VYBRANÉ KAPITOLY Z FYZIKY EŠTE RAZ

Veronika Gáliková
2024

Tento výber tém z fyziky je predkladaný ako doplnok k základnému kurzu pre technické odbory. Snahou je predložiť témy vo fyzikálnom duchu - je tu menej dôrazu na algoritmické používanie prírodných zákonov v konkrétnych technických aplikáciách a viac na hlbšie zamýšľanie sa nad jednoduchými vecami. Text je tiež zostavovaný s výhľadom na novšie kapitoly, ako relativita a kvantová teória, ktoré majú s klasickou mechanikou spoločné viac, než je často vidieť pri rýchlych prehľadových prezentáciách. Pri zohľadnení týchto kritérií sa môžu dostať do popredia aspekty, ktoré sa v bežnom kurze spomenuli len okrajovo alebo vôbec. Naopak tie, ktoré sú pre technické aplikácie preberané v prvých kurzoch do vyčerpávajúcich detailov, tu môžu byť prakticky vynechané.

Tento projekt získal financovanie z výskumného a inovačného programu EU Horizon 2020 v rámci Marie Sklodowska-Curie Dohody o grante č. 945478.

Obsah

1 Klasická mechanika s výhľadom k zovšeobecneniam

1.1 Popis javov v prírode

Vo fyzike **sledujeme javy** okolo nás, snažíme sa **nájsť v nich nejaký princíp**, odhaliť **pravidlá hry**, korektne ich **sformulovať** a potom ich **konfrontovať s ďalšími pozorovaniami** .
Aký proces sa však skrýva za tak krátkym popisom práce! Ako sledujeme? Ako reprezentujeme pozorované javy v našej mysli či reči? V akom jazyku a ako sformulujeme princípy, ktoré sú za spomenutými javmi? Čo je mierou korektnosti danej formulácie?
Toto nemá byť filozofický traktát, ale než sa človek ponorí kdesi do mora vzorcov a výpočtov, je dobré sa poobzerať, o čo sa vlastne jedná.

1.1.1 Cez filter vnímania a predpokladov

Naše sledovanie javov okolo nás je poznačené našim spôsobom vnímania, spracovania signálov sprostredkovaných našimi zmyslami. Dosah týchto môžeme vylepšiť použitím vhodných prístrojov. Avšak výber a spracovanie informácií je nevyhnutne poznačené spôsobom, akým funguje náš mozog a k dôsledkom tohto faktora nemáme nadhľad z ktorého by sme ich nezávisle posúdili. Môžeme sa snažiť odfiltrovať rozličné subjektívne prvky v pozorovaniach, ale tento faktor do istej miery ostáva. Naša schopnosť objektívneho skúmania prírody je relatívna. Treba robiť čo sa dá. A iste nevyvodzovať z našej subjektivity že nič nie je objektívne.

Čo sa týka reprezentácie javov v prírode v našej mysli, problémom pri snahe o pozorné uvažovanie môže byť práve zdanlivá situácie, množstvo implicitných predpokladov, ktoré už ani ako také nerozoznávame. Nie že by na tom, že máme predpoklady, bolo samo osebe niečo zlé; napriek pseudovedeckým sloganom o tom ako treba nikdy nič nepredpokladať, faktom ostáva, že s nulovými predpokladmi sú nulové výsledky. Ale je dobré sa zamyslieť, čo máme v našej teórii v roli samozrejmých pojmov (napríklad v euklidovskej geometrii to boli priamky, body, uhly, kružnice) a čo ako axiómy o nich (príkladom sú opäť Euklidovské axiómy, napríklad že každé dva body sú jednoznačne prepojiteľné priamkou atď). Potom môžeme robiť rozličné odvodené závery, konfrontovať ich s pozorovaním sveta okolo a prípadne prehodnotiť svoje voľby axiómov. A celý proces opakovať.

1.1.2 Základné/referenčné pojmy a ich matematická reprezentácia.

Zbierame teda pozorovania z reálneho sveta, a pri ich spracovaní v našej mysli si zavádzame základné popisné pojmy ako čas, teleso, poloha. Používame ich často, a pritom máme veľké ťažkosti ich vysvetliť pri tých vzácnych chvíľkach hlbšieho uvažovania alebo rozhovoru s malými deťmi. Čo myslíme pod telesom? Kde je jeho hranica? Patrí k nemu táto hranica? Poloha znamená čo? Je prázdny priestor prázdny pojem? Čo je čas?

Čokoľvek ten čas je, keď z neho aj vlastnej mentálnej kapacity minieme isté kritické množstvo, azda sa pokúsime postupovať ako Euklides a ďalší matematici a uvedomiť si, že nejaké pojmy budú musieť byť v úlohe základných, ktoré sa budú vyskytovať ako dané, referenčné, a ktoré nevieme vysvetliť či popísať, keďže sú najzákladnejšie pomocou ktorých vysvetľujeme alebo popisujeme ostatné. Oprávnenosť takého postupu (osobitne voľbu základného súboru pojmov) potom treba spätne skúmať podľa toho k akým zmysluplným výsledkom povedie.

Naše popisné **pojmy vo fyzike reprezentujeme matematickými objektmi** ako súbory čísel, funkcií, tenzorov, geometrických obrazcov atď. (Napríklad súbor všetkých, hoci aj hypotetických konfigurácií v priestore niekedy modelujeme ako euklidovský priestor; posunutia v tomto priestore ako vektory; trajektórie telies ako krivky v tomto priestore, čas často reprezentujeme ako parameter číslujúci jednotlivé polohy na krivke atď.)

Potom používame veľmi voľný žargón, zamieňajúc reprezentovaný jav s matematickou reprezentáciou. Je to pomerne neškodný folklór - pokiaľ človek nestratí rozlíšenie že jedno je skutočnosť, aj keď poznačená filtrom nášho vnímania, a druhé len akýsi **matematický avatar**, ktorého sme tej skutočnosti priradili aby sme nad ňou mohli rozmýšľať pomocou matematických nástrojov. Použiteľnosť záverov urobených pomocou takýchto avatarov je obmedzená predpokladmi, za ktorých sme priradenie jav - matematický avatar urobili, mierou analógie medzi javom a avatarom atď. Ak sa nejaký avatar dobre osvedčil, máme tendenciu dôverovať mu viac a viac, a ak nakoniec zabudneme, že je len obmedzeným analógom niektorých aspektov reálnej veci, môžeme naraziť na kdejaké paradoxy, ktoré sú prejavom toho, že reprezentovaný jav sa nemusí podobať na avatara vo všetkom len preto, že sa nám podarilo nájsť takého, ktorý vystihuje daný jav v niečom. Reprezentovaný jav je skutočnosť nezávislá od nášho úspechu s hľadaním jeho reprezentácií. Aj obmedzené avatary sú však veľmi užitočné. Treba priznať ich limity, ale aj naše obmedzené možnosti spraviť niečo vo fyzike bez nich.

1.1.3 Pravidlá hry ako axiómy pre matematické objekty. Kritérium správnosti.

Keď si už nazbierame nejaký súbor základných pojmov (s vedomím že ich základnosť možno bude treba neskôr prehodnotiť a nahradiť ich inými), snažíme sa prísť na pravidlá hry prírody. Keďže naše popisné pojmy sú reprezentované ako matematické objekty, treba vzťahy medzi nimi a pravidlá ich hry vyjadrovať tiež matematickými formulami a rovnicami viažucimi dané objekty dohromady. Niektoré z týchto vzťahov bude potrebné postulovať, brať ako základné (ako axiómy v matematických modeloch), a typicky sa z nich potom mnohé budú dať odvodiť.

Potom čo urobíme tento preklad do matematického sveta, je nám k dispozícii tamojšia mašinéria algebry, geometrie, analýzy, diferenciálneho a tenzorového počtu atď, pomocou ktorej prichádzame k rozličným tvrdeniam (stále ešte v matematickom prevedení.) Tieto tvrdenia sa po spätnom preklade do popisných pojmov zavedených pre reálny svet stávajú predpoveďami, ktoré je možno (ak nie, máme problém o ktorom treba niekedy pohovoriť) konfrontovať so skutočnosťou.

Príklad: Na začiatku pozorovania (počiatočný čas reprezentovaný ako konkrétna hodnota premennej t_0) bol meteorit (jeho miera zotrvačnosti reprezentovaná ako konštanta m) tam a tam (údaj rerezentovaný ako nejaký polohový vektor $\vec{r}(t_0)$) - pôsobili naň také a také vplyvy (reprezentované ako súčet silových vektorov reprezentujúcich spomenuté vplyvy $\sum \vec{F}_i$). Podľa našich rovníc ($m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_i$) teraz (v čase t) by mal byť tu a tu (v polohe zodpovedajúcej $\vec{r}(t)$) ... Je to pravda? Teda ak teraz spravíme spätný preklad od avatarov k skutočným objektom, a pozrieme na miesto zodpovedajúce $\vec{r}(t)$, v čase zodpovedajúcom t , nájdeme tam meteorit? Ak áno, náš model *môže* byť dobrý. Ak nie, treba iný. Samozrejme sú tu praktické nuansy - niekedy sme spokojní s približnou presnosťou predpovedí a teda s približným modelom - to je v poriadku, ale nepovažujme ho za fundamentálne korektný.

