfne - exponenciálna funkcia. Stojí to vstup do komplexnej roviny, ale napodiv taký krok často skraca cestu aj pri reálnych problémoch. Pomôžeme si známou Eulerovou formulkou, podľa ktorej sínus a kosínus, a exponenciálna funkcia spolu súvisia ako

$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)$$

$$e^{-i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)$$

$$\sin(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$$

Teda vlastné funkcie druhej derivácie, alebo jednorozmerného laplaciánu, sa dajú zvoliť ako

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega_n t} = -\omega_n^2 e^{i\omega_n t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega_n t} = -\omega_n^2 e^{-i\omega_n t}$$

Komplexnosť nás nemá čo odrádzať, vhodne zvolenými tiež komplexnými koeficientami sa aj z komplexnej bázy dajú vyskladať reálne funkcie. Akurát treba vhodne zovšeobecniť skalárny súčin. Stále to bude integrál cez periódu, ale uvedomme si jednu vec - ak ho necháme ako je, mnohé komplexné funkcie budú mať podľa neho komplexnú veľkosť. To nie je niečo, čo by sme chceli interpretovať, preto skalárny súčin definujeme ako integrál cez jednu periódu zo súčinu funkcie a komplexne združenej funkcie

$$f \cdot g = \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) g^*(t) \quad (38)$$

a zovšeobecníme pravidlo o symetrii v skalárnom súčine nasledovne:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) g^*(t) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt g(t) f^*(t) \right)^* \quad (39)$$

Hviezdička značí komplexné združenie. Pre reálne funkcie sa zovšeobecnenie zredukuje na staré pravidlo, keďže vtedy $f^* = f$.

Skontrolujme teda s takto prispôbeným súčinom ortogonálnosť našej bázy.

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} = \delta_{mn} T \quad (40)$$

Rozvoj v takejto báze sa dá napísať veľmi kompaktno ako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad (41)$$

Sumácia je teraz aj cez záporné n , čiže pre také formálne pripúšťame "záporné frekvencie" $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. To je však len mýto, ktoré treba zaplatiť, keď si skracujeme cestu komplexnou rovinou. Jednoduchým rozpísaním sumy a použitím Eulerovej formuly dostávame vzťahy medzi sínus-kosínusovými a exponentovými koeficientami.

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad (42)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Pre reálne funkcie musia byť a_n, b_n reálne, čo je splnené ak $c_{-n} = c_n^*$. Koeficienty v (41) získame ako predtým - zo skalárnych súčinov našej funkcie a báзовých vektorov, a zväzšením vzťahov medzi báзовými vektormi:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_m t} f(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_m t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} = L c_n \delta_{mn}$$

Pre neskoršie účely si ešte uvedomme, že susedné frekvencie sa od seba líšia nasledovne:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T} \quad (43)$$

teda že môžeme písať

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Potom pre koeficienty platí jednoducho

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_m t} f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\omega_m t} f(t) \quad (44)$$

a pre rozklad funkcie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{-i\omega_m \tau} f(\tau) \right) e^{i\omega_n t} \quad (45)$$

Integračná premenná bola premenovaná tak, aby sa nepletla s voľnou premennou vo zvyšku sumy.

Ešte pár slov k interpretácii koeficientov. **Veľkosť koeficientu** $|c_n| = \sqrt{c_n^* c_n}$ **patriacemu k n -tej bábovej funkcii (harmonike) a frekvencii ω_n nám hovorí, ako veľmi je táto zastúpená** v "recepte" na výrobu $f(t)$. Ak je niektorý koeficient nulový, daná frekvencia tam vôbec nie je zastúpená. Zastúpenie jednotlivých frekvencií v signáloch, priebehoch napätí vo vodičoch, periodických otrasoch systémov a pod. má veľký význam, pretože súvisí s odpoveďou takých systémov na vonkajšie impulzy s danými frekvenciami. **Rezonančné javy sa vyskytujú naprieč fyzikou a technickými vedami a Fourierov rozklad nám pomáha odhadnúť kritické frekvencie, pri ktorých môžu nastať.**

4.6 Fourierova transformácia

Doteraz sme o perióde T predpokladali že je **konečná**, teda že spektrum frekvencií ω_n je **diskrétné**, pričom "susedné" frekvencie sa od seba líšia o konečný inetrval $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ak však uvažujeme **neperiodické funkcie, alebo funkcie s nekonečnou periódou** $T \rightarrow \infty$, potom sa **rozdiel medzi susednými frekvenciami $\Delta\omega$ stáva infinitezimálne malým** a z rozvoja (45) sa stáva integrál (čo je "suma cez nekonečne malé nekonečne blízke prírastky spojitaj premennej").

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{-i\omega_m\tau} f(\tau) \right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau e^{-i\omega_m\tau} f(\tau) \right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (46)$$

Objekt²⁰ \tilde{f} hrá rolu analogickú tej, ktorú malo c_n z rozvoja periodických funkcií, keď bolo spektrum diskrétné. Vtedy sme sčítavali cez n , alebo ekvivalentne ω_n , teraz integrujeme cez spojitý ω .

Všimnime si, čo sme dostali. Tak ako bol vektoru z lineárnej algebry jednoznačne priradený konečný súbor koeficientov v^i voči báze \bar{e}_i , tak ako bol periodickej funkcii jednoznačne priradený nekonečný, ale spočítateľný súbor koeficientov c_n voči báze $e^{i\omega_n t}$, tak je teraz **aj vo všeobecnosti neperiodickej funkcii jednoznačne priradený objekt \tilde{f} , ktorý ju reprezentuje v báze $e^{i\omega t}$** . Tento objekt - dá sa naň pozerať ako na (vo všeobecnosti) nespočítateľný súbor koeficientov - sa volá **Fourierov obraz** danej funkcie. Podobne ako sa zo zložiek dal vyskladať vektor a z vektora dali extrahovať zložky, aj Fourierova transformácia je v tomto zmysle vratná, existuje k nej **inverzná**:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \\ \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (47)$$

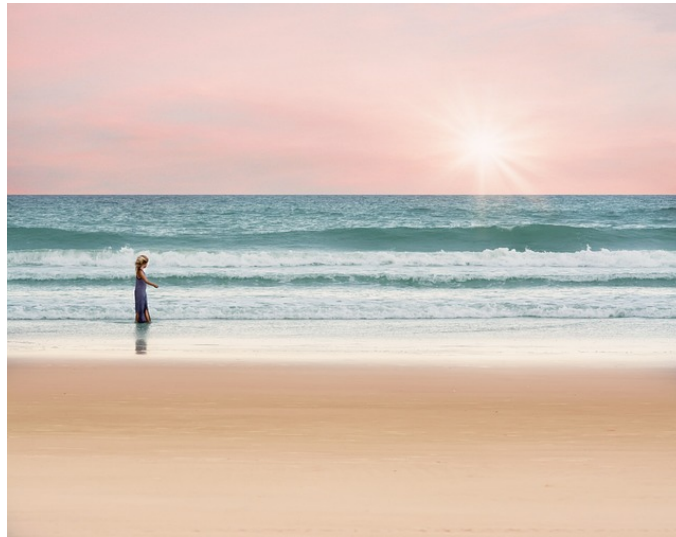
Dvojica $f(t), \tilde{f}(\omega)$ je "fourierovsky združená" a v literatúre možno nájsť tabuľky takýchto dvojíc. Doplnenie takých tabuliek o ďalšie riadky alebo overenie už existujúcich je vecou spočítavania integrálov typu (47) pre konkrétne funkcie.

4.7 Princíp neurčitosti

Všetky fourierovské dvojice sa vyznačujú "princípom neurčitosti": **čím je jedna z dvojice viac lokalizovaná vo svojej premennej, tým menej je vo svojej premennej lokalizovaná druhá z dvojice**. Pre intuitívne pochopenie princípov neurčitosti pre niektoré "komplementárne

²⁰Rozdelenie koeficientov $1/\sqrt{2\pi}$ je opäť vecou konvencie. Tu je volená tak, aby transformácia medzi funkciou a jej Fourierovským obrazom bola čo najsymetrickejšia. Iné konvencie majú tiež svoje dôvody (niekedy azda tradíciu a niekedy záhadnejšie príčiny). Aj samotné označenie fourierovského obrazu podlieha náladám, vkusu a životnej histórii autorov. Niekde sa používa pôvodný symbol funkcie s vlnovkou, niekde sa použije iný font, niekde sa pridá nejaká iná ozdoba... poznáme dril. Treba čítať kontext, nie písmená.

premenné” sú k dispozícii aj veľmi klasické ukážky. Predstavme si, že k nám prichádza nejaký signál s istou frekvenciou, napríklad vlny rozbíjajúce sa o pobrežie. Ak chceme veľmi presne poznať zastúpené frekvencie (môže sa ich skladať viacero), treba na brehu pobudnúť dostatočne dlho. Rozhodne dlhšie ako najdlhšia zastúpená perióda deja (a vopred nemusíme vedieť ako dlho to je!). Teda ak presnejšie ”lokalizujeme” zastúpené frekvencie, potom časová lokalizácia signálu je príslušne dlhšia. Ak na brehu postojíme len krátko, časová lokalizácia toho, čo sme pozorovali, je pomerne presná. Ale zas nemáme istotu o frekvenciách, ktoré sme nemohli zachytiť, keďže zodpovedali periódam dlhším než naše pozorovanie.



Obr. 28: Princíp neurčitosti na pláži

Fourierovské dvojice nemusia reprezentovať len čas a frekvenciu. Taká interpretácia je veľmi častá (mnohokrát sa naozaj jedná o modely procesov prebiehajúcich v čase), ale netreba sa na ňu nezdravo naviazať. Napríklad v **kvantovej mechanike** sú **podobným spôsobom združené poloha a hybnosť**.

Ukážeme si aspoň príklad prejavu známeho princípu neurčitosti viažuceho tieto dva pojmy. Z kvantovej mechaniky pritom nemusíme vedieť veľa, pre ilustráciu toho, čo chceme ukázať, stačí nasledujúci rýchlokurz. Treba vziať na vedomie, že **poloha a hybnosť súvisia v kvantovej mechanike s operátormi** pôsobiacimi na nejaké objekty. Týmto objektom sa hovorí **vlnové funkcie**, predstavujú v nejakom zmysle **stav skúmaného systému**. Môžu byť definované na **hybnostnom priestore** (”p-reprezentácia”) alebo **konfiguračnom priestore** (”x-reprezentácia”), pričom sú to rovnocenné možnosti.

Pri **x-reprezentácii** si azda možno o niečo ľahšie namýšľať názornosť, býva v prvých kontaktoch s kvantovou mechanikou spomínaná viac. V tejto variante predstavujú vlnové funkcie $\psi(x)$ **amplitúdu pravdepodobnosti**, že konfigurácia x je obsadená (trebárs časticou ktorá tvorí skúmaný systém). Amplitúdu pravdepodobnosti treba chápať ako ”komplexnú odmocninu z pravdepodobnosti”, v zmysle: $|\psi|^2$ predstavuje **hustotu pravdepodobnosti**, a táto hustota vynásobená objemovým elementom priestoru (na akom je funkcia definovaná) dáva pravdepodobnosť, že v tom elemente sa naša častica nájde. Kým hustota pravdepodobnosti je reálna, amplitúda môže byť komplexná. Spomíname tu len jeden priestorový a jeden hybnostný rozmer, situácia sa samozrejme dá zovšeobecniť.

Operátor polohy \hat{x} je v x-reprezentácii jednoducho násobenie x , a operátor hybnosti \hat{p} derivovanie podľa x , modulo slávne konštanty (Planckova redukovaná konštanta a imaginárna jednotka).

Z rozličných dôvodov (stručnosť na istých miestach je jedným z nich) sa často zavádza veličina $k = \frac{p}{\hbar}$. Teda p a k sa líšia len prenásobením Planckovou konštantou, ktorú možno vhodnou voľbou jednotiek položiť rovnú jednej.

$$\begin{aligned}\hat{x}\psi(x) &= x\psi(x) \\ \hat{p}\psi(x) &= -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\end{aligned}$$

Keďže sa jedná o operátory, má zmysel hovoriť o ich **vlastných hodnotách** (to je vlastne jedna z mála možností ako operátoru priradiť číslo, teda niečo porovnateľné s výsledkami meraní). Vlastné funkcie operátora zodpovedajú stavom systému s "presnou hodnotou" veličiny, ktorú operátor predstavuje. Teda v tomto prípade, **vlastné funkcie operátora hybnosti zodpovedajú stavom s presne určenou hybnosťou**. Nie je ťažké ich nájsť, sú to komplexné "rovinné vlny". Majú ostrú hodnotu hybnosti, ale ako sa na sínus a kosínus patrí, nemajú žiadnu preferovanú časť osi x . Častica popísaná takým stavom môže byť **kdekoľvek**.

$$e^{ipx/\hbar} = e^{ikx}$$

Tu x je premenná a k fixný parameter pre daný stav. **Vlastné funkcie hybnosti tvoria v x-reprezentácii úplný systém** a možno ich teda použiť ako bázu. Teda všetky ostatné stavy v x -reprezentácii možno písať ako

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\psi}(k) \quad (48)$$

$\tilde{\psi}(k)$ je fourierovský obraz $\psi(x)$, teda spojitý analóg komponent $\psi(x)$ voči báze e^{ikx} . Inverzná transformácia je

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \quad (49)$$

Veľmi podobný proces možno urobiť pre **p-reprezentáciu** (resp k -reprezentáciu). Vlnová funkcia $\phi(p)$ v p -reprezentácii predstavuje **amplitúdu pravdepodobnosti** v hybnostnom priestore. Operátor hybnosti \hat{p} v p -reprezentácii má podobu obyčajného násobenia p a operátor polohy \hat{x} podobu derivácie podľa p , modulo slávne konštanty (Planckova redukovaná konštantka a imaginárna jednotka a jedno mínus oproti analogickej situácii v x -reprezentácii):

$$\begin{aligned}\hat{p}\phi(p) &= p\phi(p) \\ \hat{x}\phi(p) &= i\hbar\frac{d}{dp}\phi(p)\end{aligned}$$

V tomto prípade, **vlastné funkcie operátora polohy zodpovedajú stavom s presne určenou polohou**. Také stavy však nemajú však žiaden preferovaný úsek na p -osi, teda **ich hybnosť môže byť akákoľvek**.

$$e^{-ipx/\hbar} = e^{-ikx}$$

Tu k je premenná a x fixný parameter pre daný stav. **Vlastné funkcie polohy tvoria v p-reprezentácii úplný systém** a možno ich teda použiť ako bázu pre všetky ostatné stavy v p -reprezentácii. Ale veď práve taký rozvoj predstavuje (49)! $\psi(x)$ je je fourierovský obraz funkcie $\tilde{\psi}(k)$, teda spojitý analóg komponent $\tilde{\psi}(k)$ voči báze e^{-ikx} .

Teda k a x tvoria fourierovky komplementárne premenné.