Táto konfrontácia s pozorovaním/experimentom poskytuje fyzike veľmi silné kritérium na posúdenie teórií, modelov, súborov axiómov... rozhodne silnejšie ako v matematike, kde je ťažko nájsť objektívny dôvod na zahodenie teórie okrem prípadu, že je nekonzistentná sama so sebou alebo je príliš prázdna na to, aby sa s ňou dalo niečo robiť. Ak náš model dáva predpovede, ktoré protirečia korektne prevedenému a interpretovanému pozorovaniu, je model nesprávny. Ak nedáva predpovede konfrontovateľné so skutočnosťou, ako fyzikálny nástroj je zbytočný.

1.2 Časopriestor a predpoklady na priradenie matematických avatarov pre jeho reprezentáciu,

Pozrime sa teraz na niektoré z našich základných pojmov, ktorými popisujeme deje okolo nás.

Jeden z kľúčových je **udalosť**. Niečo sa udeje **niekde a niekedy**. Súbor všetkých, hoci aj hypotetických udalostí tvorí akúsi scenárovú sieť, obvykle ju označujeme ako **časopriestor**. Jeho elementy možno reprezentovať ako adresy udalostí. Na identifikáciu takej adresy typicky potrebujeme 3 priestorové a 1 časový údaj, preto často počujeme hovoriť o 4 rozmernom časopriestore. Netreba však v tomto pojme vidieť niečo exotického vyžadujúceho geniálnu predstavivosť. Zaviesť takýto 4D model má za účel len uľahčiť narábanie s údajmi, no a ak ku každej udalosti potrebujeme 4, používame matematický nástroj, aký sa k tomu hodí.

Teraz sa venujeme newtonovskej mechanike, kde je čitateľ pravdepodobne zvyknutý uvažovať **polohy telies v trojrozmernom konfiguračnom priestore**, a **zmeny týchto polôh** v čase, a teda vidieť **čas** ako univerzálny parameter, zoraďujúci udalosti pozdĺž **trajektórie** (krivky v konf. priestore). Nič nám však nebráni už tu, na úrovni newtonovskej mechaniky, uvažovať ako scénu časopriestor, teda (keď si zavedieme vzťažnú sústavu) parameter povýšiť na ďalšiu súradnicu. Často totiž môže mať zmysel uvažovať nielen trajektóriu telesa, (množinu polôh kde sa vyskytlo), ale celú jeho **históriu (svetočiaru)**, teda množinu udalostí ktorých sa zúčastnilo.
Výraz časopriestor majú ľudia často spojený s einsteinovskou relativitou, ale ako množinu (aspoň hypotetických) udalostí má zmysel aj v newtonovskej fyzike. Je to nástroj na kompaktné uchopenie dát. Avšak každý pozorovateľ vníma priestor okolo seba trojrozmerný, s časom ako parametrom zoraďujúcom tieto trojrozmerné momentky do celkovej histórie. [1] Trojrozmernosť konfiguračného priestoru je hlboký empirický fakt, ktorý je do modelu mechaniky zabudovaný ako predpoklad. Na otázku prečo je trojrozmerný súčasná fyzika odpovedať nevie.

Poďme sa teda pozrieť najprv na nejaký vhodný model pre náš konfiguračný priestor. Nemusíme nasilu znova vynachádzať koleso - vieme, že na **reprezentáciu polôh telies a ich trajektórií** sa ako veľmi efektívny nástroj ukazujú **geometrické útvary** ako body, priamky, krivky… Vezmime teda geometrický model, alebo aspoň prvky z neho, a pozrime kam vedie. Premyslime však priradenie základných pojmov v mechanike veľmi pozorne - akokoľvek samozrejmé sa všetko zdá. Máme totiž tendenciu zamieňať si zvyk a pochopenie, čo je problém, pretože príroda sa lepšie študuje s postojom malého dieťaťa ktoré je síce viac ako ochotné narábať s pojmami ktoré momentálne nevie uchopiť inak ako dané, ale zvyk ho ešte nenaučil predstierať ich samozrejmosť.

Fyzika je tanec medzi teóriou a praxou, a na pojmy ktoré nemajú miesto v oboch sa pozeráme ako na málo preskúmané alebo pochybné. Poďme skontrolovať ako je to s naším používaním geometrických pojmov ako reprezentantov pre rozličné konfiguračné záležitosti potrebné na popis mechanických dejov. Nepredpokladajme automaticky euklidovskú geometriu, ale neškodí pripomenúť si ju ako všeobecne známy prípad na ktorom sa mnohí zoznamujú s geometrickými pojmami. Táto známa geometria predpokladá existenciu základných objektov ako bod a priamka. Máme v našom priestore niečo čo by mohli reprezentovať? Polohy telies by mohli byť reprezentované euklidovskými bodmi, ich spojnice segmentami ktoré sa podľa Euklidových postulátov dajú (jednoznačne) predĺžiť na priamku. Tu je však čas konfrontovať sa s realitou. Zamyslime sa tu nad predpokladmi ktoré robí newtonovská fyzika (jednak aby sme lepšie rozumeli jej, a aby neskoršie zovšeobecnenia či korekcie novších teórií bolo s čím porovnať).

Bod môžeme vnímať v mechanike ako miesto kde sa môže nachádzať dostatočne malé teleso. Čo značí dostatočne malé? Mamut také kritérium spĺňa menej ako tiger a tiger menej ako mucha… Matematik by azda navrhol uvažovať limitne malé teleso. Ale tu treba brať ohľad na overiteľnosť experimentom. Teda bod bude reprezentovať polohu malého telesa, ale dosť veľkého aby sme ho ešte videli [2]. Pre terajšie účely nám stačí takáto **aproximácia bodovosti**. Pamätajme si však pre budúcnosť, že naše závery urobené na jej základe potom netreba automaticky zovšeobecňovať na situácie keď nie je aktuálna.

[1] To platí mimochodom aj pre neskoršie teórie ako relativita. Nikde sa nenájde pozorovateľ z ktorého hľadiska konfiguračný priestor nie je 3D a kde by čas nehral výrazne inú rolu ako priestorové rozmery. Ak však chceme dávať do súvisu takéto skúsenosti rozličných pozorovateľov, ukazuje sa ako vcelku efektívny model 4-rozmerný model s časom ako jedným z rozmerov - nie však "len ďalším rozmerom ako ostatné ".

[2] aparátom aký máme k dispozícii, nie nevyhnutne voľným okom - a prísne vzaté nejde nevyhnutne ani o optické videnie, ale o nejakú **detekciu polohy**

Poďme k **spojnici** medzi dvomi malými telesami, čo by korešpondovala euklidovskému segmentu predĺžiteľnému na priamku. Ktorú spojnicu vybrať? Medzi dvomi telesami ich je mnoho - je nejaký dôvod uprednostniť jednu pred ostatnými? Možno sa nám chce povedať, že tú najrovnejšiu, tváriac sa, že vieme o čom hovoríme (kým a nepokúsime vysvetliť kde sme vzali prvotný štandard, prvé rovno). Pozor - ešte len hľadáme čo bude v našom priestore zodpovedať častiam priamok, teda štandardom rovných segmentov. Povedať že rovnú úsečku nájdeme ako rovnú úsečku úlohu nerieši.

Skúsime teda vybrať najkratšiu spojnicu. Teraz však treba konfrontovať otázku, čo tým myslíme, najkratšiu? Potrebujeme si ujasniť ako **meriame dĺžky,** a aké predpoklady a obmedzenia s ním vstupujú do hry: Vezmeme nejaké teleso ako **štandard jednotkovej dĺžky**, postupne ho prikladáme pozdĺž spojnice a počítame koľkokrát sa tam vojde. Náš štandard dĺžky by mal byť dostatočne malý, aby meranie bolo dostatočne jemné, ale zas nie natoľko, žeby sme ho technicky nevedeli zrealizovať. Takisto tu je potichu urobený predpoklad, že existuje nejaká trieda objektov, ktorých dĺžku budeme považovať za konštantnú a budú použiteľné ako meracie jednotky.

Povedzme že máme vybranú najkratšiu spojnicu. Dá sa táto jednoznačne predĺžiť tak, že objekt takto vzniknutý bude dobre reprezentovaný euklidovskou **priamkou**? [3] Tu si ťažko pomôžeme výberom najkratšej možnosti, a musíme si na zoznam úloh pridať **nájdenie nejakého kanonického štandardu prvého rovno**.