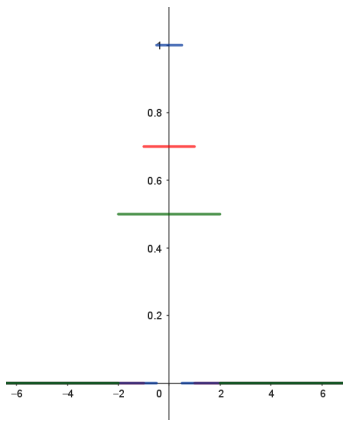
Už bolo spomenuté, že bázové stavy x - reprezentácie (e^{ikx} , kde x je premenná a k fixný parameter pre daný stav) majú určitú hybnosť celkom neurčitú polohu, a bázové stavy p -reprezentácie (e^{-ikx} , kde k je premenná a x fixný parameter pre daný stav) určitú polohu a celkom neistú hybnosť. Takéto stavy samy osebe však nepredsaturujú reálne častice. Čo by sme tým vôbec mysleli. Reálne objekty zrejme budú môcť byť popisované nejakými kombináciami - polohu nepoznáme celkom presne, ale dosť na to, aby sa v nejakom zmysle dala spomínať, podobne s hybnosťou.

Vyskúšajme, ako spolu hrajú naše komplementárne prmenne pre nejaký takýto konkrétny stav. Nech $\psi(x)$ popisuje stav častice v konfiguračnom priestore, a nech je to častica viazaná na úsečku dĺžky $2a$. Povedzme že tam je celkom voľná (teda máme rovnaký potenciál na celej úsečke, a rovnakú pravdepodobnostnú amplitúdu pre všetky body úsečky) - ale mimo nej nemôže ísť (nekonечný potenciál mimo úsečky, amplitúda nulová). Z normovacích príčin (pravdepodobnosť nájsť časticu niekde na úsečke má byť rovná 1) bude amplitúda na úsečke mať veľkosť $\sqrt{1/2a}$.

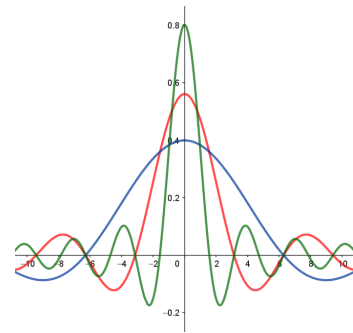
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{1/2a} & -a \leq x \leq a \\ &= 0 & (x < -a) \cup (x > a) \end{aligned}$$

Pozrime sa na jej fourierovský obraz - teda na mieru zastúpenia hybností:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{2\pi} \int_{-a}^a dx e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dx [\cos(kx) - i \sin(kx)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

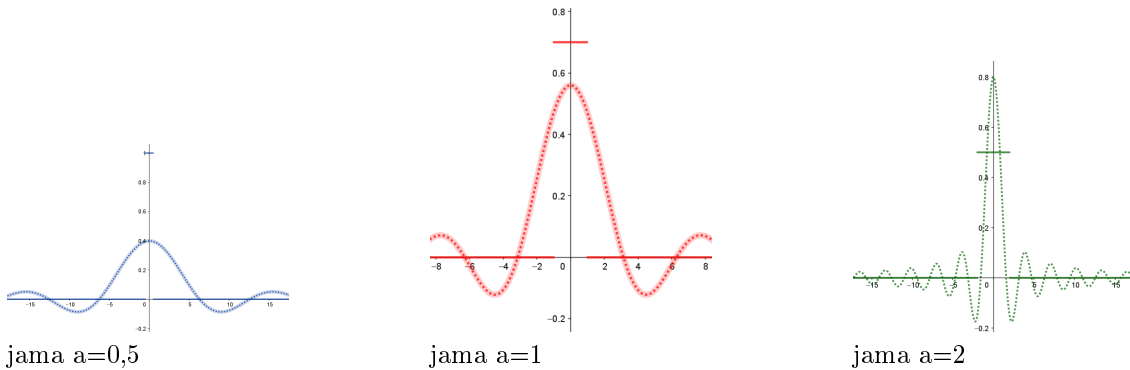


lokalizácia v x -priestore



lokalizácia v k -priestore

Obr. 29: x - reprezentácie ukazujú lokalizáciu v konfiguračnom priestore na úsečkách rôznych dĺžok ($a=1, 1/2, 2$), k -reprezentácie ukazujú lokalizáciu v hybnostnom priestore.



Obr. 30: Konfiguračný a hybnostný priestor superimponované na seba: pre plné čiary treba chápať vodorovnú os ako konfiguračný priestor, pre bodkované línie ako hybnostný.

Z matematického hľadiska je princíp neurčitosti z kvantovej mechaniky dôsledkom toho, že poloha a hybnosť tu tvoria vzájomne svoje fourierovské obrazy. Pripomeňme, že tieto veličiny tvorili súradnice vo fázovom priestore, priestore stavov v klasickej mechanike. Tá bola z veľkej časti budovaná úvahami o pohybe hmotných klasických častíc. Kvantová fyzika priestor polôh a bybností nezmenila jeho rozbitím, ale pretkaním jeho častí ešte viac. Poukázala na potrebu, aby viac držal pokope, aby údaje o stave hmotnej častice boli previazané cez rozklady do vln.

5 Symetrie - stopy krásy v matematike

Transformácie sú dôležité, a niektoré ich triedy majú osobitne význačné vlastnosti. Napríklad tým, že napriek tomu, že "niečo sa deje", niečo sa nemení, zachováva²¹. Pojem **symetrie** ide ruka v ruku so zdanlivo opozičnými pojmami **transformácie** a **invariantu**, zmeny a stálosti. Transformácia, prechod od jedného stavu systému k inému stavu, je pre daný systém symetriou, ak sa počas nej nestráca niečo charakteristické, čo tvorí identitu systému. Táto zachováajúca sa charakteristika je potom vzhľadom na danú transformáciu invariantom. Symetrie sa oddávna spájajú s krásou. Tu sa budeme venovať jej prejavom v matematike, hľadajúc dôkazy že krásu nie je "len" na ozdobu.

5.1 Transformácie a toky, analógia s tečením

Transformácie možno deliť podľa rôznych kritérií. Ako veľmi dôležité kritérium sa ukazuje spojitosť či diskretnosť. V oboch prípadoch existuje pojem identickej ("nulovej") transformácie, ktorá "nerobí nič". V diskretnom prípade však existuje nejaká najmenšia nenulová transformácia, akýsi minimálny krok. V spojitom prípade je možné si ľubovoľnú nenulovú transformáciu predstaviť ako poskladanú z ešte menších - môžeme postupovať po infinitezimálne malých kúskoch. Spojitosť transformácie súvisí so spojitosťou parametra, ktorý ju kvantifikuje. Napríklad pri posunutí predstavuje tento parameter vzdialenosť, pri otočení uhol...

Zdanlivo triviálne pozorovanie, že veľká transformácia sa dá urobiť ako suma mnohých malých, má nečakane veľký dopad na schodnosť a užitočnosť výpočtov. Ďalšia ukážka pravidla, že hlboké



Obr. 31: Aj cesta dlhá tisíc míľ sa začína prvým krokom. Začiatky spojených transformácií a nemennosť je ťažšie rozpoznať. Čas ukáže rozdiel.

uvažovanie nad jednoduchými vecami prináša viac ovocia ako povrchné hĺbanie nad komplexnými problémami.

Začnime veľmi jednoducho. Budeme najprv uvažovať o **transformáciách v euklidovskej rovine**. Použijeme jednoduchú analógiu - predstavme si rovinu ako povrch rieky, a pohyb (tečenie) jednotlivých molekúl bude reprezentovať transformácie bodov v rovine. Samozrejme, takéto podobienstvo má svoje limity - jednak body v euklidovskej rovine sú nekonečne malé a nekonečne nahusto, takže si musíme predstaviť "spojitú vodu" s nekonečne malými čiastočkami (čo by malo byť porovnateľne ľahké alebo ťažké ako pri tej vode). Ďalej voda je do značnej miery nestlačiteľná, ale model nestlačiteľnej vody je použiteľný na intuitívne uchopenie len tých transformácií, ktoré žiadne dva body nemapujú do toho istého obrazu. Postupne si však môžeme rozširovať podobienstvo aj na také prípady, môžeme si predstavovať stlačiteľnú kvapalinu, dokonca kvapalinu, ktorá

²¹Bez tohto nakoniec ťažko vôbec uvažovať o svete. Je človek, ktorého vidíme dnes ráno ten istý, ktorého sme videli včera večer? Čas sa zmenil, možno aj ten človek sa zmenil. Ale je niečo, čo ostalo, čo nám umožňuje hovoriť o jeho identite. Rozpoznať, čo sa mení a čo zachováva chce dávku rozumnosti až múdrosti. Tu sa budeme pohybovať na bezpečnej pôde matematických a geometrických transformácií.

čarovne vzniká a zaniká.



Obr. 32: Vodný tok transformuje konštelácie lístia na hladine.

Uvedme si niekoľko prípadov takéhoto tečenia bodov v rovine (zovšeobecnenie do viac rozmerov nie je v princípe problematické, iba náročnejšie na grafické zobrazenie). Nech body (x, y) odtečú do nových bodov $(x(\epsilon), y(\epsilon))$. Máme vlastne **parametrické vyjadrenie krivky - prúdnic** v rovine.

$$(x, y) \longrightarrow (x(\epsilon), y(\epsilon)) \quad (50)$$

$$(x, y) = (x(0), y(0))$$

Parameter transformácie ϵ je analogický času pri naozajstnom tečení. V čase $\epsilon = 0$ sme na štartovacom bode. Dlhší čas zodpovedá väčšiemu ϵ . Hodnota kóduje polohu pozdĺž prúdnic. Súbor všetkých prúdnic tvorí **tok** (a tento tu tvorí transformáciu roviny). Keď hovoríme o toku a prúdnicach (plavebných čiarach), je namieste aj úvaha o **rýchlosti** plavby. Rýchlosť je vektor v smere pohybu, ktorého veľkosť súvisí s mierou zmeny polohy voči zmene parametra. Toto všetko vedie k definícii komponent rýchlosti v nejakom bode (zvoľme tento bod ako štartovací)

$$(V^x, V^y) = \left(\frac{dx}{d\epsilon}, \frac{dy}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \quad (51)$$

Vektor s takýmito komponentami budeme ho volať **generátor toku či transformácie**. Komponenty prúdnic (50) sa dajú získať spätne integrálmi komponent vektora (51), hovoríme im teda **integrálne krivky**.

Označenie "generátor" dáva dobrý zmysel, keď si všimneme **súvis medzi generátorom a infinitezimálnou plavbou** - o maličké ϵ pozdĺž integrálnej krivky. Totiž $x(\epsilon), y(\epsilon)$ možno ako slušné analytické funkcie rozvíjať do Taylorovho radu, a pre malé ϵ je možné zanedbať všetky členy vyššie od lineárnych :

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) \approx \left(x(0) + \frac{dx}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon, y(0) + \frac{dy}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon \right) = (x + \epsilon V_x, y + \epsilon V_y) \Big|_{\epsilon=0} \quad (52)$$

Pole "rýchlosti" (ak ϵ je interpretované ako čas), dané v každom bode dotyčnicovým vektorom k integrálnej krivke prechádzajúcej daným bodom, naozaj "generuje" vývoj pozdĺž nej: Keď je hodnota parametra/času nulová, sme v pôvodnom bode, a ako máličko (ϵ) neskôr sú súradnice dané ako počiatočné plus lineárny (v parametri ϵ) príspevok súvisiaci s našim vektorom.

Aby sme pole s komponentami (51) uchopti ako matematický objekt, ujasníme si, že identifikácia (51) dáva **súradnice vektorového poľa rýchlosti**, vyčíslené v štartovacom bode. Vzhľadom na akú "bázu" sú dané súradnice? **Čo sú vhodné "bázové vektorové polia"**? Súradnice vektora sú ovplyvnené voľbou súradníc (x, y) v rovine. Skúsme nejaké špeciálne prípady, zodpovedajúce "bázovým tokom":

Tok tečúci pozdĺž x-ovej osi jednotkovou rýchlosťou (efektívne ako parameter môžeme vziať $\epsilon = x$) by mal ako "prúdnicu" priamky rovnobežné s x-ovou osou, s parametrickým vyjadrením $(x(x), y(x)) = (x, 0)$. Zároveň všade ako súradnice očakávame $(1, 0)$, čo sedí s $\left(\frac{dx}{d\epsilon}, \frac{dy}{d\epsilon}\right)$.

Tok tečúci pozdĺž y-ovej osi jednotkovou rýchlosťou (efektívne ako parameter môžeme vziať $\epsilon = y$) by mal ako "prúdnicu" priamky rovnobežné s y-ovou osou, s parametrickým vyjadrením $(x(y), y(y)) = (0, y)$. Zároveň všade ako súradnice očakávame $(0, 1)$, čo sedí s $\left(\frac{dx}{d\epsilon}, \frac{dy}{d\epsilon}\right)$.

Teraz si to dajme dokopy s faktom, že všeobecnejšie toky sú charakterizované krivkami, ktoré majú nenulové priemety na os x aj na os y, a môžu predstavovať tečenie nielen jednotkovou rýchlosťou. S týmto na mysli prepíšme (52) sugestívnejšie:

$$\begin{aligned} x(\epsilon) &= \left(1 + \epsilon \frac{dx}{d\epsilon} \frac{\partial}{\partial x}\right) x(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} \\ y(\epsilon) &= \left(1 + \epsilon \frac{dy}{d\epsilon} \frac{\partial}{\partial y}\right) y(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned}$$

Na mieste bázových vektorov \vec{e}_x, \vec{e}_y z lineárnej algebry tu stoja operátory parciálnych derivácií podľa daných premenných. Naše vektorové pole teda bude mať vyjadrenie

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y} & (53) \\ &= \frac{dx}{d\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{d\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \dot{x} \partial_x + \dot{y} \partial_y \end{aligned}$$

Totálnu deriváciu podľa parametra analogického času budeme často označovať bodkou (tradícia už od Isaaca Newtona). Parciálne derivácie sa často skrátene označujú ∂_x, ∂_y .

5.1.1 Zhrnutie: Súvis toku a generujúceho poľa

Tok generujúceho poľa je súbor "prúdnic", parametrizovaných kriviek $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ ktorým hovoríme integrálne krivky. Generujúce pole je v každom mieste dotyčnicové k prúdniciam, jeho komponenty sú (\dot{x}, \dot{y}) , kde bodka značí deriváciu podľa parametra ϵ .

Nájsť k danému toku (transformácii zadanej ako rodina parametrizovaných kriviek) príslušný generátor vyžaduje len deriváciu zložiek krivky a vyčíslenie v nule.