Ďalším dôležitým pojmom je **pohyb, zmena polohy v čase**. Súbor polôh v danom časovom intervale potom tvorí tzv. (časom) **parametrizovanú trajektóriu**. Ku každému času z daného intervalu vieme priradiť polohu, ktorú v ňom teleso malo. Keďže v dejoch okolo nás nevidíme skoky v zmysle že teleso by zmenilo polohu z jedného miesta na iné bez toho, aby sa vyskytlo aj na (niektorej) spojnici medzi nimi, sú **trajektórie reprezentované súvislými krivkami**. Blízkym bodom na trajektórii prislúchajú blízke hodnoty parametra - času. Podiel vzdialenosti bodov ku príslušnému časovému úseku, za ktorý sa teleso presunulo z jedného do druhého, však nemusí byť konštantný. Než sa však pustíme do pojmov ako rýchlosť zmeny polohy, uvedomíme si že **meranie času** nie je o nič samozrejmejšie ako meranie polohy.

Potrebujeme nejaký **prototyp hodín** - jedno ich tiknutie bude najmenšou jednotkou času, teda nemá zmysel tváriť sa, že vieme bezpečne merať čo a ako sa deje na kratších intervaloch. Ďalej, tiknutia prvotných, štandardných hodín sú z definície rovnomerné - intervaly medzi nimi sú rovnaké. Rovnomernosť ostatných dejov sa bude posudzovať na základe porovnania s naším kanonickým štandardom. Na zoznam úloh pribúda **nájdenie štandardu prvého rovnomerna**.

Zhrnutie: polohy malých telies sú reprezentované bodmi, treba si pamätať že veľmi malé teleso stále nie je nekonečne malé teleso. Dĺžky meriame pomocou nejakých limitne malých (opäť, to nemusí byť vo fyzike to isté ako nekonečne malých) telies predstavujúcich štandard dĺžky, z definície konštantnej a najmenšej možnej o akej sa ešte dá relevantne hovoriť ako o merateľnej. Aby slovo priamočiaro malo zmysel, budeme potrebovať nájsť prototyp prvého rovno. Čas meriame pomocou nejakého objektu, ktorý umožňuje odčítanie cyklov, teda napr. podlieha periodickému deju. Jeden cyklus predstavuje jedno tiknutie. Doba jedného cyklu je najmenšia merateľná, hovoriť o kratších vedie k experimentálne neoveriteľným tvrdeniam. Budeme potrebovať kanonický štandard/ prototyp rovnomerna, teda proces vyznačujúci za sebou nasledujúce rovnaké časové úseky.

Poznámka: Dali sme si za úlohu *nájsť* referenčné štandardy "rovno, rovnomerne". Nemôžeme si ich *zvoliť*? Newtonovskýá mechanika to naozaj tak robí, niečo za také štandardy jednoducho

[3] Keďže svet okolo nás berieme ako skutočný a geometrický model ako avatar, formulujeme veci takto krkolomne - že nejaká časť priestoru je reprezentovaná priamkou, a nie že reprezentuje priamku. Časom možno túto pozornosť k terminológii stratíme, ale je dobré mať myšlienku za ňou na mysli.

postuluje. Voľba je súčasťou modelu. Nutnosť voľby však neznačí *zmysluplnosť* hociktorej. Vo fyzike je korektnosť modelu a teda aj spomínanej voľby posudzovaná podľa toho, či potom predpovede takého modelu súhlasia s pozorovaním prírody. **Model si volíme v zmysle, že sa snažíme uhádnuť taký, ktorého predpovede sa s pozorovaním zhodnú čo najlepšie.**

1.3 Vzťažná sústava - Ako popísať objektívne veci so subjektívnym aparátom

Už sme si povedali o scéne a jej reprezentácii kvalitatívne. Pozrime sa teraz na spôsob, ako veci skvantitatívniť, **priradiť čísla**. Výhodou takého priradenia je silná matematická mašinéria na manipuláciu s číslami, ktorá nám je potom k dispozícii, ak pravda vieme čo ktorá operácia v matematickom svete reprezentuje v tom skutočnom. Pri tomto priraďovaní čísel si treba uvedomiť, že môže existovať viac spôsobov ako ho urobiť. Nakoniec jedná sa o pomenovávanie, vytváranie systému adries napr. pre polohy telies.

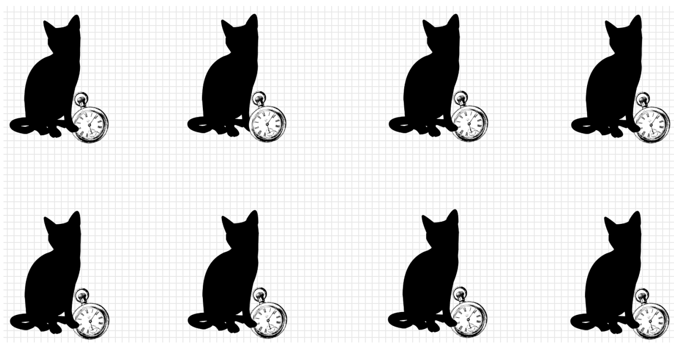
Samotné **označenie udalostí** v časopriestore je v podstate možné robiť akokoľvek, pokiaľ platí že meno-udalosť je jedno-jednoznačné priradenie. Podobne ako keď číslujeme domy v ulici - stačí ak každý dom má svoje jedinečné číslo, a je možné toto číslo použiť ako reprezentanta domu v katastrálnych záznamoch atď. Ale kto kedy hľadal nejaký dom v ulici kde pomenovávanie domov bolo urobené s len minimálnou požiadavkou jednoznačnosti, asi pripustí, že to nie je najpraktickejší spôsob. Omnoho ľahšie sa nám orientuje ak blízke domy majú blízke čísla. Ak vidíme že dom s číslom 17 susedí s domami číslo 4 a 56, ťažko sa nám odhaduje o koľko domov ďalej je číslo 18. Podobne mená pre konfigurácie v priestore a čase je vhodné voliť tak, aby tie čo sú si bližšie, mali podobné mená. Miera blízkosti je samozrejme pojem ktorý treba v modeli premyslieť (matematik sa s nami nebude baviť v tomto ohľade, kým nevie aká miera je v modeli), ale minimálne požiadavka na nejaký **systematický aparát pri pomenovávaní** prvkov je azda evidentná.

Obvykle tento aparát budujeme referenčným spôsobom. Ak niekomu hovoríme, ako sa dostane trebárs do parku, používame pojmy ako doprava, doľava, sto metrov, atď, a žiaden z nich sám osebe nemá jasný zmysel, minimálne implicitne rozumieme že doprava a doľava sa myslí pri konvenčne orientovanej chôdzi tvárou smerom kam ideme, vzdialenosť sa určuje od niečoho… Hľadáme teda čo najefektívnejší **referenčný systém** - dostatočne bohatý aby sme popísali veci jednoznačne, a dosť úsporný na to aby nás nezahltili závislé dáta (odvoditeľné z ostatných). Ako sme už spomínali, v priestore v ktorom žijeme zisťujeme je najúspornejší referenčný systém na určenie polohy nám umožňuje určiť polohu telesa pomocou troch nezávislých údajov - priestorová adresa má tri údaje. Časová zložka adresy udalosti jeden. Aj systematické priradenie adries však **rôzni pozorovatelia** môžu urobiť rôzne.

Obr. 1: Vzťažné sústavy sa dajú vybrať rozlične.

Je možné, že niektoré voľby sú v nejakom zmysle lepšie ako iné, ale treba si rozmyslieť, na základe akého kritéria to budeme posudzovať. Príroda sa nebude prispôsobovať nášmu vkusu, a naše kritériá pre efektívnosť jej popisu by mali nejako odrážať jej preferencie, nie naše.

Než sa pustíme do diskusie vzťažnej/referenčnej sústavy, venujme ešte poznámku pojmu príslušného **pozorovateľa** ktorému je daný referenčný systém šitý na mieru. Vo fyzike pod pozorovateľom nemyslíme len nejakého fiktívneho či reálneho jednotlivca, ale obvykle sa myslí *centrálny pozorovateľ spolu s mysleným systémom jeho komplicov-agentov rozostavených v celom priestore.* Centrálny pozorovateľ je ten, pre ktorého sú dané priestorové súradnice našité na mieru v zmysle, že udalosti v jeho histórii majú v týchto súradniciach najjednoduchšie možné vyjadrenie - všetky sa dejú v priestorovom počiatku (jeho pozícia *definuje* počiatok) a sú jednoducho zoradené, očíslované tikmi jeho hodiniek (jeho vlastný čas je zároveň súradnicový čas pre celý systém).



Obr. 2: Synchronizovaní agenti súradného systému

Agenti prislúchajúci k tomuto centrálnemu pozorovateľovi sú vzhľadom na neho v pokoji, majú s ním zosynchronizované hodiny, pri každom sa dá určiť trojica čísel označujúca jeho polohu vzhľadom na centrálneho jedinca. Čokoľvek, kdekoľvek a kedykoľvek sa stane, je to v bezprostrednej blízkosti jedného z agentov. Pozícia tohto agenta bude zároveň pozíciou udalosti, čas na agentových hodinkách jej časom. Centrálny pozorovateľ má takýmto spôsobom možnosť pozbierať dáta o každej udalosti - priradiť jej konzistentným spôsobom štvoricu čísel.

Pre neskoršiu referenciu si ešte ujasnime aké predpoklady sme použili pri úvahách o vzťažnej sústave daného pozorovateľa. *Predpokladáme, že agent stojaci jednotkovú vzdialenosť od centrálneho jedinca ostáva v jednotkovej vzdialenosti, že je vzhľadom na centrálneho stále v pokoji, že hodinky na rôznych miestach je možné konzistentne zosynchronizovať, že zosynchronozované ostanú, a že všetko toto sa v princípe dá zabezpečiť.* V newtonovskej mechanike sa toto predpokladá, aj pokračujeme s týmito predpokladmi, a naše závery sú urobené pod nimi. (Poznámka do budúcna, k novším modelom vo fyzike: Ak sa niekedy objaví dôvod predpoklady spochybniť, aj naše závery bude potrebné prehodnotiť.)

Zatiaľ sme ešte nehovorili o tom, či niektorí pozorovatelia sú nejakým spôsobom význační. Necháme každého rozostaviť si agentov a synchronizovať hodiny, a potom s pomocou Newtonových zákonov urobíme výber významnej triedy pozorovateľov.

Pozrime sa, akým spôsobom môže pozorovateľ priradiť udalostiam identifikačné čísla. Pozorovateľ vie, že priestor je trojrozmerný, pokryje ho teda **sieťou s tromi triedami súradnicových kriviek**. Každá taká krivka je charakteristická tým, že body na nej majú spoločnú hodnotu jednej so súradníc. Príkladom je kartézska sieť, sieť sférických súradníc, atď. Požiadavky na tieto krivky sú zatiaľ dosť voľné - každým bodom priestoru by sa mala prechádzať práve jedna súradnicová krivka z každej triedy. Bodu teda možno priradiť tri súradnice podľa súradnicových kriviek ktorých uzol tvorí. Predbežne nazvime tieto súradnice q_1, q_2, q_3. Blízke body by mali mať blízke hodnoty súradníc. V každom uzle kde sa stretajú súradnicové krivky si môžeme v princípe predstaviť agenta, ktorý na danom mieste zotrváva, s identickými hodinkami ako má centrálny pozorovateľ. *Newtonovská mechanika prepokladá, že hodinky raz synchonizované ostávajú synchronizované* (úvahy o vybitých baterkách atď možno odložiť bokom, keďže tieto veci sa v princípe dajú technicky zabezpečiť).

Keďže naše požiadavky na pozorovateľa boli veľmi voľné, existuje veľké množstvo veľmi rozličných volieb súradných sústav. Rozliční pozorovatelia dokonca nemusia byť jeden voči druhému v pokoji, zatiaľ sú v hre aj pozorovatelia, ktorí sa nezhodnú na počiatku súradnej sústavy, na súradnicových krivkách, dokonca na tom či nejaké pozorované teleso mení alebo nemení svoje priestorové súradnice a akým tempom či spôsobom, keďže samotní pozorovatelia aj s celým svojim dvorom agentov sa jeden voči druhému môžu pohybovať. *V newtonovskej mechanike je však urobený predpoklad, že časové rozdiely medzi udalosťami namerajú všetci pozorovatelia rovnako.* Mnoho zdanlivo samozrejmých záverov je poznačených týmto prepokladom a ak by sa ukázal ako nevhodný, všetky by bolo treba prehodnotiť.

Pozorovateľ môže sledovať nejaké teleso a jeho históriu, a vo svojej vzťažnej sústave mu v každom okamihu t priradiť aktuálnu trojicu priestorových súradníc q_1, q_2, q_3. Môže skúmať ako sa tento súbor údajov mení v čase, teda skúmať trojicu funkcií $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$, skrátene $q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Môže sledovať zmeny jednotlivých súradníc za časový interval Δt, teda veličinu $\frac{q_i(t+\Delta t)-q_i(t)}{\Delta t}$, prípadne zmenu tejto zmeny atď, hľadať súvislosti medzi nimi a okolím telesa, jednoducho snažiť sa prísť s pravidlami hry. Azda nie je nemiestne očakávanie, že ten pozorovateľ, ktorého význačné krivky (súradnicové) budú zároveň význačnými krivkami prírody, bude odmenený osobitne jednoduchým vyjadrením týchto pravidiel.

1.4 Newtonove zákony mechaniky

Newton sa pokúsil uhádnuť pravidlá hry v troch pohybových zákonoch. Podaril sa mu veľmi užitočný model - predpovede urobené na jeho základe majú skvelú zhodu s pozorovaním. Nie kompletnú, očividne je to model s limitami, ale nakoniec nemáme žiaden ktorý by limity nemal - minimálne vo forme predpokladov a teda dosahu na nejaké situácie.

Pohybové zákony v newtonovskej mechanike sú formulované ako platné pre tzv. inerciálnych pozorovateľov. Inerciálny pozorovateľ je taký, v ktorého sústave všetky Newtonove zákony platia.

To znie ako do seba zacyklené tvrdenie. Zákony nárokujúce si platnosť v prípadoch, v ktorých platia, predsa platia v daných prípadoch z definície. Čo však nie je triviálne je **existencia** takých prípadov! Akonáhle sa nájde aspoň jedna inerciálna sústava, máme spolu so zákonmi aj ich enormnú predikčnú silu a okrem toho celú triedu inerciálnych vzťažných sústav ekvivalentných tej aspoň jednej. O tom však neskôr.

Praktický význam Newtonových zákonov závisí od toho, či sa teda oná aspoň jedna inerciálna sústava nájde. Prísne vzaté nikdy sme nezrealizovali žiadnu dokonale inerciálnu, ale pokiaľ je teória rozumne stabilná, často platí, že aspoň približne splnený predpoklad znamená aspoň približnú uplatniteľnosť teórie a jej predikčnej sily. Toto platí aj v tomto prípade. Človek nemusí mať newtonovsky ideálnu inerciálnu vzťažnú sústavu na úspešné použitie newtonovskej mechaniky pre bežné technické aplikácie (alebo trebárs aj tie menej bežné ako exkurzia na Mesiac). Samozrejme ostáva otázka principiálnej platnosti či existencie, ktorej sa treba vážne venovať ak chce človek pochopiť veci do hĺbky a prípadne ich zovšeobecniť, a k tomu sa ešte bude treba vrátiť.

Ak uvažujeme tuhé teleso ktoré sa nedrobí, teda nestráca hmotnosť strácaním svojich častí (ako by to bolo napríklad v prípade rakety vypúšťajúcej zvyšky paliva), **Newtonove zákony** pre jeho pohyb sa dajú zhrnúť nasledovne:

1. **Teleso sa pohybuje rovnomerne priamočiaro (špeciálny prípad: zotrváva v pokoji) pokiaľ vonkajšie sily tento stav nezmenia.**
2. **Teleso hmotnosti m získa pôsobením celkovej vonkajšej sily $\vec{F}$ zrýchlenie $\vec{a}$ úmerné pôsobiacej sile a nepriamo úmerné svojej hmotnosti; $\vec{a} = \vec{F}/m$.**
3. **Pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné; telesá sa seba pôsobia rovnako veľkými, opačne orientovanými silami**

1.4.1 Miera zotrvačnosti -hmotnosť

Hmotnosť m je jedným z veľmi hlbokých pojmov ktorých význam sa možno ešte celkom nedocenil. Povedzme si aspoň niečo o roli akú tu hrá. Hmotnosť, o ktorj je tu reč, je tzv. **zotrvačná hmotnosť**. Je mierou neochoty nadobúdať zrýchlenie (meniť rýchlosť) za pôsobenia externých síl. Dá sa na ňu pozerať aj ako na interakčnú, silovú kapacitu (nepoužívaný termín) - súvisí s tým, koľko sily treba investovať, aby sa rýchlosť zmenila. Čím je táto kapacita väčšia, tým menšie odchýlky má pohyb od rovnomerného priamočiareho aj za pôsobenia vonkajších síl.