(Poznáme $x(\epsilon), y(\epsilon)$, hľadáme V^x, V^y)

$$V^x(x, y) = \left. \frac{dx}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \qquad V^y(x, y) = \left. \frac{dy}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

Opačná úloha, teda nájsť tok generovaný zadaným poľom (známe $V^x(x, y), V^y(x, y)$, hľadáme $x(\epsilon), y(\epsilon)$) vyžaduje integráciu zložiek vektorového poľa. Treba riešiť sústavu diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $x(\epsilon), y(\epsilon)$ (s danými počiatočnými podmienkami)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= V^x(x, y) & \frac{dy}{d\epsilon} &= V^y(x, y) \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Ilustrujme si súvis medzi transformáciou, jej infinitezimálnou verziou a generujúcim tokom na príkladoch niekoľkých transformácií v rovine.

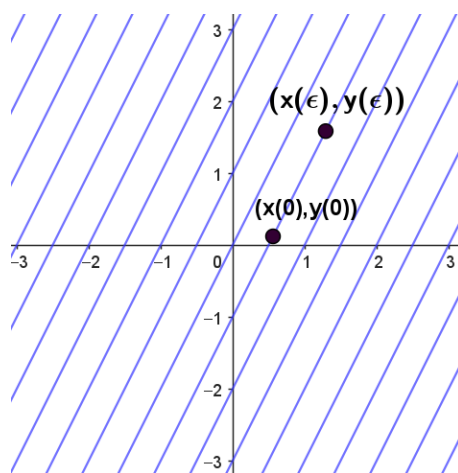
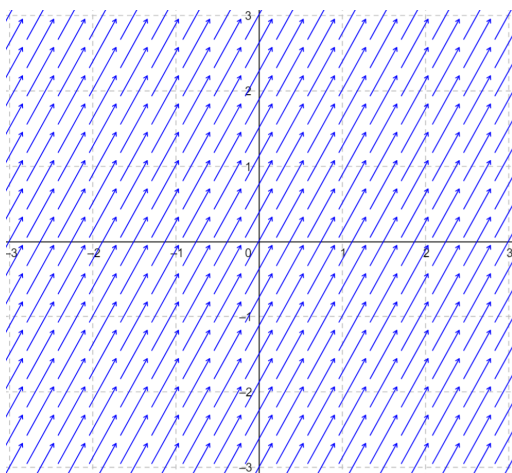
5.1.2 Posunutie v rovine

Ukážme pojmy transformácie, jej infinitezimálnej verzie a generujúceho toku na posunutíach v smere (a, b) , kde a, b sú konštanty. Transformácia bodov roviny bude

$$(x, y) \longrightarrow (x + \epsilon a, y + \epsilon b)$$

Jej infinitezimálna verzia (rozvoj pre malé ϵ) vyzerá rovnako, takže koeficienty generujúceho poľa sú (a, b) , to isté, čo dostaneme deriváciou $x(\epsilon), y(\epsilon)$ podľa ϵ (v tomto prípade vyčíslenie v $\epsilon = 0$ je rovnaké ako všade inde.) Teda generátor posunutí v smere (a, b) je

$$\vec{V} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$



Obr. 33: Pole $a\partial_x + b\partial_y$ (pre $a = 1, b = 2$), jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich.

5.1.3 Rotácia v rovine

V tomto prípade tokom je otáčanie a úlohu parametra hrá uhol pootočenia ϵ . Z lineárnej algebry vieme, že pootočenie o uhol ϵ nám transformuje body nasledovne²²:

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, y \cos \epsilon - x \sin \epsilon)$$

Jedná sa o koncentrické kružnice vyplňajúce rovinu (pre počiatočné (x, y) v rôznych vzdialenostiach od stredu máme rôzne kružnice).

Ako vyzerá infinitezimálna transformácia (prípád malého ϵ)? Vtedy máme

$$\cos \epsilon \approx 1, \quad \sin \epsilon \approx \epsilon,$$

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x + \epsilon y, y - \epsilon x)$$

Zložky generátora infinitezimálnej transformácie sú koeficienty pri parametri ϵ , teda $(y, -x)$. Môžeme k nim prísť aj (hoci sa jedná prakticky o tú istú vec) tak, že vezmeme našu integrálnu krivku/prúdnicu a nájdeme jej dotyčnicový vektor v počiatočnom bode, teda poderivujeme ju a potom vyčíslime v $\epsilon = 0$:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon}(x \cos \epsilon + y \sin \epsilon), \frac{d}{d\epsilon}(y \cos \epsilon - x \sin \epsilon) \right) \Big|_{\epsilon=0} = (y, -x)$$

Teda ak našou transformáciou je rotácia, prúdnicami sú koncentrické kružnice, a dotyčnicovým polom (generátorom infinitezimálnych rotácií) je pole

$$\vec{V} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

Pre účely precvičenia pojmov a kontroly, vyriešme opačnú úlohu, teda predpokladajme, že poznáme pole a chceme mu nájsť integrálne krivky: Potrebujeme vyriešiť sústavu rovníc s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= y & \frac{dy}{d\epsilon} &= -x \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Táto nie je veľmi zložitá, je jasné že pôjde o kombináciu $\cos \epsilon$ a $\sin \epsilon$, s koeficientami danými počiatočnými podmienkami. Vidno však, ktoým smerom je výpočet zložitejší.

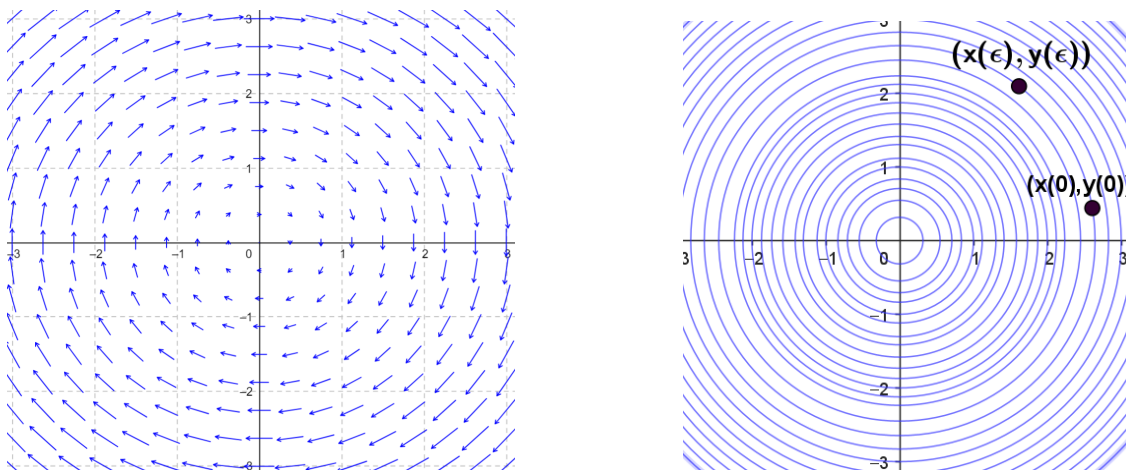
$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, y \cos \epsilon - x \sin \epsilon)$$

Ide o koncentrické kružnice

$$x^2(\epsilon) + y^2(\epsilon) = x^2(0) + y^2(0)$$

Tu $x^2(0) + y^2(0)$ je kvadrát polomeru danej kružnice; $(x(0), y(0))$ predstavuje "štartovací bod" pre danú prúdnicu

²²Poznámka k značeniu: Zavádzanie vlnovky sa tu môže zdať zbytočné, keďže "posunuté" body rozpoznávame podľa nenulového parametra uvedeného ako ich argument (napr. pôvodný, netransformovaný bod má x-ovú súradnicu $x(0) = x$, transformovaný $x(\epsilon) = \tilde{x}$). Neskôr sa však takáto indikácia transformácie môže zísť, osobitne keď zátvorka s argumentom bude veľmi zavádzať, takže zvykneme si na viacero značení už vopred.



Obr. 34: Pole $y\partial_x - x\partial_y$, jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich

5.1.4 Hyperbolická rotácia v rovine

Nájďme integrálne krivky pre vektorové pole

$$\vec{V} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

Toto sa od predchádzajúceho líši len znamienkom pri y-ovej zložke, ale ako uvidíme, integrálne krivky vyzerajú výrazne inak. Hľadáme funkcie $(x(\epsilon), y(\epsilon))$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= y & \frac{dy}{d\epsilon} &= x \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Vidno, že sa jedná o kombinácie hyperbolických funkcií $\cosh \epsilon$ a $\sinh \epsilon$, s koeficientami danými počiatočnými podmienkami, teda

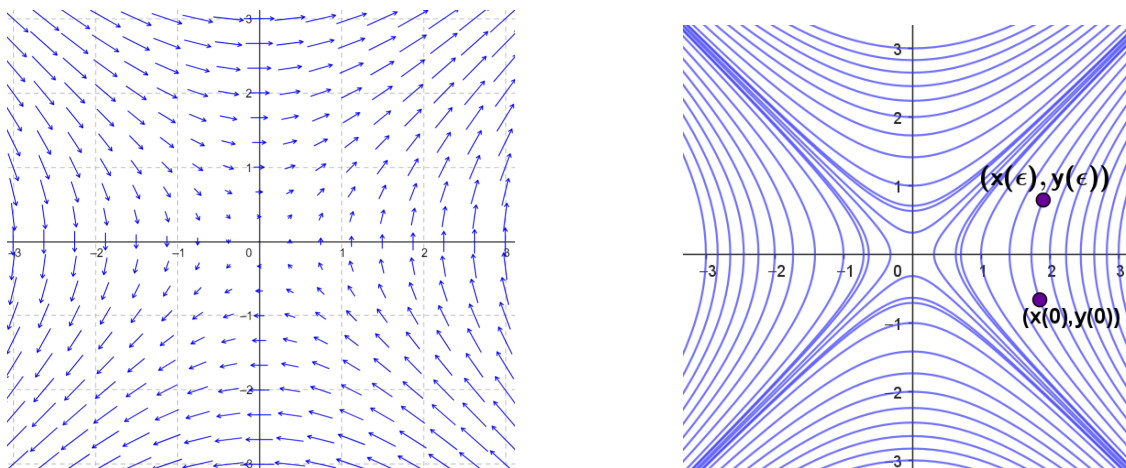
$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cosh \epsilon + y \sinh \epsilon, y \cosh \epsilon + x \sinh \epsilon)$$

Jedná sa o hyperboly

$$x^2(\epsilon) - y^2(\epsilon) = x^2(0) - y^2(0)$$

Tu $(x(0), y(0))$ predstavuje štartovací bod danej prúdnice.

Teraz je možné urobiť skúšku správnosti, teda derivovať naše nájdené integrálne krivky (prípadne rozvinúť $x(\epsilon), y(\epsilon)$ okolo hodnoty $\epsilon = 0$ po lineárny člen v $\epsilon = 0$) a prísť späť ku generátoru (vektorovému poľu zo zadania). Takéto riešenie úloh z viacerých strán sa implicitne doporučuje, až pokiaľ sa súvis medzi integrálnou krivkou, transformáciou, jej infinitezimálnou verziou a generátorom nestane vecou rutiny.



Obr. 35: Pole $y\partial_x + x\partial_y$, jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich

5.2 Transformácia obrazcov

Uviedli sme si niekoľko príkladov na transformácie bodov v rovine. Ponúka sa otázka, **ako sa transformujú množiny bodov, teda nejaké geometrické obrazce** v rovine. Pri našich doterajších úvahách nemalo veľa zmyslu hovoriť o deformácii či nedeformácii obrazcov, veď bod ostal bodom, len posunutým pozdĺž prúdnic. Je to analogická situácia, keď do rieky hodíme list. Posunie sa, nezdeformuje. Čo ak by sme však do rieky hodili niekoľko listov - ako by sa menila ich konštelácia? Alebo vezmime ešte spojitější obrazec, trebárs stužku či povrázok, ktorý by mal pri prvom kontakte s hladinou nejaký zadaný tvar. Vo všeobecnosti sa povrázok pri plavbe nielen posunie, ale vplyvom rôzneho toku na rôznych častiach povrázka sa tento aj všelijako poskrúca.



Obr. 36: Transformácia spojitého útvaru pri plavbe

Čo sa stane so spojitou krivkou pri transformácii tokom nejakého vektorového poľa? Ostane v jednom kuse ako stužka, len zmenená tvarom? Ak uvažujeme hladké vektorové pole (jeho integrálne krivky sú hladké), potom vplyvom jeho toku sa pôvodne susedné body zobrazia do znova susedných, aj keď globálna konštelácia ("tvar") bude vo všeobecnosti iná. Veľkou výnimkou sú tu krivky dané prúdnicami samotného poľa, teda jeho integrálne krivky. Keďže pole tečie z definície pozdĺž nich, nijako nemení ich tvar.

Vo viacerých rozmeroch si môžeme predstaviť nielen transformácie na povrchu rieky, ale aj pod hladinou, teda efektívne trojrozmerný tok. Môžeme uvažovať o deformácii bodov, kriviek, plôch ponorených do toku. A tak ďalej - matematický formalizmus nám umožňuje ísť smelo aj tam,

kde vizualizácie nemáme. Keďže však vizualizácia pomáha nábrať intuíciu, začnime najprv opäť s tokmi - transformáciami v rovine a uvažujme, ako sa deformujú krivky, keď ich necháme odplávať pozdĺž inegrálnych kriviek nejakého poľa.

Tok, jeho prúdnice a ich generátor sme už matematicky namodelovali v predchádzajúcich odsekoch; teraz si ešte uvedomme, ako budeme modelovať množiny bodov, ktorých deformácie vplyvom toku budeme skúmať. Vezmime ako taký geometrický objekt nejakú krivku. Krivka v rovine sa dá implicitne zadať ako

$$F(x, y) = 0$$

Napríklad: rovné čiary, kružnice a krivky zodpovedajúce grafom explicitných funkcií $y = f(x)$ majú implicitné vyjadrenia:

$$\begin{array}{ll} F(x, y) = ax + by + c = 0 & \text{priamka} \\ F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0 & \text{kružnica} \\ F(x, y) = y - f(x) = 0 & \text{graf funkcie } y = f(x) \end{array}$$

Podme sa pozrieť čo sa stane "s povrázkom hodeným do rieky", resp. s krivkou danou grafom funkcie. Najprv pripomeňme, čo sa stane s bodmi, a potom vyjadríme zmenu funkčného predpisu tak, aby zodpovedal novému tvaru krivky.

$$(x, y) \longrightarrow (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$F(x, y) = 0 \longrightarrow \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0$$

Pod hrozivo dlhým výrazom sa skrýva jednoduchá myšlienka: aby sme našli novú krivku, vezmeme predpis starej, staré premenné (x, y) zodpovedajúce $\epsilon = 0$ v nej však vyjadríme pomocou nových (\tilde{x}, \tilde{y}) zodpovedajúce $\epsilon \neq 0$. Potrebujeme teda inverznú transformáciu

$$\tilde{x}, \tilde{y} \longrightarrow x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})$$

V prípade, že namiesto implicitne zadaných kriviek potrebujeme transformovať grafy explicitne zadaných funkcií, je potrebné²³ ešte vyjadriť $\tilde{y}(\tilde{x})$.

Ujasnime si teraz veci na príkladoch.

5.2.1 Rotácia priamky

Vezmime na začiatok veľmi jednoduchú krivku - priamku.

Je daná implicitne ako $F(x, y) = y - ax - b = 0$ alebo explicitne ako graf funkcie $y = f(x) = ax + b$. Ako pole vezmeme rotácie, teda pole $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$, ktorého tok zodpovedá nám už známej transformácii

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, y \cos \epsilon - x \sin \epsilon)$$

Teraz budeme potrebovať inverznú transformáciu, ktorá sa nájde veľmi jednoduchou úvahou (otočením rotačnej matice): Ak \tilde{x}, \tilde{y} sme dostali z x, y otočením o uhol ϵ , potom x, y dostaneme späť otočením \tilde{x}, \tilde{y} o uhol $-\epsilon$:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \longrightarrow (x, y) = (\tilde{x} \cos \epsilon - \tilde{y} \sin \epsilon, \tilde{y} \cos \epsilon + \tilde{x} \sin \epsilon)$$

²³Teraz je azda čas oceniť vlnovku namiesto zátvorky s argumentom ϵ . Stačí pokus prepísať výraz vyššie pomocou $x(\epsilon), y(\epsilon), x(0), y(0)$ a naznačiť v ňom korektné čo sa vyjadruje pomocou čoho - a je jasnejšie, načo sú dobré viaceré typy značenia.

Nájdime transformáciu implicitne zadanej krivky $F(x, y) = y - ax - b = 0$, resp. transformáciu grafu funkcie $y = f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= y(\tilde{x}, \tilde{y}) - a x(\tilde{x}, \tilde{y}) - b \\ &= \tilde{y} \cos \epsilon + \tilde{x} \sin \epsilon - a(\tilde{x} \cos \epsilon - \tilde{y} \sin \epsilon) - b \\ &= \tilde{y}(\cos \epsilon + a \sin \epsilon) - \tilde{x}(a \cos \epsilon - \sin \epsilon) - b \end{aligned}$$

Explicitný tvar získame jednoduchým vyjadrením \tilde{y} z implicitnej rovnice, čo v tomto prípade ide jednoznačne pre uhly ktoré spĺňajú $(\cos \epsilon + a \sin \epsilon) \neq 0$. (To by zodpovedalo zvislým krivkám ktoré nepredstavujú graf funkcie $y(x)$.)

$$\begin{aligned} \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) &= \frac{a \cos \epsilon - \sin \epsilon}{\cos \epsilon + a \sin \epsilon} \tilde{x} + \frac{b}{\cos \epsilon + a \sin \epsilon} \\ &= \tilde{a} \tilde{x} + \tilde{b} \end{aligned}$$

Ako sa dalo čakať, zrotovaná priamka je znova priamka. Ale pozor, "priamosť" síce ostala invariantom (nezmenenou vecou), ale dostali sme inú funkciu (a ako jej graf inú priamku) ako predtým -parametre sú príslušne pozmenené

5.2.2 Rotácia kružnice

Skúsme ešte pretransformovať rotáciu, konkrétne takou ktorá zodpovedá toku poľa $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$ (teda tok z predošlého príkladu), krivku danú kružnicou s polomerom 1 centrovanou v strede $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= x^2(\tilde{x}, \tilde{y}) + y^2(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1 \\ &= (\tilde{x} \cos \epsilon - \tilde{y} \sin \epsilon)^2 + (\tilde{y} \cos \epsilon + \tilde{x} \sin \epsilon)^2 - 1 \\ &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1 \end{aligned}$$

Tu na rozdiel od rotovania priamok vidíme, že nielenže tok nášho poľa prevedie kružnicu na kružnicu (teda že "kruhovosť" je invariantom tejto transformácie), ale že sa nezmenili ani len parametre kružnice - samotná implicitná funkcia a jej graf sú invariantmi! Dôvodom je, že koncentrické kružnice centrované v strede súradnej sústavy sú práve integrálnymi krivkami nášho poľa, ktoré generuje rotácie okolo počiatku. **Pole z definície zachováva svoje integrálne krivky, svoj vlastný tok.**

Rotácie a translácie v euklidovskej rovine majú svoju význačnú črtu - zachovanie tvaru objektov ako ho chápeme v euklidovskom zmysle - pretože zachovávajú vzájomné vzdialenosti bodov v rovine. Čitateľ si môže explicitne vyskúšať, že vzdialenosť dvoch bodov sa nezmení, keď ju vyčíslime pred transformáciou ($\epsilon = 0$) a po ich odplavení o ten istý nenulový ϵ .

5.2.3 Neizotropné škálovanie a jeho vplyv na kružnicu

Pozrime sa, čo robí škálovacia transformácia s kružnicou centrovanou v strede s polomerom 1. (Pre všeobecnejšie kružnice je akurát trochu dlhší výpočet, ale pre čitateľa by nemal byť principiálny

problém spočítať transformáciu aj pre také prípady v rámci cvičenia.) Neizotropné škálovanie je generované poľom $\vec{V} = \alpha x \partial_x + \beta y \partial_y$, pričom α, β sú konštanty. Zodpovedajúcu transformáciu (parametrické vyjadrenie integrálnych kriviek, po ktorých nám odtekajú body) získame integrovaním komponent ako obvykle:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= \alpha x & \frac{dy}{d\epsilon} &= \beta y \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Máme teda

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (e^{\alpha\epsilon} x, e^{\beta\epsilon} y)$$

Pozrime čo takýto tok urobí s krivkou $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Potrebná inverzná transformácia je tu veľmi jednoduchá

$$(x, y) = (e^{-\alpha\epsilon} \tilde{x}, e^{-\beta\epsilon} \tilde{y})$$

a môžeme dosádzať do rovnice pre kružnicu:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) \\ &= x^2(\tilde{x}, \tilde{y}) + y^2(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1 \\ &= \frac{\tilde{x}^2}{e^{2\alpha\epsilon}} + \frac{\tilde{y}^2}{e^{2\beta\epsilon}} - 1 \end{aligned}$$

Kružnica sa tokom neizotropne škálovacieho poľa deformovala na elipsu.

5.3 Invarianty transformácie

Spomeňme si na krivky, ktoré sú poľom zachovávané priam z definície - integrálne krivky tohto poľa. Príkladom boli kružnice so stredom v počiatku $F(x, y) = x^2 + y^2 - c = 0$ a dotyčnicové pole, ktoré ich nemeno $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$. Ako sformulovať matematicky túto zásadu (**pole nedeformuje svoje vlastné prúdnicie**) a ako do nej zakomponovať, čo pole robí s inými krivkami, bez podrobného rozpisovania parametrizovaného toku?

Najprv pozrime ako sa vo všeobecnosti funkcia dvoch premenných $f(x, y)$ mení pozdĺž toku poľa $\vec{V} = V^x(x, y)\partial_x + V^y(x, y)\partial_y$. Skúmame infintezimálne zmeny. Myšlienka je jednoduchá - porovnať hodnoty funkcie v počiatočnom bode (x, y) a v bode $(x(\epsilon), y(\epsilon))$, infintezimálne odplavenom pozdĺž prúdnicie. Pre takéto blízke body však možno použiť Taylorov rozvoj, podľa ktorého, spolu s našou definíciou zložiek poľa V^x, V^y , platí

$$\begin{aligned} x(\epsilon) &\approx x(0) + \left. \frac{dx}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon = x + \epsilon V^x \\ y(\epsilon) &\approx y(0) + \left. \frac{dy}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon = y + \epsilon V^y \end{aligned}$$

Hodnoty našej funkcie $f(x, y)$ sa na dvoch miestach o ϵ vzdialených pozdĺž integrálnej krivky poľa \vec{V} líšia nasledovne:

$$\begin{aligned}
f(x(\epsilon), y(\epsilon)) - f(x, y) &\approx f(x + \epsilon V^x, y + \epsilon V^y) - f(x, y) \\
&\approx f(x, y) + \epsilon V^x \partial_x f + \epsilon V^y \partial_y f - f(x, y) \\
&\approx \epsilon (V^x \partial_x + V^y \partial_y) f \\
&\approx \epsilon \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f
\end{aligned}$$

Skalárny súčin medzi komponentami poľa a gradientom funkcie má názorný význam: Funkcia (jej hodnoty) sa najviac mení v smere svojho gradientu (z definície). Miera zmeny funkcie pozdĺž toku poľa je daná tým, do akej miery leží jej gradient v smere tohto toku, čo meria práve uvedený skalárny súčin. Ak je nulový, pole tečie pozdĺž "vrstevníc" našej funkcie, teda jeho integrálne krivky sú zároveň krivkami konštantného f .

Súčin $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} f$ sa v literatúre často skrátene označuje ako $\vec{V} f$ alebo $\vec{V}(f)$ a prezentuje sa ako "pole pôsobiace na funkciu".

5.3.1 Kritérium infinitezimálnej invariantnosti

Invariantnosť funkcie $f(x, y)$ voči toku poľa \vec{V} vyžaduje, aby prúdnicie poľa tiekli pozdĺž vrstevníc funkcie, teda aby gradient funkcie bol kolmý na pole.

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{V}(f) = 0 \tag{54}$$

Ak toto platí pre všetky (x, y) z definičného oboru funkcie f , potom pole zachováva všetky vrstevnice tejto funkcie, teda všetky krivky dané predpisom $f(x, y) = c$.

Podmienka zachovať každú vrstevnicu je silnejšia ako požiadavka zachovať len niektorú. Často sa stretáme s požiadavkou trebárs zachovať nejakú množinu bodov danú predpisom $F = 0$, čo predstavuje zachovanie jednej konkrétnej ("nulovej") vrstevnice funkcie F . Ak nájdeme pole, ktoré spĺňa $\vec{V} F = 0$ len na množine bodov spĺňajúcich $F = 0$, potom ešte treba skontrolovať, či na tejto množine platí, že $\vec{\nabla} F \neq 0$. Ak hej, našli sme pole zachovávajúce nulovú vrstevnicu funkcie F ; ak je však na tejto vrstevnici gradient nulový, hocikaké pole bude spĺňať $\vec{V} F = 0$, nielen tie, ktoré túto vrstevnicu zachovávajú. Ako však bolo uvedené vyššie, ak pole spĺňa silnejšiu podmienku $\vec{V}(F) = 0$ všade, netreba gradient kontrolovať.

5.3.2 Rotácie v rovine okolo počiatku a ich integrálne krivky

Ešte raz, dopodrobna kritérium invariantnosti preskúmame na príklade poľa $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$ a kružníc centrovaných v počiatku. $F(x, y) = x^2 + y^2 - C = 0$ (tu x, y berieme ako premenné, C je pre danú kružnicu konštanta). Každá z týchto kružníc sa dá zapísať parametricky ako

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cos \epsilon + y \sin \epsilon, y \cos \epsilon - x \sin \epsilon)$$

kde x, y sú pre danú kružnicu štartovacími bodmi. Pre malé ϵ môžeme písať $\cos \epsilon \approx 1$ a $\sin \epsilon \approx \epsilon$, teda

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x + y\epsilon, y - x\epsilon)$$

Funkcie sa pozdĺž toku takéhoto poľa menia nasledovne:

$$\begin{aligned} f(x(\epsilon), y(\epsilon)) - f(x, y) &\approx f(x + y\epsilon, y - x\epsilon) - f(x, y) \\ &\approx f(x, y) + \epsilon y \partial_x f - \epsilon x \partial_y f - f(x, y) \\ &\approx \epsilon (y \partial_x f - x \partial_y f) \end{aligned}$$

Teda funkcia spĺňajúca ($y \partial_x f - x \partial_y f = 0$) je invariantná voči toku nášho poľa. Príkladom takejto funkcie je napríklad $f(x, y) = x^2 + y^2$. Naozaj,

$$\vec{V}f = \vec{V}(x^2 + y^2) = (y \partial_x - x \partial_y)(x^2 + y^2) = 2yx - 2xy = 0$$

Túto konkrétnu funkciu si všimnime podrobnejšie - jej "vrstevnice", teda krivky na ktorých je konštantná, $f(x, y) = x^2 + y^2 = c$, sú práve integrálne krivky nášho poľa, dané v neparametrickej forme ako $F(x, y) = x^2 + y^2 - c = 0$.

5.3.3 Invariantnosť funkcie vs vrstevnice

Keď hľadáme transformácie, treba mať ujasnené, čoho transformácie vlastne hľadáme, čo má ostať ako celok nezmenené a čo sa môže meniť. To samozrejme závisí od toho, čo naše premenné a výrazy z nich poskladané predstavujú.

Môžeme hľadať transformácie v rovine x, y , ktoré zachovávajú hodnoty funkcie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. V takom prípade samozrejme generátor transformácie navrhne v tvare $V^x(x, y) \partial_x + V^y(x, y) \partial_y$ a hľadáme funkcie V^x, V^y premenných x, y tak, aby platilo $(V^x \partial_x + V^y \partial_y)f = 0$.

Ak ich triviálne rozšírime do 3D ako $V^x(x, y) \partial_x + V^y(x, y) \partial_y + 0 \partial_z$, môžeme povedať, že zachovávajú celý graf funkcie dvoch premenných $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ alebo prinaajmenšom nulovú vrstevnicu funkcie troch premenných $F(x, y, z)$, teda plochu $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$.

Alebo nás možno zaujímajú transformácie v priestore x, y, z , voči ktorým je funkcia troch premenných $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ invariantná (teda by zachovávali jej graf v 4D, aj keď tam už ťažko vizualizovať), v takom prípade navrhne generátor transformácie v tvare $V^x(x, y, z) \partial_x + V^y(x, y, z) \partial_y + V^z(x, y, z) \partial_z$ a hľadáme funkcie V^x, V^y, V^z premenných x, y, z , tak, aby platilo $(V^x \partial_x + V^y \partial_y + V^z \partial_z)F = 0$. Príslušná transformácia bude mať integrálne krivky (v 3D priestore) pozdĺž "vrstevnic" funkcie $F(x, y, z)$, teda na nich bude mať F konštantnú hodnotu.