1.4.2 Miera pohybu - hybnosť

Newtonove zákony hovoria o pohybe, zotrvačnosti a interakcii. Veličina, ktorá s tými to pojmami bytostne súvisí, je miera pohybu, **hybnosť** $\vec{p}$. Je to akýsi pohybový status, tu definovaný ako súčin hmotnosti m a rýchlosti $\vec{v}$, teda $\vec{p} = m\vec{v}$ Jej konkrétna hodnota v našej vzťažnej sústave, pokiaľ je konštantná, je jednoducho status quo podobne ako by konštantná poloha bola jednoducho status quo keby bolo teleso voči nám v pokoji. Nakoniec ak je naša sústava inerciálna, existuje k nej iná, s našou rovnoprávna, vzhľadom na ktorú toto teleso *je* v pokoji. Jediný dôvod nezachovať toto pohybové status quo je nejaký externý vplyv, o čom hovorí druhý zákon (uvažujeme tu konštantnú hmotnosť):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teda zmena hybnosti v čase je vyvolaná externou silou. Tretí zákon rehabilituje **zachovanie hybnosti** aj pre prípad interakcie, ak sa vezme do úvahy **celý interagujúci systém** [4]. Ak teleso A pôsobí na teleso B silou $\vec{F}$, zmení sa hybnosť B podľa

$$\frac{d\vec{p}_B}{dt} = \vec{F}$$

Podľa tretieho zákona B pôsobí na teleso A silou $-\vec{F}$. Hybnosť A sa tak zmení ako

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\vec{F}$$

Zmeny hybnosti sa práve vykompenzujú v rámci celého systému telies A, B.

$$\frac{d\vec{p_A}}{dt} = -\frac{d\vec{p_B}}{dt}$$

Okrem iného to znamená, že ich spoločné ťažisko sa ich vzájomnou interakciou neodkloní od rovnomerného priamočiareho pohybu. Špeciálne, ak sa jedná o telesá rovnakej hmotnosti na začiatku v pokoji, pôjdu od seba rovnako veľkými rýchlosťami.

$$m_A\frac{d\vec{v_A}}{dt} = -m_B\frac{d\vec{v_B}}{dt}$$

[4] Napríklad ak ako skúmaný systém vezmeme kameň vrhnutý v gravitačnom poli Zeme, jeho hybnosť sa zjavne počas letu nezachováva, ale sa mení (v súlade s druhým zákonom) - veď pôsobí externý vplyv, príťažlivosť Zeme. Ak však vezmeme ako systém kameň aj Zem, ich celková hybosť sa zachováva - kameň síce zrýchľuje smerom k Zemi, ale aj Zem ku kameňu (pomer ich zrýchlení je prevrátený pomer ich hmotností).

(m_A, m_B sú hmotnosti, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ rýchlosti telies A,B)

1.4.3 Symetria ako znak význačného postavenia

Newtonove zákony sú formulované pre vzťažné sústavy v ktorých je **zotrvačnosť homogénna a izotropná**. V týchto poznámkach budeme takéto sústavy volať **inerciálne**.

Súvis prvého zákona a homogenity: Pohyb rovnomerne priamočiaro je spojený s rovnocennosťou oblastí priestoru ktorými teleso prechádza (ak nepôsobí vonkajšia sila). Zotrvačnosť je homogénna a teleso pokračuje v rámci svojho pohybového stavu v danej vzťažnej sústave. Samotná zmena miesta mu nedáva dôvod na zmenu hybnosti, veď tieto miesta sú ekvivalentné z hľadiska zotrvačnosti - kamkoľvek teleso príde, príde tam s rovnakou zotrvačnou hmotnosťou, a pre zachovanie pohybového stavu teda musí zachovať svoju rýchlosť (ak externé vplyvy nevyžadujú uplatnenie zvyšných zákonov).

Súvis druhého zákona a izotropie v zmysle rovnocennosti smerov: Zmena hybnosti má smer ako pôsobiaca externá sila, a veľkosť tejto zmeny za daný časový interval je daná veľkosťou pôsobiacej sily. Nepozorujeme, že by niektoré smery boli samy osebe privilegované a sila pôsobiaca v nich by mala na zmenu hybnosti väčší efekt. Na jednotkovú zmenu hybnosti kdekoľvek do ktoréhokoľvek smeru treba rovnako veľkú silu.

Súvis tretieho zákona a izotropie priestoru v zmysle rovnocennosti orientácie: Ak trebárs interagujúce telesá na seba pôsobia odpudivo, vzďaľujú sa od seba pozdĺž priamky, povedzme že A doprava a B doľava. Hybnosť častice idúcej doprava a hybnosť častice idúcej doľava sú rovnako veľké a tak sa kompenzujú, ani jedna z orientácií nemá väčšiu váhu či preferenciu.

Význačné vzťažné sústavy sa vyznačujú tým, že základné pojmy sa v nich sú spojené s vysokou **symetriou**. Toto je **znak osobitného postavenia** naprieč disciplínami fyziky - symetrie sú čosi ako diplomatický pas, ale majú objektívnejší základ a stabilnejšie trvanie. Samozrejme navrhnúť si vysoko symetrický model nestačí - treba sa trafiť do správnych symetrií. Správnosť posudzujeme na základe toho, či náš model vybavený danými symetriami dáva predpovede súhlasiace s experimentom či pozorovaní. Voľne to niekedy formulujeme ako uhádnutie symetrie, ktorú preferuje príroda.

Keďže symetria súvisí s tým, že na **niečom nezáleží z hľadiska niečoho iného na čom záleží**, niekedy máme tendenciu ju prehliadnuť. Napríklad v druhom zákone vec, na ktorej záleží, je vzťah medzi silou a zmenou hybnosti. Na čom nezáleží je smer (nie v zmysle že sily všetkých smerov sú ekvivalentné, ale že všetky smery sú ekvivalentné pre *vzťahy* medzi silami v nich a nimi vyvolanými zmenami hybností). Keďže však táto ľahostajnosť sa prejavila nešpecifikáciou smerov, je ľahké si ju nevšimnúť. Môže sa zdať že ide o akési filozofické dumanie - ale úvahy o symetriách sa ukázali ako veľmi silný zdroj nápovied vo fyzike, so silným potenciálom posunúť teóriu ďalej. Ďalej posunutá teória vo fyzike máva merateľné dopady (ak nie, nepovažuje sa za posunutú) - a praktické použitie veľmi často potom tiež nebýva ďaleko.

V kapitolách ako relativita, gravitácia, kozmológia, kvantová teória hrajú symetrie veľkú rolu. Aj kvôli nim je dobré naučiť sa symetrie rozoznávať na známejšej pôde newtonovskej mechniky. Niekedy sa pritom ukáže, že sme aj v tej známej pôde prehliadli viac ako zahliadli.

1.4.4 Prvý zákon a štandard pojmov rovno a rovnomerne

Pri povrchnom uvažovaní by sa mohlo zdať, že prvý zákon je len špeciálny prípad druhého. Veď ak vezmeme prípad nulovej sily $\vec{F} = \vec{0}$, druhý zákon nám hovorí že zmena hybnosti v čase je nulová, teda že hybnosť je konštantná. V prípade konštantnej hmotnosti to znamená konštatnú rýchlosť.

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{v} = \text{konst}$$

A tá predsa patrí k rovnomernému priamočiaremu pohybu, k pokoju v špeciálnom prípade nulovej rýchlosti. Treba teda osobitne aj prvý zákon? Treba, lebo bez neho by druhý nemal jasný význam. Spomeňme si na úvodné úvahy o potrebe štandardu pojmov rovno a rovnomerne. Prvý zákon netreba čítať tak veľmi ako popis toho čo voľné teleso robí, ale ako ***definíciu*** **rovnomerného priamočiareho pohybu.** Je to návod na výrobu štandardu.

Trajektórie voľných telies *definujú* priamky. Tempo, ktorým také telesá postupujú, *definuje* rovnomerné tikanie hodín. Rovnomerne tikajúce hodiny sú tie, pre ktoré na rovnaký kus prejdenej dráhy pripadne rovnaký počet tiknutí.

Aby pozorovateľ bol inerciálny, a s možnosťou používať druhý zákon ako trojicu diferenciálnych rovníc pre súradnice interagujúcich telies, musia byť v jeho vzťažnej sústave **parametrické vyjadrenia súradníc voľného telesa pozdĺž trajektórie lineárnymi funkciami času**.
($q_i(t) = \alpha t + \beta\,,\ \alpha, \beta = \text{konst} \rightarrow\ \ddot{q}_i = 0$. Nutná podmienka.)

Až keď vieme čo je **rovnomerne priamočiaro**, môžeme zmysluplne hovoriť o **odchýlkach** od tohto štandardu, o ktorých potom pojednáva druhý Newtonov zákon.

Ešte tu upozornime na spôsob ako trochu skomprimovať terminológiu (neskôr sa vec azda ukáže ako ešte užitočnejšia): **Rovnomerne priamočiaro v priestore je priamočiaro v časopriestore.** "Rovnomerne priamočiaro"popisuje trajektóriu a jej parametrizáciu. Priamočiaro hovorí o tvare priamky (vezmi trajektóriu voľného telesa - množinu bodov kde sa vyskytlo: taký tvar majú priamky v našom konfiguračnom priestore). Rovnomerne hovorí o parametrizácii (vezmi rovnako dlhé úseky na trajektórii - príslušné prírastky parametra (časové intervaly) sú definované ako rovnako dlhé - takto rovnomerne plynie čas).

Ak parameter t pridáme ako ďalší rozmer našich dát, uvažujeme teda časopriestor (každý bod predstavuje adresu potenciálnej udalosti, kedy a kde), potom možno hovoriť o geometrických vlastnostiach **svetočiary (histórie)**, nielen **trajektórie (priestoročiary)**. Trajektória sa dá v newtonovskej mechanike chápať ako projekcia z priestoročasu do priestoru.

Potom to, čo sa pre **parametrizovanú krivku v priestore volalo rovnomerne priamočiaro, sa v časopriestore pre prislúchajúcu svetočiaru volať iba priamočiaro**, keďže parameter dostal tiež status súradnice a jeho rovnomerný prírastok už je aj geometricky popísateľný ako rovno v príslušnom (časovom) smere.

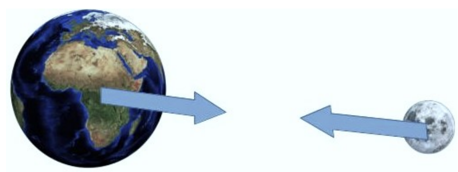
1.4.5 Druhý zákon a pojem sily

V prípade druhého zákona si treba ujasniť istý kruhovo-pojmový problém. Pôsobiaca sila je rovná časovej derivácii hybnosti systému, na ktorý pôsobila. Pre použiteľnosť druhého zákona na predpovede o systéme treba toto tvrdenie **doplniť nejakou ďalšou informáciou o sile**, inak by sa dal druhý zákon chápať nanajvýš ako definícia sily, ako skráteného označenia časovej derivácie hybnosti. Ak nepoznáme hybnosť ako funkciu času $\vec{p}(t)$ a chceli by sme ju poznať, je potrebné dosadiť do rovnice známu pôsobiacu silu a dopočítať diferenciálnu rovnicu. Alternatívne, druhý zákon sa dá použiť aj na štúdium síl - sledujeme pohyb telesa, teda poznáme $\vec{p}(t)$, a zo zmien zakódovaných v jej časovej derivácii $\partial_t \vec{p}$ zisťujeme informácie o silách, ktoré zmeny spôsobili. Avšak bez poznania buď sily ako funkcie času alebo hybnosti ako funkcie času je pre nás zákon na predpovede nepoužiteľný.

1.4.6 Tretí zákon a pôsobenie na diaľku

Najprv adresujme fakt, že **akcia a reakcia** podľa newtonovskej mechaniky sú rovnako veľké, opačne orientované, ale keďže **pôsobia na rôzne telesá**, neznamená to že sa skompenzujú v zmysle že by sa žiadne pôsobenie nedialo.

Tretí zákon, ako sme už spomínali, **rehabilituje zachovanie hybnosti** - ak počítame hybnosť v rámci celého systému interagujúcich telies . Ak máme dve telesá čo na seba pôsobia, ani pre jedno z nich osobitne sa hybnosť nezachováva, keďže je vystavené pôsobeniu druhého telesa. Ak však uvažujeme obe telesá ako súčasť jedného systému, zložky síce podliehajú vzájomnej interakcii a zmene hybnosti, ale ich vzájomné pôsobenie nepredstavuje vonkajší vplyv na systém. **Ťažisko** telies, akýsi zástupca systému, sa teda pohybuje rovnomerne priamočiaro v zmysle prvého zákona. Zmeny hybnosti sú rovnako veľké, opačne orientované, a počítané dohromady pre celý systém sa navzájom kompenzujú.



Obr. 3: Zmeny hybnosti Zeme a Mesiaca sa vzájomne kompenzujú.

Tretí zákon, osobitne ak sa jedná o trebárs gravitačné či elektrické pôsobenie, má v sebe príznaky okamžitého pôsobenia na diaľku. Implicitne tu máme predpoklad akcie a reakcie zladených v tom istom čase. Teda zmeny hybnosti dvoch telies vzdialených od seba azda astromické jednotky su koordinované skrz túto vzdialenosť tak, aby jedna presne kopírovala druhú, až na znamienko. Akým spôsobom by sa dal takýto komplot na diaľku dosiahnuť sa nevie. Newton si bol vedomý, že jeho model má črty, ktoré sa mu nepozdávali. V súlade so zásadou hypotheses non fingo nechal na svojich čitateľov akými úvahami nejasnosti doplnia, prípadne akými novými poznatkami sa podarí nájsť dosť podkladov na rozumnú hypotézu.

1.4.7 Prejav sily či neinerciálnosti?

Predstavme si, že pozorujeme pohyb nejakého telesa a jeho pohyb v našich súradniciach nie je daný ako rovnomerný priamočiary. Súradnice telesa nie sú lineárnymi funkciami času. Čo to znamená? Ak je to voľné teleso, naša vzťažná sústava je týmto automaticky diskvalifikovaná z význačnej triedy inerciálnych, keďže nespĺňa nutnú podmienku na zaradenie sa k nim. Ak však na teleso pôsobí nejaká sila, je nerovnomernosť jeho pohybu potrebné pripísať jej podľa druhého Newtonovho zákona.

Ako vieme, či sme narazili na prejav nejakej sily alebo neinerciálnosti našej sústavy?

Odpoveď je veľmi prozaická. Robíme čo sa dá. Pokúsime sa nájsť voľné testovacie telesá. Zabezpečíme aby boli elektricky neutrálne, odčerpáme vzduch a vyhladíme všetko tak aby sme eliminovali interakciu s prostredím, jednoducho odtienime vplyvy ktoré môžeme odtieniť, a skúmame pohyb týchto telies. Nastavíme naše súradnice tak aby mali súradnicové krivky pozdĺž trajektórií takýchto testovacích telies a nastavíme hodinky tak aby tikali spôsobom zladeným s pohybom našich voľných telies (v štýle rovnaká vzdialenosť - rovnaký počet tiknutí). Skontrolujeme či v našej vzťažnej sústave je hybnosť izotropná, teda či si interagujúce telesá spôsobia vzájomne zmenu hybnosti takého smeru, orientácie a veľkosti, že celková hybnosť systému sa vzájomnou interakciou častí nezmení. Keď sme takto vyladili svoju súradnú sústavu, budeme teleso ktoré sa v nej nepohybuje rovnomerne priamočiaro považovať za ovplyvnené nejakou externou silou.

Avšak je tu jedna vec na zamyslenie pri zmienenom odtieňovaní vplyvov. Gravitáciu ťažko globálne odtieniť čo i len v princípe. Už aj v rámci skúmania relevantnosti Newtonových zákonov pre tento vesmír bude azda vhodné sa niekedy bližšie pozrieť na tento jav.

1.5 Význačné vzťažné sústavy - výhľady k špeciálnej relativite

Potom čo sme si zopakovali Newtonove zákony, zopakujme si ešte pre koho platia v uvedenej forme. Inerciálni pozorovatelia sa (podobne ako Newtonove zákony) vyznačujú rešpektom voči istým symetriám, čo súvisí s výberom kriviek ktoré si zvolili ako význačné, referenčné, ako krivky tvoriace ich súradnicovú sieť. Trajektórie a parametrizácie voľných telies (alebo jednoducho svetočiary voľných telies) sú podľa prvého zákona veľmi význačné, a teda inerciálni pozorovatelia budú mať svoj súradný systém nalinkovaný pomocou nich. Každá **súradnicová krivka** takého pozorovateľa je *nastavená* tak, že môže v princípe predstavovať trajektóriu voľného telesa, a **tikanie hodiniek** tohto pozorovateľa je *nastavené* tak, aby pohyb voľného telesa pozdĺž takejto trajektórie sa ukazoval rovnomerný.

Už sme spomínali, že naše naozaj technicky prevedené súradné sústavy boli dosiaľ vždy len **približne inerciálne** (okrem iného je ťažké zohnať naozaj voľné teleso). Súradnicové priestorové krivky, referenčné priamky sa ukazujú v bežných prípadoch dostatočne presne spĺňať axiómy euklidovskej geometrie, a tento model sa s úspechom používa na praktické účely. Význačná súradná sústava je potom (čo do priestorovej časti; čas sa obvykle berie ako parameter) bežná kartézska ako ju poznajú deti už na základných školách.