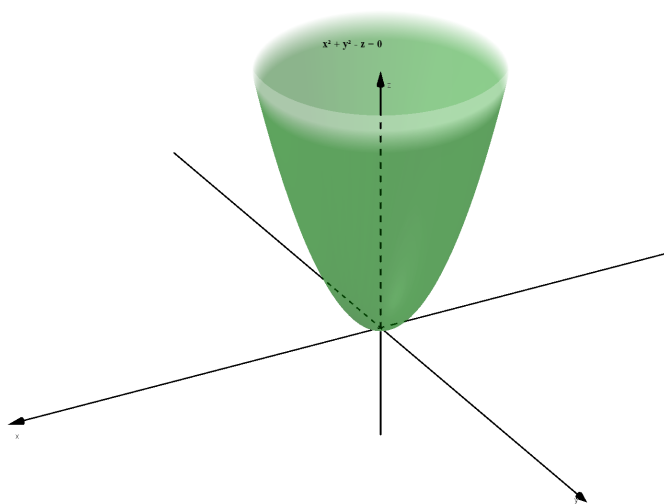
Ak nám stačí nájsť transformácie v priestore x, y, z , ktoré zachovávajú jednu konkrétnu vrstevnicu funkcie F , napríklad $F = 0$ (túto vrstevnicu si vieme vizualizovať, ale nezabúdajme, že nepredstavuje hodnoty funkcie F , ale len body z jej definičného oboru, na ktorých má F nulovú hodnotu.), dostávame vo všeobecnosti širšiu triedu možností ako keď požadujeme zachovanie všetkých vrstevnic funkcie F . V takom to prípade (ak použijeme vo výpočte podmienku $F = 0$), treba ešte skontrolovať, či na množine bodov, kde platí, je splnené $\vec{\nabla}F \neq 0$. Ak je gradient nulový, potom "kritérium invariantnosti" $(V^x \partial_x + V^y \partial_y + V^z \partial_z)F \Big|_{F=0} = 0$ spĺňajú všetky vektorové polia, nielen generátory symetrií, a teda toto kritérium nie je použiteľné.

5.4 Transformácie v 3D a symetrie algebraických rovníc

V 3D priestore je transformácií samozrejme viac ako v 2D a dajú sa uvažovať bohatšie štruktúry, o ktorých v 2D nemohla byť reč. Parametrizované krivky/ prúdnice majú tri zložky a ich generátory tiež. Poďme si ukázať na jednoduchom príklade, ako možno využiť naše infinitezimálne kritérium invariantnosti. Majme množinu bodov v trojrozmernom priestore viazanú požiadavkou

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \quad (55)$$

Z algebraického hľadiska ide v (55) o rovnicu pre tri premenné, z geometrického o dvojrozmernú



Obr. 37: graf funkcie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, alebo súbor bodov, na ktorých je funkcia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ nulová

plochu v trojrozmernom priestore. Ak nájdeme vektorové polia, ktoré tečú "pozdĺž" plochy (55), z algebraického hľadiska získame generátory transformácií, ktoré nám z jedného riešenia urobia (vo všeobecnosti) iné. Pod "riešením" tu možno rozumieť viac vecí. Jednak body, ktorých súradnice spĺňajú podmienku (55). Ale trebárs aj krivky, ktoré ležia v ploche danej podmienkou (55). Druhá varianta je osobitne vhodná ako príprava na neskorší podnik, totiž hľadanie riešení diferenciálnych rovníc (riešením takých býva vo všeobecnosti funkcia (teda z geometrického hľadiska napríklad krivka), nie len číslo).

Nájdime polia, ktoré tečú pozdĺž povrchu daného rovnicou (55). Získame tým generátory transformácií, ktoré zachovávajú plochu ako takú, aj keď body v rámci nej môžu "presúvať". (Ak už máme generátor, jeho integráciou môžeme získať príslušný tok/transformáciu.) Vo všeobecnosti pole v 3D má tvar

$$\vec{V} = V^x(x, y, z)\partial_x + V^y(x, y, z)\partial_y + V^z(x, y, z)\partial_z$$

Hľadáme jeho komponenty V^x, V^y, V^z ktoré vo všeobecnosti môžu závisieť od všetkých dostupných premenných x, y, z . Podľa infinitezimálneho kritéria invariantnosti máme požiadavky

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla} F \Big|_{F=0} \\ 0 &\neq \vec{\nabla} F \Big|_{F=0} \end{aligned} \quad (56)$$

Platí $\vec{\nabla}F = (2x, 2y, -1)$, teda gradient funkcie F nie je nulový nikde, ani na jej nulovej vrstevnici. Teda na to, aby pole \vec{V} bolo symetriou plochy (55), stačí aby jeho komponenty V^x, V^y, V^z (vo všeobecnosti funkcie x, y, z) spĺňali

$$(V^x \partial_x + V^y \partial_y + V^z \partial_z)(x^2 + y^2 - z) \Big|_{F=0} = (2x V^x + 2y V^y \partial_y - V^z) \Big|_{x^2+y^2-z=0} = 0$$

Takýchto polí je viac.

Jednou z možností je $V^x = y, V^y = -x, V^z = 0$, teda naše staré známe pole generujúce rotácie v okolo osi $z, y\partial_x - x\partial_y$. Tok tohto poľa (transformáciu ním generovanú) sme už videli veľa krát, teraz akurát pribudla úpremná z , ktorú si pole nevšimá a nemení.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos \epsilon + y \sin \epsilon \\ \tilde{y} &= y \cos \epsilon - x \sin \epsilon \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

Inverzná transformácia (ktorú potrebujeme pri transformovaní kriviek) je

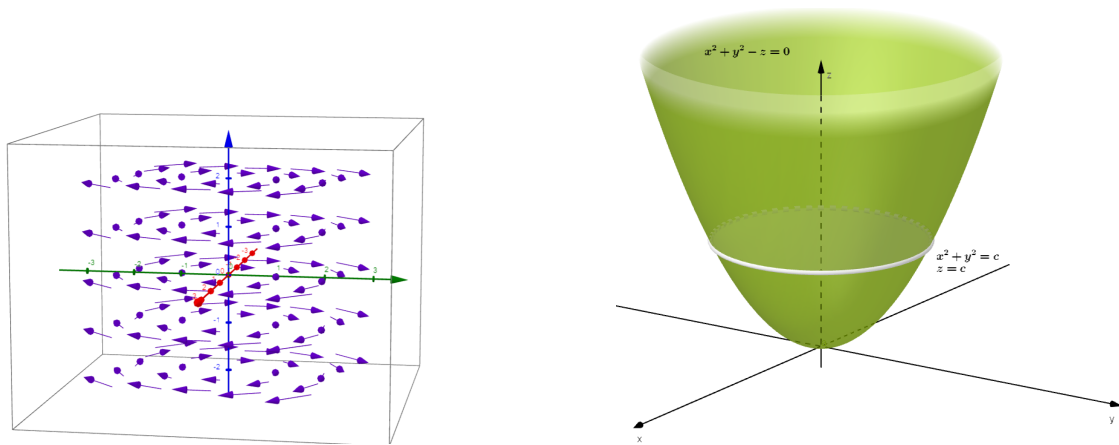
$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} \cos \epsilon - \tilde{y} \sin \epsilon \\ y &= \tilde{y} \cos \epsilon + \tilde{x} \sin \epsilon \\ z &= \tilde{z} \end{aligned}$$

Nie je ťažké sa presvedčiť, že toto pole nám z riešení vytvára riešenia v zmysle, že ak bod (x, y, z) patrí do plochy (55) (teda spĺňa rovnicu ktorou je daná), potom aj $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ do nej patrí.

Skúsme teraz transformáciu "rovnobežky" na paraboloid, teda krivky

$$x^2 + y^2 = c, \quad z = c$$

ktorá patrí do našej plochy (všetky body v nej spĺňajú príslušnú rovnicu). Toto je práve prípad, keď naše pole z tejto krivky nevyrobí nič nové, keďže je to práve jeho integrálna krivka ktorú necháva invariantnú.



Obr. 38: Voči toku poľa $y\partial_x - x\partial_y + 0\partial_z$ sú krivky $x^2 + y^2 = c, z = c$ invariantné

Avšak aj "poludník" na paraboloidu, napr. krivka daná ako

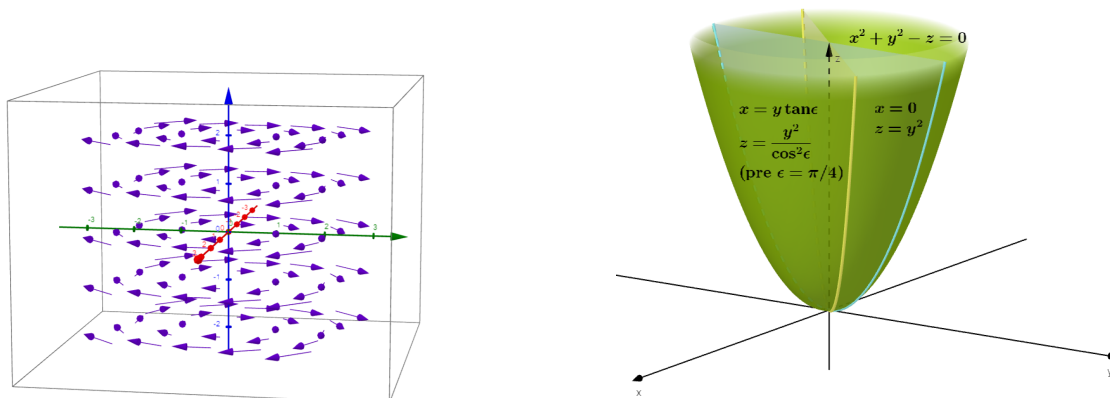
$$x = 0, \quad z = y^2$$

leží v ploche (55). Pozrime sa ako sa pretransformuje táto, a či pretransformovaná krivka ostane v ploche (55) tiež. Novú krivku dostaneme ako obvykle: Vezmeme predpis starej, teda $x = 0, z = y^2$, a za premenné dosadíme ich vlnkové vyjadrenia z inverznej transformácie. Nová krivka bude mať vyjadrenie

$$\tilde{x} = \tilde{y} \tan(\epsilon) \quad \tilde{z} = \frac{\tilde{y}^2}{\cos^2 \epsilon}$$

Spĺňajú jej body predpis $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = 0$? Hej, pretože na krivke platí

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = (\tilde{y} \tan \epsilon)^2 + \tilde{y}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{\cos^2 \epsilon} = 0$$



Obr. 39: Transformácia krivky $z = y^2, x = 0$ tokom poľa $y\partial_x - x\partial_y + 0\partial_z$.

Samozrejme tu vyberáme veľmi názorné krivky aj polia, ale treba si uvedomiť, že takýto model nachádzania nových riešení pomocou známych by mal fungovať aj vo viacerých rozmeroch (pre funkcie viac premenných), kde metóda "pozriem a vidím" nefunguje, a takýto algoritmickej postup (nájsť pole ktoré rešpektuje zadanú podmienku, nechaj jeho tokom odteciť nejaké jednoduché riešenie, pozri sa či nedostávaš nejaké nové) sa môže veľmi zísť. Nehovoriac o situácii s diferenciálnymi rovnicami.

Vyskúšajme ešte aspoň jedno vektorové pole zachovávajúce tvar (55), teda spĺňajúce (56). Napríklad pole $0\partial_x + \partial_y + 2y\partial_z$ patrí do takej kategórie. Nájdime jeho integrálne krivky a pozrime sa, čo robí trebárs s koncentrickými kružnicami po obvodu paraboloidu, s ktorými rotácie okolo osi z nerobili nič badateľné (prísne vzaté presúvali ich body, ale v rámci tej istej krivky). Hľadáme funkcie $x(\epsilon), y(\epsilon), z(\epsilon)$, pre ktoré platí

$$\frac{dx}{d\epsilon} = 0$$

$$\frac{dy}{d\epsilon} = 1$$

$$\frac{dz}{d\epsilon} = 2y$$

$$x(0) = x$$

$$y(0) = y$$

$$z(0) = z$$

Riešením sú integrálne krivky

$$\tilde{x} = x(\epsilon) = x \quad \tilde{y} = y(\epsilon) = y + \epsilon \quad \tilde{z} = z(\epsilon) = z + 2y\epsilon + \epsilon^2$$

Pozrime sa, čo robí takýto tok s "rovnobežkami", teda krivkami $x^2 + y^2 = c$, $z = c$, kde c je konštanta pre danú krivku. Ako obvykle, potrebujeme v zadaní krivky, ktorej transformáciu skúmame, vyjadriť staré premenné x, y, z pomocou nových $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Preto je potrebná inverzná transformácia, teda

$$x = \tilde{x} \quad y = \tilde{y} - \epsilon \quad z = \tilde{z} - 2\tilde{y}\epsilon + \epsilon^2$$

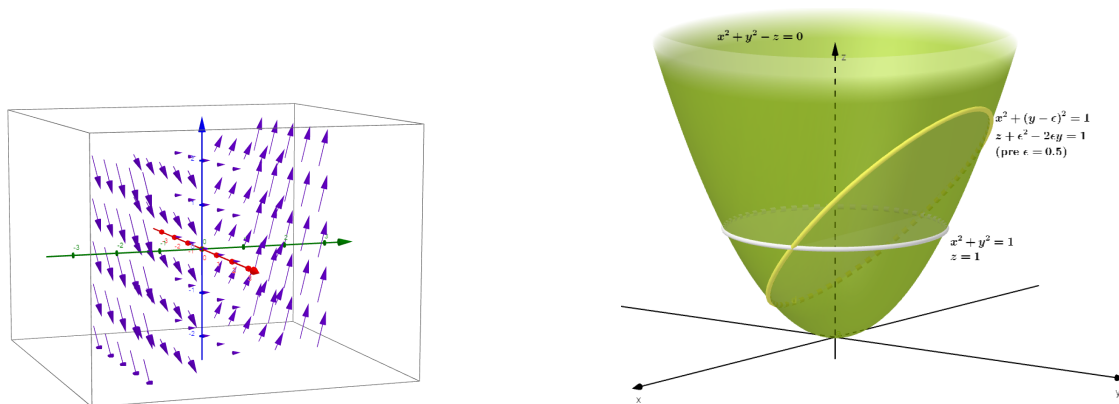
Krivka daná rovnicami

$$x^2 + y^2 = c \quad z = c$$

sa transformuje, odplaví na tvar

$$\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \epsilon)^2 = c \quad \tilde{z} - 2\tilde{y}\epsilon + \epsilon^2 = c$$

Nie je ťažké overiť, že body takejto krivky spĺňajú rovnicu $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = 0$, teda že patria do paraboloidu.



Obr. 40: Transformácia krivky $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ tokom poľa $0\partial_x + \partial_y + 2y\partial_z$.

Dá sa nájsť ešte množstvo vecí ktoré si čitateľ môže na tomto príklade vyskúšať. Napríklad pohľadať ďalšie symetrie, ich generátory a toky, vyskúšať transformáciu ďalších kriviek na našom paraboloidu atď.

5.5 Transformácie v jetovom priestore

Doteraz sme si ilustrovali symetrie objektov popísaných algebraickými rovnicami, a ukázali sme si, ako sa pomocou symetrických transformácií (tých, ktoré daný objekt nechajú ako celok nezmenený, aj keď azda premiešajú jeho body) dajú z riešení rovnice nájsť ďalšie riešenia. Keďže sme používali najmä príklady, kde sa jednalo o jednoduché algebraické rovnice a malý počet rozmerov, sila metódy bola ilustrovaná tam, kde ju vyriešenie úlohy až tak nepotrebovalo. Z didaktického hľadiska je však azda lepšie zoznámiť sa s novou metódou tam, kde jej s predstavenie môžu doprevádzať staré známe pojmy a predstavy. V tomto duchu budeme ešte chvíľu pokračovať - aby v čase, keď sa dostaneme k trochu abstraktnejším problémom, už bolo aj ovládanie symetrických generátorov, ich tokov a vplyvu na rozličné objekty vecou rutiny.