1.5.1 Relatívne a absolútne veličiny v newtonovskej mechanike

Pomocou Newtonových zákonov môžeme vylúčiť veľkú časť súradných sústav ako nepreferovaných. Ale v triede **vyvolených** aj tak ostáva veľké množstvo **rôznych**, v istom zmysle však **rovnocenných**, ekvivalentných pozorovateľov. Títo všetci sa niečím líšia (preto rôzni), majú však niečo dôležité spoločné (preto ekvivalentní). Toto je typický znak **symetrie**. Ak prejdeme od jednej vzťažnej sústavy k inej (prechod daný nejakou matematickou **transformáciou** súradníc), čosi pre naše účely podstatné sa *zachová*, ostane **invariantné**. V prípade newtonovskej mechaniky je podstatnou vecou iste tvar Newtonových zákonov. Povedzme že máme nejakú inerciálnu vzťažnú sústavu S, s pozorovateľom v ktorého súradniciach (t, x, y, z) je pre pozorované telesá zotrvačnosť homogénna a izotropná, a silou ovplyvnené telesá vykazujú zmenu hybnosti ako druhý zákon hovorí. Nanajvýš ako sa od tohto pozorovateľa môže líšiť iný, aby bola aj jeho sústava S´zaradená do význačnej inerciálnej triedy? (Ako sa môžu líšiť súradnice (t', x', y', z') od súradníc (t, x, y, z)?)

Ukazuje sa, že transformácie danej inerciálnej sústavy S, ktoré vedú k tiež inerciálnej sústave S´ (teda ktoré zachovajú tvar Newtonových zákonov), sú napríklad

- euklidovské rotácie v priestore (zodpovedajú pozorovateľom s rôzne natočenými priestorovými súradnými osami; nemyslí sa tu rotujúca sústava)

- translácie v priestore (zodpovedajú pozorovateľom s posunutými počiatkami priestorových súradníc)
- translácie v čase (zodpovedajú pozorovateľom s posunutým počiatkom merania času)

Povolená je aj kombinácia vyššieuvedených transformácií. Často sa ako symetrie Newtonových rovníc spomínajú aj galileovské boosty, transformácie $(x, t) \to (x - vt, t)$, kde v je rýchlosť iného pozorovateľa. Tieto rešpektujú rovnosť trajektórií v časopriestore a zachovávajú zrýchlenia, ale majú problém so symetriou tretieho zákona. Viac si k tomu povieme v partii o relativite.

Symetria súvisí aj s pojmom **relativity a absolútnosti**. Ak máme nejakú triedu objektov (tu to boli pozorovatelia, alebo ich vzťažné sústavy) ktoré sú si v istom zmysle rovnocenné, ale nie rovnaké, potom sa rozličné ich atribúty dajú rozdeliť na relatívne a absolútne nasledovne:

To, v čom sa líšia, bude **relatívne**. Keďže sú si rovnocenní, nie je k dispozícii kritérium ako rozhodnúť čia hodnota atribútu je tá správna. V prípade našich inerciálnych pozorovateľov v newtonovskej mechanike je relatívna napríklad rýchlosť telies. Z hľadiska jednej inerciálnej sústavy S môže byť pozorované teleso v pokoji, z hľadiska sústavy S´ ktorá sa voči S pohybuje rovnomerne priamočiaro sa teleso bude pohybovať rovnomerne priamočiaro. Keďže S aj S´ sú rovnocenné, nemáme ako rozhodnúť akú rýchlosť má teleso v absolútnom zmysle. Jeho rýchlosť je relatívna - závisí od toho kto meria. Podobne je to pre jednotlivé priestorové a časové súradnice udalostí - pozorovatelia s posunutými hodinkami či počiatkami súradných osí, prípadne ich natočením, sa na spomenutých údajoch nezhodnú.

To, v čom sa zhodnú, je **absolútne**. Napríklad u našich pozorovateľov z význačnej newtonovskej triedy je absolútna vzdialenosť dvoch udalostí, časový interval ktorý medzi nimi uplynul, zmena rýchlosti telesa, tvar Newtonových rovníc…

1.5.2 Čo bolo skôr: invariant alebo význačná trieda?

Ako vlastne budujeme teóriu? Začíname s niečím čo považujeme za absolútne, a hľadáme triedu pozorovateľov, ktorí sa na tom zhodnú, prehlásiac ich za význačných a ekvivalentných lebo sa zhodli na našom predpokladanom invariante? Alebo začneme s nejakou triedou pozorovateľov, ktorých prehlásime za význačných a medzi sebou ekvivalentných (prehlásiac rozdiely medzi nimi za nepodstatné), a hľadáme na čom sa zhodnú, a to potom prehlásime za absolútnu vec?

Z matematického hľadiska by sme mohli budovať model z jedného či druhého konca, podľa toho ktorý vezmeme za daný. Vo fyzike sa oplatí neustále obzerať čo robí príroda a našiť model na mieru pozorovanému. A tak ideme z toho konca, na ktorý máme zrovna viac podkladov. Niekedy je ťažko rozhodnúť z ktorého konca vlastne ideme, osobitne keď sme tak navyknutí na myšlienku, že niečo musí byť invariant, a už máme zažité, aká trieda pozorovateľov z toho vyplýva.

Príklad: Uvažujme inerciálneho pozorovateľa so sústavou S. Nech druhý pozorovateľ so sústavou S´ sa od neho líši len nastavením hodiniek - zabudol si letný čas aj v zime. Za fyzikálne podstatné nepokladáme tie údaje, v ktorých sa naši dvaja pozorovatelia líšia (časové súradnice ktoré priradia udalostiam). Za relevantné považujeme údaje, na ktorých sa zhodnú (časové intervaly medzi udalosťami). Napríklad v sústave S sviečka bola zapálená o šiestej večer a zhasla o ôsmej; v sústave S´ bola zapálená o siedmej a zhasla o deviatej. Fyzikálne relevantný je napríklad fakt, že sviečka mala dosť vosku na dvojhodinové horenie, a na tom sa obaja pozorovatelia zhodli. Tu sa porovnateľne ponúkajú obe možnosti: prehlásiť oboch za rovnocenných, na základe úvahy že predsa sa líšia len niečím o čo sa príroda nebude starať, aj vyhlásiť, že to, čo majú spoločné, je podstatná vec, a tak sú na základe zhody na nej rovnocenní.

Niekedy je azda primárnejšie postulovanie/predpoklad že niečo je invariantné, a hľadá sa najväčšia trieda pozorovateľov ktorá sa na tom zhodne.[5] Alebo máme dve veci, z ktorých každá je invariantná voči inej triede pozorovateľov, a skúmame, či nás k lepšej zhode s experimentom privedie predpoklad o absolútnosti jednej alebo druhej.

[5] Napríklad kauzalita súvisí s predpokladom, že poradie udalostí, ktoré môžu byť príčinne spojené je absolútne - ak jeden pozorovateľ vidí udalosť A ako príčinu a udalosť B ako následok, tak tento vzťah má platiť pre každého pozorovateľa, s ktorým sa mienime vôbec zaoberať. Toto mimochodom pripúšťa vcelku širokú triedu súradných sústav, a ešte väčšiu ako používa špeciálna relativita.

1.5.3 Príklad transformácie súradníc - pootočenie

Uveďme si pre ilustráciu konkrétne transformácie súradníc ktoré prepájajú rozličné súradné sústavy bez toho aby menili ich zaradenie do inerciálnej triedy:

Rotácia v rovine xy o konštantný uhol α domieša priestorové súradnice x a y. Pozorovatelia sa zhodnú na počiatku súradnej sústavy, na všetkých časových údajoch ($t = t$), na vzdialenostiach bodov, ale nie na konkrétnych priestorových súradniciach bodov. Tieto budú súvisieť nasledovne:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Samozrejme ak sa zmenia súradnice pozičného vektora častice, iste sa zmenia aj súradnice vektora jej rýchlosti a zrýchlenia. Ale transformujú sa rovnakou rotačnou maticou R akou sa transformovala pozícia. To isté platí aj pre súradnice vektora pôsobiacej sily.

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r}$$
$$\vec{v} \to \vec{v}' = R\vec{v}$$
$$\vec{a} \to \vec{a}' = R\vec{a}$$
$$\vec{F} \to \vec{F}' = R\vec{F}$$

Druhý Newtonov zákon teda v pootočenej sústave nakoniec bude vyzerať tak ako v pôvodnej; ak platil tam, bude aj tu, a opačne:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$
$$mR\vec{a} = R\vec{F}$$
$$m\vec{a}' = \vec{F}'$$

Čo sa týka prvého a tretieho zákona, budú tiež platiť v pootočenej aj pôvodnej sústave rovnako - pootočená priamka je stále priamka a ak pootočíme akciu a reakciu rovnako, ich vzťah sa tiež zachová ako bol.