5.5.1 Transformácia bodov vs transformácia grafu funkcie

Už sme sa zaoberali **transformáciou bodov** roviny a tým **indukovanou transformáciou kriviek** ležiacich v tejto rovine. Tieto krivky často mohli zodpovedať **grafom funkcií**²⁴. Onedlho sa budeme zaoberať otázkou, aká transformácia sa **indukuje na deriváciách týchto funkcií**. Rozšírenie transformácií na derivácie funkcií nám pomáha **rozšíriť geometrické metódy z algebraických rovníc aj na diferenciálne**. Aby sme to mohli urobiť hladkým nadviazaním na algebraickú časť, zhrňme si ešte raz základy z transformácií funkcií indukovaných transformáciami na priestore závislej a nezávislej premennej.

Spomeňme si, ako postupujeme, ak máme **zadanú transformáciu bodov v rovine**

$$(x, y) \longrightarrow (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (57)$$

a chceme nájsť **generátor tejto transformácie**. Najprv si ujasníme, kde pôsobí: na premenných x, y . Teda čakáme niečo v tvare²⁵

$$\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x + \phi(x, y)\partial_y \quad (58)$$

Jeho komponenty ξ, ϕ môžu vo všeobecnosti závisieť od všetkých dostupných premenných (x, y) a získame ich deriváciou zložiek krivky $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ podľa parametra a vyčíslení v $\epsilon = 0$:

$$(\xi, \phi) = \left(\frac{dx(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{dy(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \quad (59)$$

Spomeňme si ešte ako postupujeme, ak máme **zadanú transformáciu funkcie**

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) \quad (60)$$

a chceme nájsť **generátor tejto transformácie**. Vieme **spätné zrekonštruovať generátor transformácie bodov na priestore nezávislej a závislej premennej, ktorá urobila uvedenú premennú grafu funkcie** (60)? Stále sa jedná o transformáciu premenných x, y , teda čakáme niečo v tvare $\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x + \phi(x, y)\partial_y$, kde komponenty ξ, ϕ získame deriváciou zložiek krivky $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ podľa parametra a vyčíslení v $\epsilon = 0$.

Teraz však y na transformovanom grafe funkcie (z ktorého ideme získať informácie o komponentách generátora) *nie je nezávislá premenná!* Teda očakávame, že komponenta ϕ bude vyjadrená cez kombináciu komponenty ξ a miery toho, ako závislá premenná y súvisí s nezávislou x . Nezabudnime teda, čo tu vyžaduje úplná derivácia podľa ϵ , totiž že \tilde{y} závisí od ϵ jednak "priamo" (túto závislosť budeme v ďalšom skrátene označovať Q) a jednak cez \tilde{x} (deriváciu y podľa x budeme označovať skrátene y_x)²⁶. Potom y -ová zložka hľadaného vektorového poľa, teda úplná derivácia závislej premennej podľa parametra transformácie, vyčíslená v jeho nulovej hodnote $\epsilon = 0$, bude

$$\phi = \left(\frac{dy}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = Q + y_x \xi$$

²⁴Nie každá krivka je grafom explicitnej funkcie, ale môžeme mať implicitné zadanie, alebo natočiť osi tak, aby daná časť krivky mohla zodpovedať grafu jednoznačnej funkcie.

²⁵Zriekli sme sa tu označenia komponent ako V^x, V^y . To síce malo veľkú výhodu v tom, že jasne naznačovalo, o ktorú komponentu sa jedná, ale s ohľadom na to, čo bude časom nasledovať (derivovanie podľa viacerých premenných s ďalšími indexmi...) je hádam ospravedliteľná snaha zbaviť sa aspoň tých indexov, pri ktorých sa to dá urobiť takto lacno

²⁶Aby sme potom neľadali vlnovky kde ich už netreba, nezabudnime, že (popri tom, že sú to len označenia tam, kde potrebujeme rozlíšiť veci pred a po transformácii) pre $\epsilon \rightarrow 0$ máme $\tilde{x} \rightarrow x, \tilde{y} \rightarrow y$.

S týmto ujasnením, generátor transformácie (60) má komponenty

$$(\xi, \phi) = \left(\frac{dx(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{dy(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (\xi, Q + y_x \xi) \quad (61)$$

Upozorníme tu ešte na veličinu, ktorú sme skrátene nazvali Q a ktorá bude hrať veľkú rolu aj v ďalšom

$$Q(x, y) = \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \phi(x, y) - y_x \xi(x, y) \quad (62)$$

Budeme ju volať **charakteristikou poľa** \vec{V} . Kóduje priame pôsobenie poľa na zložky zodpovedajúce závislým premenným (tu: priama transformácia y tokom poľa, teda odplavenie o ϵ). Pole s nulovou charakteristikou netečie v smere závislých premenných (tu y), teda nepôsobí na ne explicitne. Samozrejme to neznamená, že grafy funkcií nijako nezdeformuje, keďže aj závislé premenné závisia od transformácie cez svoje argumenty.

5.5.2 Diferenciálne rovnice - geometrický pohľad

Geometrický pohľad sa dá uplatniť aj pri diferenciálnych rovniciach, ktoré sa dajú predstaviť ako (nad)plochy v priestore nezávislých premenných, závislých premenných, a derivácií závislých premenných. Rozmer zodpovedajúci "deriváciám závislých premenných" je trochu menej zažitý, ale zas taký veľký skok v abstrakcii to nie je. Takýto priestor rozšírený o položky zodpovedajúce všetkým potrebným deriváciám podľa všetkých relevantných nezávislých premenných, až po najvyšší relevantný n -tý rád budeme volať **n -tý jetový priestor** a označovať $J^{(n)}$. Matematici k nemu majú veľa čo povedať korektnejšie ako je uvedené tu. Pôvodný priestor závislých a nezávislých premenných sa dá chápať ako nultý jetový priestor $J^{(0)}$, keďže najvyššia derivácia je tu nultá. Platí prirodzene

$$J^{(n)} \supset J^{(n-1)} \supset \dots \supset J^{(0)}$$

V prípade obvyčajnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, kde x je nezávislá premenná, y je funkcia a y_x jej derivácia, máme touto rovnicou zadanú plochu v trojrozmernom priestore s osami x, y, y_x . Je to zároveň jediný typ rovnice, kde máme k dispozícii plnú vizualizáciu. Totiž už obvyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu v spomenutých premenných bude vyžadovať štvorrozmerný priestor s osami x, y, y_x, y_{xx} . Parciálne diferenciálne rovnice sú na tom čo sa počtu rozmerov týka ešte zložitejšie. To nás však nemá prečo odradiť. Nakresliť štvrtú nezávislú os nevieme, ale pridať k trom zložkám nejakého objektu (krivky, vektorového poľa...) ďalšie a ďalšie je len otázka väčšej spotreby času a papiera.

Ešte sa opýtajme, načo by to mohlo byť dobré. Prečo takto otvárať nový rozmer, uvažovať "vyššie" priestory $J^{(n)}$, keď nakoniec aj tak chceme riešenia diferenciálnych rovníc v prozaickom svete "dole", v priestore závislých a nezávislých premenných $J^{(0)}$? Lebo aj niektoré veci čo sú "dole" je ľahšie nájsť z nadhľadu. Diferenciálna rovnica sama o sebe nepredstavuje nejaký geometrický útvar v priestore $J^{(0)}$. Ale predstavuje ho vo "vyššom" priestore $J^{(n)}$. A akonáhle máme nejaký matematický objekt (v tomto prípade diferenciálnu rovnicu), reprezentovaný ako hladký geometrický objekt (v tomto prípade ako nejakú (nad)plochu v $J^{(n)}$), môžeme sa pýtať na jej symetrie - na transformácie, ktoré ju ako celok zachovávajú - a nasadiť celú mašinériu, ktorá je tak k dispozícii. Riešeniam rovnice (resp. grafom riešení) zodpovedajú nejaké útvary v priestore závislých a nezávislých premenných $J^{(0)}$ (pre obvyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu sú to krivky), a týmto zodpovedajú nejaké objekty premietnuté do vyššieho jetového priestoru $J^{(n)}$. Je tu nádej, že vektorové polia zachovávajú plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici potom budú mapovať taký objekt (vo svete "hore") zodpovedajúci riešeniu na objekt zodpovedajúci (vo všeobecnosti inému) riešeniu. Čo by ešte neznamenalo priveľa, keby nebola aj nádej, že aspoň niektoré vektorové polia

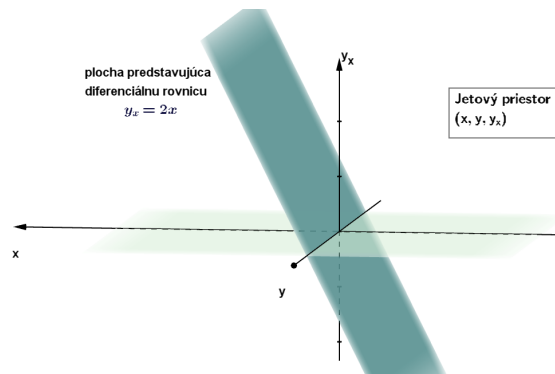
z jetového priestoru majú svoje projekcie do vektorových polí v priestore závislých a nezávislých premenných. Násť vektorové polia, ktoré zachovávajú nadplochu v jetovom priestore, a vedieť ich spustiť na "dolný svet" znamená násť generátory transformácií mapujúcich riešenia na riešenia. To sa len tak nezahadzuje.

Čo treba urobiť:

- reprezentovať diferenciálnu rovnicu pomocou zodpovedajúcej algebraickej ako (nad)plochu v jetovom priestore $J^{(n)}$
- predĺžiť grafy funkcií z $J^{(0)}$ na vhodné grafy na $J^{(n)}$
- predĺžiť vektorové polia na $J^{(0)}$ na vhodné vektorové polia $J^{(n)}$
- využiť na $J^{(n)}$ celú geometrickú mašineriu, po akej situácia volá
- "spustiť" celú získanú korisť do $J^{(0)}$

5.5.3 Diferenciálna rovnica ako (nad)plocha v jetovom priestore $J^{(n)}$

Reprezentovať diferenciálnu rovnicu ako (nad)plochu v jetovom priestore $J^{(n)}$ jednoducho znamená, že derivácie závislej premennej si predstavíme ako ďalšie premenné v priestore s príslušným rozšírením. Ako bolo povedané, vizualizácia sa dá urobiť len pre obyčajné diferenciálne rovnice (jedna závislá a jedna nezávislá premenná) prvého rádu (len jeden typ derivácie), výpočtová metóda funguje aj pre parciálne diferenciálne rovnice mnohých rádov, dokoncy pre ich systémy.

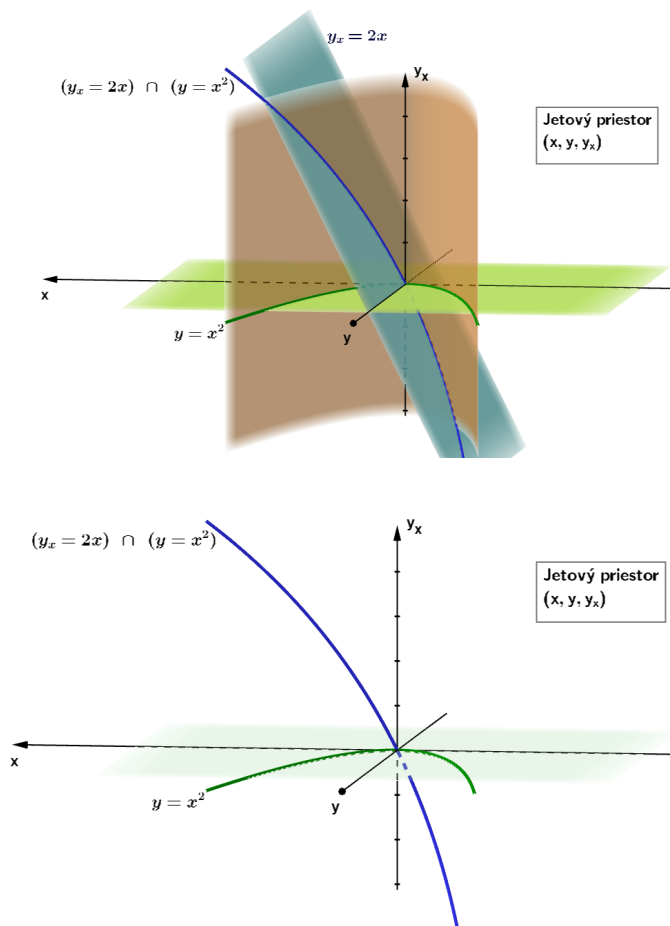


Obr. 41: Rovnica $y_x = 2x$ ako geometrický objekt v jetovom priestore.

5.5.4 Predĺženie grafu funkcie v $J^{(0)}$ do jetového priestoru $J^{(n)}$

Rozšíriť graf funkcie (útvár v priestore závislých a nezávislých premenných) do jetového priestoru $J^{(n)}$ znamená jednoducho pridať zložky zodpovedajúce príslušným deriváciám - všetkých rádov až po n -tý. Tomuto rozšíreniu funkcie f sa niekedy hovorí n -té **predĺženie**. Budeme ho označovať $pr^n f$. V tomto zmysle nulté predĺženie je pôvodná funkcia $pr^0 f = f$.

Rozmer n -tého jetového priestoru závisí od počtu možných derivácií rádu n a menej, teda je závislý od počtu nezávislých premenných. Napríklad graf funkcie $y = f(x)$ má vo svete "dole" zložky $(x, f(x))$, a v 3 rozmernom jetovom priestore $J^{(1)}$ bude mať zložky $(x, f(x), f_x(x))$. Ak je priestor nezávislých premenných rovina x, y , závislá premenná je $z = h(x, y)$, a máme dočinenia s parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu, potom potrebujeme rozšírenie do 5 rozmerného priestoru $J^{(1)}$. Graf predĺženej funkcie $pr^1 h$ tam má zložky $(x, y, h(x, y), h_x(x, y), h_y(x, y))$. Ak máme dočinenia s funkciou jednej premennej, ale vyššími deriváciami, napríklad s druhou, bude potrebné rozšírenie $(x, f(x), f_x(x), f_{xx}(x))$, teda druhé predĺženie do 4 rozmerného $J^{(2)}$.



Obr. 42: Rozšírenie ("zdvihnutie") grafu funkcie $y = x^2$ do jetového priestoru.

5.5.5 Predĺženie vektorového poľa do jetového priestoru

Poznáme už vektorové polia $\vec{V} = \xi \partial_x + \phi \partial_y$ a ich toky tečúce na $J^{(0)}$, kde transformujú body (a teda aj grafy funkcií) v rovine x, y . **Ako vyzerajú polia predĺžené do jetového priestoru $J^{(1)}$, nazvime ich $\text{pr}^1 \vec{V}$, ktorých toky transformujú body v priestore $J^{(1)}$ so súradnicami x, y, y_x ?**

Na to, aby sme niečo našli, je často dobre ujasniť si, aké máme na to požiadavky. Vektorové polia, ako ich máme definované, sa dajú chápať ako operátory na funkciách (parciálne derivácie stojace na mieste bázových vektorov veľmi pomáhajú takémuto náhľadu). Na našom $J^{(1)}$ zrejme tečú toky vektorových polí typu $W^x \partial_x + W^y \partial_y + W^{y_x} \partial_{y_x}$, kde zložky W^x, W^y, W^{y_x} môžu vo všeobecnosti závisieť od všetkých dostupných premenných x, y, y_x a pôsobia na funkcie na jetovom priestore závisiace od týchto premenných. Predĺžené polia $\text{pr}^1 \vec{V}$ majúce svoj pôvod v $J^{(0)}$, budú tvoriť podmnožinu týchto. Ich zložky budú závisieť len od x, y . Dôležité je, aby konzistentne pôsobili na podmnožinu funkcií na jetovom priestore tvorenú predĺženiami funkcií zdola, $\text{pr}^1 f$.

Predĺžené vektorové pole $\text{pr}^1 \vec{V}$ by malo na predĺženú funkciu $\text{pr}^1 f$ pôsobiť konzistentne v tomto zmysle: Ak na priestore $J^{(0)}$ transformujeme tokom poľa \vec{V} funkciu f a potom ju takto transformovanú predĺžime do jetového priestoru $J^{(1)}$, malo by to byť to dopadnúť rovnako, ako keď funkciu f najprv predĺžime do $J^{(1)}$ a tam transformujeme tokom predĺženého poľa $\text{pr}^1 \vec{V}$. Teda stratégia pri hľadaní **algoritmu na nájdenie predĺženia poľa** by mohla byť takáto:

- Vezmime na $J^{(0)}$ nejaké pole $\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y$. Jeho hľadané predĺženie označme $\text{pr}^1\vec{V}$. Keďže jeho tok bude pôsobiť na $J^{(1)}$ so súradnicami x, y, y_x , čakáme ho v tvare $\text{pr}^1\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y + \Phi^x\partial_{y_x}$. Dôležité bude nájsť komponentu $\Phi^x(x, y)$ čo pribudla.
- Skúmame, ako sa pri transformáciách funkcie $y = f(x)$ v priestore x, y tokom poľa \vec{V} transformujú predĺženia funkcie $\text{pr}^1 f$ v priestore x, y, y_x , teda skúmame $x(\epsilon), y(\epsilon), y_x(\epsilon)$, kde y a y_x nie sú nezávislé, ale sú funkciami premennej x , a to vzájomne konzistentne ako aj značenie napovedá, teda $y = f(x), y_x = f_x(x)$.
- Nájdime generátor tejto transformácie, teda poderivujeme (úplnou, totálnou deriváciou) podľa parametra a vyčíslime v $\epsilon = 0$. Toto by mali byť komponenty nášho hľadaného poľa $\text{pr}^1\vec{V}$. Prvé dve komponenty budú zrejme totožné s tými ktoré malo pole \vec{V} , práve tak ako prvé dve komponenty predĺženého grafu $\text{pr}^1 f$ boli len kópiou komponent grafu f . Novinkou je komponenta $\Phi^x(x, y)$ čo pribudla.

Podľa teda podľa načrtnutej stratégie predlžovať pole $\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x + \phi(x, y)\partial_y$. Jeho tok transformuje body na nulťom jetovom priestore J^0 , v rovine $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon))$ a teda aj grafy, krivky

$$(x, y(x)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) \quad (63)$$

Transformácia (63) indukuje aj transformáciu na prvom predĺženom jetovom priestore J^1 :

$$(x, y(x), y_x(x)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}_{\tilde{x}}(\tilde{x})) \quad (64)$$

Derivovaním podľa ϵ a vyčíslením v $\epsilon = 0$ dostávame komponenty zodpovedajúceho generátora transformácie na prvom jetovom priestore J^1

$$\text{pr}^1\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x + \phi(x, y)\partial_y + \Phi^x(x, y)\partial_{y_x} \quad (65)$$

ktorého komponenty $\xi(x, y), \phi(x, y), \Phi^x(x, y)$ nájdeme ako

$$\begin{aligned} (\xi, \phi, \Phi^x) &= \left(\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{d\tilde{y}(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{d\tilde{y}_{\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \left(\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon}, \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\epsilon}, \frac{\partial\tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= (\xi, Q + \xi y_x, D_x Q + \xi y_{xx}) \\ &= (\xi, \phi, D_x(\phi - \xi y_x) + \xi y_{xx}) \end{aligned} \quad (66)$$

Prvé dve komponenty sú tie, ktoré malo pole \vec{V} . Komponentu, čo pribudla predĺžením do jetového priestoru, sme nazvali Φ^x , aby ladila s bázovým ∂_{y_x} .²⁷

$D_x Q$ je totálna derivácia charakteristiky podľa nezávislej premennej.

²⁷ Už azda začína byť jasné, prečo sme pred časom premenovali V^y na ϕ . Symboly typu $V^{y,x}$, prípadne s neskôr potrebnými označeniami derivácií, napríklad $V_x^{y,x}, V_y^{y,x}, \dots$ atď sú trochu nepohodlné.

$$D_x Q = \left(\frac{\partial \tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dx} (\phi(x, y) - \xi(x, y)y_x)$$

Na konci (66) sme všetko prepísali cez komponenty pôvodného poľa ξ, ϕ , aby sa ukázala súvislosť medzi komponentami \vec{V} a $\text{pr}^1 \vec{V}$. Je však veľmi výhodné používať aj charakteristiku Q , osobitne ak budeme predlžovať do ešte vyšších jetových priestorov.

Zovšeobecniť postup do vyšších jetových priestorov $J^{(n)}$, kde n značí najvyšší rád derivácie už nie je principiálne ťažké, len výpočtov pribúda. Predĺženia grafov funkcií budú mať oproti pôvodným grafom príslušné zložky navyše $(x, y(x), y_x(x), y_{xx}(x), \dots)$. Transformáciou na priestore $J^{(0)}$ závislých a nezávislých premenných sa indukuje transformácia aj na $J^{(n)}$

$$(x, y(x), y_x(x), y_{xx}(x), \dots) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}_{\tilde{x}}(\tilde{x}), \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}), \dots) \quad (67)$$

Predĺženie poľa \vec{V} do jetového priestoru $J^{(n)}$, teda pole

$$\text{pr}^n \vec{V} = \xi \partial_x + \phi \partial_y + \Phi^x \partial_{y_x} + \Phi^{xx} \partial_{y_{xx}} + \dots$$

s komponentami $\xi(x, y), \phi(x, y), \Phi^x(x, y), \Phi^{xx}(x, y)$, je konštruované ako generátor transformácie (67), teda jeho komponenty dostaneme tak, že derivujeme každú zložku predĺženého grafu podľa ϵ a vyčíslime v $\epsilon = 0$.

$$\begin{aligned} (\xi, \phi, \Phi^x, \Phi^{xx}, \dots) &= \left(\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{d\tilde{y}(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{d\tilde{y}_{\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{d^2\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon^2}, \dots \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= (\xi, Q + \xi y_x, D_x Q + \xi y_{xx}, D_{xx} Q + \xi y_{xxx}, \dots) \end{aligned} \quad (68)$$

5.5.6 Prípad viacerých závislých a nezávislých premenných

Uvedme si tu ešte zovšeobecnenie na prípad viacerých nezávislých a závislých premenných a príslušných jetových priestorov²⁸. Viacero nezávislých premenných sa vyskytuje v parciálnych diferenciálnych rovniciach, viacero závislých premenných v previazaných systémoch diferenciálnych rovníc. V princípe ide len o pridanie príslušných osí do priestoru $J^{(0)}$ (priestor nezávislých a závislých premenných) a samozrejme tiež obohatenie priestoru $J^{(n)}$ o rozmery zodpovedajúce všetkým možným deriváciám rádu menšieho až rovného n . S tým ide pridanie príslušných zložiek vektorových polí a ich predĺžení. V podstate sa však len v algoritme na predĺženie poľa (68) objaví sumovanie cez všetky možnosti, teda principiálne nič nové.

Nech nezávislé premenné sú x^i , $i = 1, \dots, p$, závislé premenné y^α , $\alpha = 1, \dots, q$. Teda priestor $J^{(0)}$ je $p + q$ rozmerný. Priestor $J^{(1)}$ je $p + q + pq$ rozmerný ($p + q$ rozmerov je samozrejme kvôli $J^{(0)}$ ktoré zahŕňa, a pq kvôli počtu prvých derivácií ktoré sa dajú uvažovať. A tak ďalej.

Polia na priestore $J^{(0)}$ budú mať $p + q$ komponent

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^p \xi^i \partial_i + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \partial_{y^\alpha} = \xi^i \partial_i + \phi^\alpha \partial_{y^\alpha} \quad (69)$$

²⁸ V týchto situáciách už plná vizualizácia nie je k dispozícii, ale čitateľov s averziou k trochu abstrakcie sme už stratili dávno.

Naše pole má teraz toľko charakteristík koľko je závislých premenných:

$$Q^\alpha = \phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i y_i^\alpha = \phi^\alpha - \xi^i y_i^\alpha \quad (70)$$

Skratka y_i^α značí deriváciu y^α podľa x^i . Predĺženie poľa do n -tého jetového priestoru $J^{(n)}$ teraz bude mať príslušne veľa komponent:

$$\text{pr}^n \vec{V} = \sum_{i=1}^p \xi^i \partial_i + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \partial_\alpha + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\mathcal{I}} \Phi^{\alpha, \mathcal{I}} \partial_{y_{\mathcal{I}}^\alpha} = \xi^i \partial_i + \phi^\alpha \partial_\alpha + \Phi^{\alpha, \mathcal{I}} \partial_{y_{\mathcal{I}}^\alpha} \quad (71)$$

Sumuje sa cez všetky nezávislé a závislé premenné (sumy cez i a α), a cez všetky možné derivácie podľa nezávislých premenných (suma cez multiindex \mathcal{I}). Znamienok sumovania je však priveľa, v súlade s konvenciou ich budeme vynechávať s tým, že implicitne sa očakáva sumovanie cez opakované indexy.

Konkrétne komponenty predĺženého poľa $\Phi^{\alpha, \mathcal{I}}$ dostávame podobne ako v prípade jednej závislej a jednej nezávislej premennej, len nezabúdajme že teraz existuje charakteristika Q^α pre každú závislú premennú y^α a na presumovanie cez nezávislé premenné kde je potrebné:

$$\Phi^{\alpha, \mathcal{I}} = D_{\mathcal{I}} Q^\alpha + \xi^i y_{i, \mathcal{I}}^\alpha = D_{\mathcal{I}}(\phi^\alpha - \xi^i y_i^\alpha) + \xi^i y_{i, \mathcal{I}}^\alpha \quad (72)$$

5.5.7 Kritérium infinitezimálnej invariantnosti pre diferenciálnu rovnicu

Vráťme sa k dôvodom, prečo veci ako funkcie s grafmi na $J^{(0)}$, vektorové polia s tokmi na $J^{(0)}$ predlžujeme do jetových priestorov $J^{(n)}$. Dôvodom je, že diferenciálna rovnica n -tého rádu má v takom priestore prirodzenú reprezentáciu, tvorí tam akúsi (nad)plochu. Riešenia diferenciálnej rovnice zrejme budú mať predĺženia ležiace v tejto nadploche a predĺženia vektorových polí budú túto nadplochu zachovávať, len budú azda presúvať jedno predĺžené riešenie na iné. Máme nádej, že v jetovom priestore bude pomerne ľahké nájsť takéto polia. Ak sa nám z nich potom podarí spätne zrekonštruovať ich nepredĺžená verzia, máme pole na $J^{(0)}$ mapujúce riešenia na riešenia - spôsob, ako z jedného urobiť (možno) iné.

Pracujme najprv znova s jednou závislou a jednou nezávislou premennou. Chceme nájsť vektorové pole $\vec{V} = \xi \partial_x + \phi \partial_y$ na priestore $J^{(0)}$, priestore nezávislých a závislých premenných, ktorého n -té predĺženie $\text{pr}^n \vec{V}$ bude na priestore $J^{(n)}$ generovať taký tok, ktorý nechá invariantnú plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici n -tého rádu. Komponenty $\xi(x, y), \phi(x, y)$ takého poľa sú pre nás neznáme. Požiadavka, aby jeho predĺžená verzia (ktorá, ako sme videli, súvisí s týmito hľadanými komponentami) zachovávala nadplochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici, nám dodá podmienky, ktoré majú hľadané komponenty spĺňať.

Nech $F(x, y, y_x, y_{xx} \dots) = 0$ je naša diferenciálna rovnica n -tého rádu. Je geometrickým útvarom v priestore $J^{(n)}$ so súradnicami $x, y, y_x, y_{xx} \dots$, kam patrí definičný obor funkcie F . Rovnica predstavuje nulovú vrstevnicu tejto funkcie.

Skontrolujme požiadavku

$$\vec{V} F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_{y_x} F, \partial_{y_{xx}} F, \dots) \Big|_{F=0} \neq (0, 0, 0, 0, \dots)$$

Ak nie je splnená, naša metóda nie je spoľahlivá. Ak je, pokračujeme.

Nasadením kritéria infinitezimálnej invariantnosti nájdime polia na $J^{(n)}$, ktoré zachovávajú nadplochu $F(x, y, y_x, y_{xx} \dots) = 0$. Zo všetkých polí, ktoré tečú na $J^{(n)}$, chceme len tie, ktoré sú predĺženiami polí z $J^{(0)}$. To dáva obmedzenie na ich komponenty - môžu závisieť len od premenných z $J^{(0)}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \text{pr}^n \vec{V} F \Big|_{F=0} \\ &= (\xi \partial_x + \phi \partial_y + \Phi^x \partial_{y_x} + \Phi^{xx} \partial_{y_{xx}} + \dots) F \Big|_{F=0} \end{aligned} \quad (73)$$

Nezabudnime, že komponenty Φ^x, Φ^{xx}, \dots sú poskladané z komponent ξ, ϕ a ich derivácií. Máme teda podmienky, ktoré majú komponenty hľadaného poľa \vec{V} na $J^{(0)}$ splniť. Je pravda že sú to vo všeobecnosti samy osebe diferenciálne podmienky. Ale často jednoduchšie než pôvodná diferenciálna rovnica.

Keď máme hľadané pole $\xi \partial_x + \phi \partial_y$, nájdime tok ktorý indukuje na priestore $J^{(0)}$. Ak máme nejaké riešenie našej diferenciálnej rovnice, tento tok nám ho odplaví na (vo všeobecnosti) iné. Aj ak riešenie nemáme žiadne, mať generátor symetrie rovnice sa oplatí - lebo nájdením jeho integrálnych kriviek vieme niekedy odhadnúť nové súradnice, v ktorých by rovnica mohla byť ľahšia.

5.5.8 Príklad: Diferenciálna rovnica v jetovom priestore

Celé to azda znie abstraktnejšie než sa patrí, ukážme si to na konkrétnej situácii. Opäť volíme jednoduchý príklad, ktorý by sme vyriešili aj bez mašinérie s ktorou sa zoznamujeme - ale práve zoznamovací proces predsa volá po príkladoch, kde nám dávna skúsenosť môže robiť garde.

Vezmime rovnicu $y_x = 2x$. Ako obvykle, y_x je skrátene označenie derivácie podľa x . Teda x je nezávislá a y závislá premenná, a jediná relevantná derivácia pre účely súvisiace s našou rovnicou je y_x . Jetový priestor $J^{(1)}$ teda bude pozostávať z 2D priestoru ("svet dole", $J^{(0)}$) so súradnicami x, y a 1D rozšírenia, ktorému zodpovedá rozmer osúradnicovaný cez y_x .

Naša diferenciálna rovnica je v tomto rozšírenom 3D svete reprezentovaná plochou

$$F(x, y, y_x) = y_x - 2x = 0$$

čo je jednoduchá naklonená rovina. Riešenia našej diferenciálnej rovnice sú nejaké krivky v $J^{(0)}$, ktoré majú svoje zodpovedajúce predĺženia na ploche zodpovedajúcej rovnici. Samozrejme tvárimo sa, že zatiaľ nepoznáme všetky riešenia, aj keď, ako už bolo spomínané, ukazujeme si metódu na príklade, ktorý po nej až tak nevolá. To, že ich v skutočnosti vieme v tomto prípade uhádnuť, nech nám len na konci pomôže overiť, čo sa deje. A tiež ujasniť si zopár vecí ešte aj o tomto notoricky známom prípade rovníc.

Gradient (v jetovom priestore) funkcie F nie je nikde nulový:

$$(\partial_x, \partial_y, \partial_{y_x}) F = (\partial_x, \partial_y, \partial_{y_x})(y_x - 2x) = (-2, 0, 1) \neq (0, 0, 0) \quad (74)$$

takže infinitezimálna podmienka invariantnosti $\text{pr}^1 \vec{V} F|_{F=0} = 0$ bude postačujúcou pri hľadaní symetrie. Nájdime polia, ktoré zachovávajú rovinu $y_x - 2x = 0$. Vlastne hľadáme symetrie "nulovej vrstevnice" funkcie $F(x, y, y_x) = y_x - 2x$. Samozrejme hľadáme len také polia

$$\text{pr}^1 \vec{V} = \xi \partial_x + \phi \partial_y + \Phi^x \partial_{y_x}$$

v jetovom priestore $J^{(1)}$, ktoré vznikli predĺžením vektorových polí z $J^{(0)}$ kde pôsobia polia typu

$$\vec{V} = \xi(x, y) \partial_x + \phi(x, y) \partial_y$$

lebo len tie budeme vedieť (za predpokladu že ich nájdeme) spustiť naspäť na $J^{(0)}$ a tam prípadne použiť na hľadanie nových riešení a pod.

Teda komponenta Φ^x predĺženého poľa bude $D_x(\phi - \xi y_x) + \xi y_{xx}$, pričom ξ, ϕ závisia od (x, y) a y je na riešeniach funkciou x .

Nezabudnime teda pri derivovaní na funkčné závislosti $\xi(x, y), \phi(x, y), y(x)$. Derivácie budeme označovať spodným indexom.

$$\begin{aligned}
 0 &= \text{pr}^1 \vec{V} F \Big|_{F=0} \\
 &= (\xi \partial_x + \phi \partial_y + \Phi^x \partial_{y_x}) (y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} \\
 &= -2\xi + \Phi^x \\
 &= -2\xi + D_x(\phi - \xi y_x) + \xi y_{xx} \\
 &= -2\xi + \phi_x + \phi_y y_x - \xi_x y_x - \xi_y (y_x)^2 - \xi y_{xx} + \xi y_{xx} \\
 0 &= (-2\xi + \phi_x) + (\phi_y - \xi_x) y_x - \xi_y (y_x)^2
 \end{aligned}$$

V priestore $J^{(1)}$ sa jedná vlastne o polynóm (vo všeobecnosti vo viacerých premenných) rovný nule. Teda každý monóm musí byť nulový zvlášť, a tak získavame tri požiadavky na komponenty $\xi(x, y), \phi(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 (i) \qquad \qquad \qquad & 0 = -2\xi + \phi_x \\
 (ii) \qquad \qquad \qquad & 0 = \phi_y - \xi_x \\
 (iii) \qquad \qquad \qquad & 0 = -\xi_y
 \end{aligned}$$

Posledná (iii) nám hovorí, že ξ nezávisí od y , teda $\xi = \xi(x)$. Ak (i) poderivujeme ešte raz podľa y a (ii) poderivujeme podľa x a zväžíme nezávislosť ξ od y prichádzame k podmienkam

$$\phi_{xy} = 2\xi_y = 0$$

$$\phi_{yx} = 0 = \xi_{xx}$$

Vidno, že ξ je nanajvýš lineárnou funkciou x , a koeficienty nemôžu závisieť ani od y

$$\xi = ax + b$$

Ešte poderivujme (ii) podľa y

$$\phi_{yy} = \xi_{xy} = 0$$

Odtiaľ je jasné, že ϕ je najvyššou lineárnou funkciou y , ale koeficienty ešte môžu byť funkciami x

$$\phi = \alpha(x)y + \beta(x)$$

. Spätným dosadením do (i), (ii) pridáme postupne k nasledujúcemu všeobecnému tvaru pre komponenty hľadaného poľa:

$$\xi = ax + b$$

$$\phi = ay + ax^2 + 2bx + c$$

Teda pole, ktorého predĺženie zachováva diferenciálnu rovnicu $y_x - 2x = 0$ má tvar

$$\vec{V} = (ax + b)\partial_x + (ay + ax^2 + 2bx + c)\partial_y$$

kde a, b, c sú ľubovoľné konštanty. Inak povedané, je lineárnou kombináciou (so spomenutými koeficientami) troch symetrie generujúcich polí

$$\vec{V} = a(x\partial_x + (y + x^2)\partial_y) + b(\partial_x + 2x\partial_y) + c\partial_y$$

Označme si tieto polia $\vec{V}^I, \vec{V}^{II}, \vec{V}^{III}$, a pozrime sa na ne bližšie. Osobitne na to, čo robia s riešením rovnice.

$$\vec{V}^I = x\partial_x + (y + x^2)\partial_y$$

$$\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y$$

$$\vec{V}^{III} = \partial_y$$

V rámci skúšky správnosti skontrolujeme, či predĺženie každého z polí naozaj zachováva plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici $y_x - 2x = 0$, teda či každé spĺňa kritérium infinitezimálnej invariantnosti. Upozorníme tu na fakt, že nájsť predĺženie žiada len aplikovať algoritmus (66), čo je pri teraz už známych komponentách poľa len vec mechanického derivovania.

$$\begin{aligned} \text{pr}^1\vec{V}^I &= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + (D_x(y + x^2 - xy_x) + xy_{xx})\partial_{y_x} \\ &= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + (y_x + 2x - y_x - xy_{xx} + xy_{xx})\partial_{y_x} \\ &= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + 2x\partial_{y_x} \end{aligned}$$

$$\text{pr}^1\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y + (D_x(2x - 1y_x) + 1y_{xx})\partial_{y_x} = \partial_x + 2x\partial_y + 2\partial_{y_x}$$

$$\text{pr}^1\vec{V}^{III} = \partial_y + D_x(1)\partial_{y_x} = \partial_y$$

$$\text{pr}^1 \vec{V}^I(y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + 2x\partial_{y_x}](y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [-2x + 2x] \Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

$$\text{pr}^1 \vec{V}^{II}(y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [\partial_x + 2x\partial_y + 2\partial_{y_x}](y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [-2 + 2] \Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

$$\text{pr}^1 \vec{V}^{III}(y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [\partial_y](y_x - 2x) \Big|_{y_x - 2x = 0} = [0] \Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

Skúška správnosti teda prebehla dobre pre všetky tri polia. Teraz sa pozrime, akú transformáciu (tok) budú robiť na rovine x, y , a konkrétne čo budú ich toky robiť s jedným riešením diferenciálnej rovnice, $y = x^2$.

Podme sa teraz pozrieť na toky $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ indukované poľami $\vec{V}^I, \vec{V}^{II}, \vec{V}^{III}$.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^I = x\partial_x + (y + x^2)\partial_y$ nájdeme inetgráciou jeho komponent

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= x & \frac{dy}{d\epsilon} &= y + x^2 \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = xe^\epsilon \qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = x^2 e^{2\epsilon}$$

Aby sme splnili $y(0) = y$, položíme $y(0) = x^2(0)$. Zrejme funkcia $y = x^2$ bude nejako význačná pre toto pole. Jej graf je integrálnou krivkou, a transformácia indukovaná poľom \vec{V}^I ju zrejme nechá v pôvodnom tvare, ale skontrolujem si to aspoň pre precvičenie:

Inverzná transformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}e^{-\epsilon}$. Dosadíme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= [x(\tilde{x}, \tilde{y})]^2 e^{2\epsilon} \\ &= (\tilde{x}e^{-\epsilon})^2 e^{2\epsilon} = \tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ je naozaj invariantná pri toku poľa \vec{V}^I . Pole \vec{V}^I nám neporuší takéto riešenie diferenciálnej rovnice, ale ani z neho nenájde nič ďalšie.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y$ nájdeme inetgráciou jeho komponent

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= 1 & \frac{dy}{d\epsilon} &= 2x \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = x + \epsilon \qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = y + 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Pozrime ako transformuje graf funkcie $y = x^2$:

Inverzná transformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} - \epsilon$. Dosadíme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= y(x(\tilde{x}, \tilde{y})) + 2x(\tilde{x}, \tilde{y})\epsilon + \epsilon^2 \\ &= (\tilde{x} - \epsilon)^2 + 2(\tilde{x} - \epsilon)\epsilon + \epsilon^2 = \tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ je invariantná aj pri toku poľa \vec{V}^{II} . Ani toto pole \vec{V}^{II} nám neporuší takéto riešenie diferenciálnej rovnice, ale ani z neho nenájde nič ďalšie.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^{III} = \partial_y$ nájdeme integráciou jeho komponent

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= 0 & \frac{dy}{d\epsilon} &= 1 \\ x(0) &= x & y(0) &= y \end{aligned}$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = x \qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = y + \epsilon$$

Pozrime ako transformuje graf funkcie $y = x^2$:

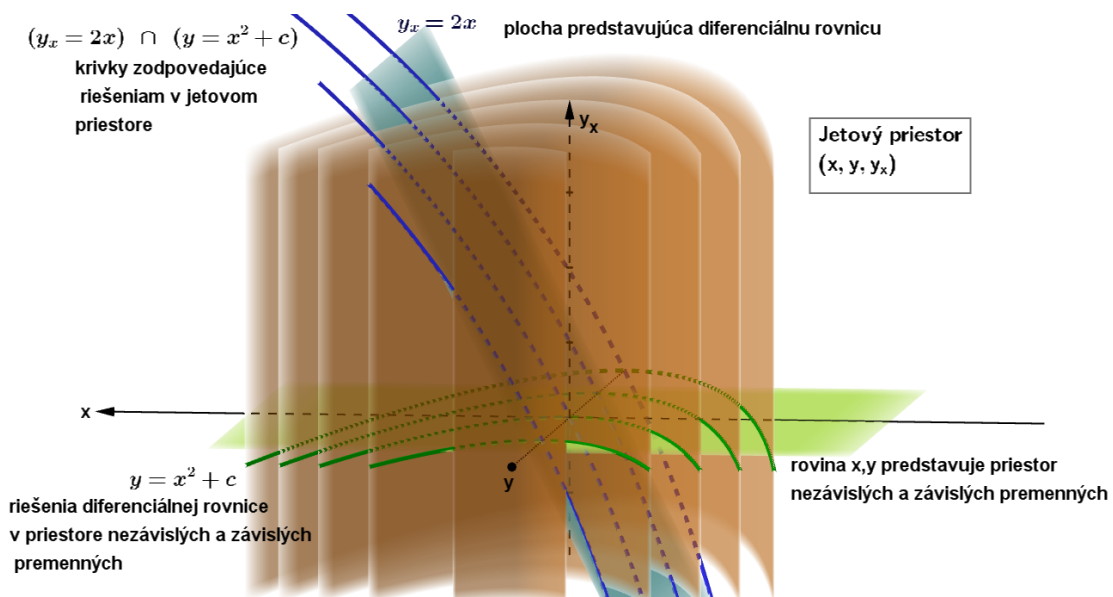
Inverzná transformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je mimoriadne jednoduchá $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}$. Dosadíme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= y(x(\tilde{x}, \tilde{y})) + \epsilon \\ &= \tilde{x} + \epsilon \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ sa pri toku poľa \vec{V}^{III} transformuje nasledovne:

$$y(x) = x^2 \longleftrightarrow \tilde{y}(\tilde{x}) = \tilde{x} + \epsilon$$

Teda ak $y(x) = x^2$ rieši diferenciálnu rovnicu $y_x - 2x = 0$, rieši ju aj $y(x) = x^2 + c$, kde c je konštanta! Stará známa integračná konštanta je teda prejavom istej symetrie. Generátorom je pole ∂_y generujúce posunutia v smere osi y , čo tu dáva naozaj názorný zmysel, keďže naše nové riešenia $y(x) = x^2 + c$ sú oproti pôvodnému riešeniu $y(x) = x^2$ len posunuté v smere osi y .



Obr. 43: Rovnica $y_x - 2x = 0$ ako geometrický objekt v jetovom priestore.

Pozorovanie, že za integračnými konštantami je niečo hlboké, umožňuje precvičiť si na tomto triviálnom príklade metódy, ktoré nadobúdajú omnoho väčšiu užitočnosť tam, kde už vizualizácia a skúsenosť nie sú k dispozícii ako sprievodcovia. Tu celá mašinéria vyznievala ako lov pstruhov harpúnou - ale nakoniec harpúnu treba vziať prvýkrát do ruky dávno predtým, ako sa pustíme za žralokmi.

Použité alebo doporučené zdroje

Peter Olver: *Application of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag New York, 1993

R.F.Riley, M.P.Hobson, S.J.Bence: *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, 2018

R.P. Feynmann, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynmann lectures on physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

dostupné aj online <https://www.feynmanlectures.caltech.edu>

David Tong: *Lecture notes on theoretical physics*

<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html>

Marián Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, 2019