1.6 Newtonov gravitačný zákon

Poučku o gravitačnom pôsobení medzi hmotnými telesami sa učia už deti na základnej škole. Treba si dať pozor, aby nás notorická známosť formulky nezviedla k domnienke, že už niet ohľadne nej o čom uvažovať. Newtonov gravitačný zákon, jeho úspech i limity poskytujú typický príklad budovania modelov vo fyzike. Keďže s fyzikou nie sme zďaleka hotoví (v kontraste s mienkou ktoréhosi gentlemana krátko predtým než ňou otriasli teórie relativity a kvantovej mechaniky), je dobré vedieť, aké stratégie boli úspešné v minulosti (úspechom sa tu myslí lepší vhľad, všeobecnejšia uplatniteľnosť, lepšia predikčná schopnosť modelu). Schopnosť budovať rozumné modely- reprezentácie javov- je extrémne užitočná kvalita pre ľudí z vedeckých aj technických oborov - preštudovať si exemplárny príklad je teda všeobecne užitočné cvičenie.

Začnime tým, čo je notoricky známe: Ak teleso hmotnosti M je v strede súradnej sústavy (toto môžeme predpokladať bez ujmy na všeobecnosti), a teleso hmotnosti m je v v pozícii danej vektorom $\vec{r}$ (teda sú od seba vo vzdialenosti r), potom každé z nich pôsobí na druhé silou úmernou súčinu ich hmotností a nepriamo úmernou štvorcu ich vzdialenosti

$$F = \kappa \frac{Mm}{r^2}$$

Smer a orientácia sily: Teleso M pôsobí na teleso m silou smerujúcou pozdĺž spojnice do stredu, teda jednotkový vektor charakterizujúci smer a orientáciu tejto sily je $-\vec{r}/r$:

$$\vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Táto stručná formulka je podľa klasickej mechaniky použiteľná na ohromnú škálu situácií, od predpovedania návratu komét a zatmení Mesiaca po výpočet stočenia wolframového vlákna v Cavendishivých váhach kdesi na stole školského laboratória. Ak má naozaj takúto univerzálnu platnosť, bude v nej pravdepodobne čosi hlboké. Pozorovania ukazujú, že neplatí celkom presne; ale pravdepodobne v niečom je blízka správnemu modelu (niežeby sme taký už naisto definitívne mali). Niekedy sa o neznámom môžeme poučiť pomocou jeho príbuzných. A newtonovský model je dosť príbuzný "tomu pravému"na to, aby sa použil pri výpočtoch, ktoré pomohli dostať ľudí na Mesiac a späť (živých). Poďme sa teda pozrieť na aspekty tej krátkej formulky.

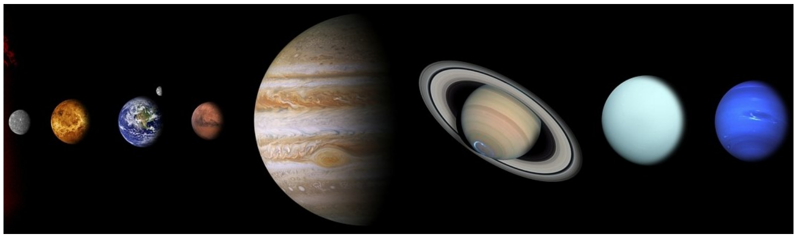
1.6.1 Univerzálna gravitačná konštanta

Vo formulke máme konštantu úmernosti κ - hovorí sa jej **univerzálna gravitačná konštanta**. A Newtonovmu zákonu sa hovorí zákon **univerzálnej** gravitácie. V čom je táto univerzálnosť? Sme už tak zvyknutí na formulku aj prívlastok, že si možno ani neuvedomujeme, aký jednotiaci princíp je tu vyslovený. Predstavme si, že máme k dispozícii aparatúry na meranie hmotností, vzdialeností a síl. Newtonov gravitačný zákon okrem iného hovorí, že ak pre dve telesá zmeriame ich hmotnosti M, m, vzdialenosť r a vzájomnú gravitačnú silu F, potom hodnota $\frac{Fr^2}{Mm}$ je číslo nezávislé od toho, kedy a kde vo vesmíre sme meranie previedli, ani od toho či dve telesá boli dvojica hviezd, klokanov, Zem a jablko, Zem a Mesiac, špendlík a vidlička,... pre všetky má spomínaný výraz hodnotu κ. Mesiac poslúcha ten istý princíp ako jablko v záhrade. Odľahlé kúty sveta sú akosi zjednotené v princípoch na ktorých bežia. Nestratiť niť spoločného základu, uvedomiť si že obe telesá padajú k Zemi, rozoznať že odlišnosti mesačného a jablkového scenára sú artefaktom odlišných počiatočných podmienok... si vyžaduje hlboké uvažovanie a iskru geniality. My si však môžeme užiť pointu tak, ako si užívame detektívnu zápletku a rozuzlenie, na ktoré by sme sami neprišli. A na tomto klasickom detektívnom príbehu si natrénujme pozornosť pre lepšie ocenenie tých, čo budú nasledovať.

1.6.2 Izotropia gravitácie a jej vizuálny prejav

Ďalšia zaujímavá vec v gravitačnom zákone je jeho symetria. Podobne ako pri troch pohybových zákonoch, aj tu sa jedná o existenciu nejakých rozličností, ktoré sú nedôležité z hľadiska niečoho, čo dôležité je. V tomto prípade je veľkosť gravitačnej sily nezávislá od smeru v ktorom leží spojnica dvoch pôsobiacich telies. Ak vezmeme naše teleso M ako fixované v strede, na teleso m bude pôsobiť rovnako veľká sila vo všetkých miestach vzdialených r od M. Dá sa uvažovať, či sa jedná o **izotropiu** gravitácie alebo priestoru. Na úrovni newtonovskej mechaniky sa pravdepodobne prikloníme k tomu, že sa minimálne jedná *aj* o symetriu priestoru, ako naznačuje neskorší odstavec o poklese s prevráteným štvorcom vzdialenosti[6].
Symetrii, o ktorej tu hovoríme, sa niekeda hovorí sférická, keďže množiny bodov v okolí centrálneho telesa (M) ktoré sú ekvivalentné (z hľadiska veľkosti gravitačnej sily na iné teleso hmotnosti m) sú sféry. Všetky väčšie telesá slnečnej sústavy sú približne guľovitého tvaru. Keďže vznikali gravitačným zbieraním materiálu, ich viditeľný tvar vlastne odráža symetriu zákona, ktorý do istej miery vidíme reprezentovaný našou formulkou. Reprezentovaný, nie identifikovaný - naše matematické reprezentácie sú prinajlepšom užitočné avatary, dúfajme odrážajúce veľa aspektov skutočnosti.

[6]Prepojenie gravitácie s časopriestorom sa podľa všeobecnej relativity ukazuje ako tak úzke, že (nielen) symetrie majú spoločné.



Obr. 4: Sférická symetria je veľmi obľúbená.

1.6.3 Gravitačné pole - intenzita

Doposiaľ sme hovorili o gravitačnej sile. Tento pojem si vyžaduje aspoň dve telesá. Nemá význam hovoriť o tom, ako nejaké jedno hmotné teleso M pôsobí silou v nejakom bode, pokiaľ tam nie je iné teleso, na ktoré by bolo pôsobené. Nakoniec podľa tretieho zákona každá sila vyžaduje reakciu od telesa na ktoré pôsobila, a ťažko obhájime ako by samotný bod takú reakciu poskytol v rámci klasického modelu. Ak skúmame situácie, kde je jedno prominentné teleso z hľadiska hmotnosti, ako napríklad Zem v okruhu niekoľkých státisícov kilometrov, často sa nám zíde mať zmapované jeho okolie z hľadiska jeho gravitačného vplyvu - skúmať *potenciálnu* silu ktorá *by* pôsobila na nejaké prieskumné/testovacie teleso na rozličných miestach. Toto testovacie teleso nech má pre praktické výpočtové účely jednotkovú hmotnosť. Takejto hypotetickej sile pripadajúcej na hypotetické teleso jednotkovej hmotnosti v danom mieste sa hovorí **intenzita** gravitačného poľa (telesa M):

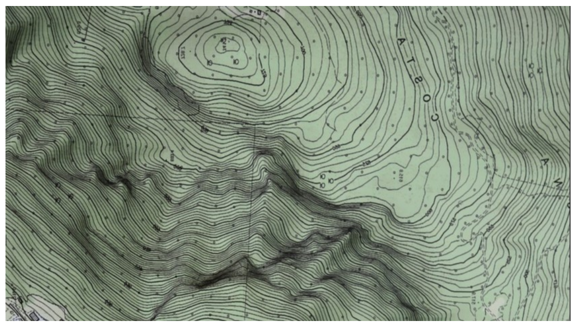
$$\vec{E} = -\kappa \frac{M}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

Intenzita je **vektorové pole** popisujúce gravitačný vplyv telesa ktoré ho budí; má zmysel o nej hovoriť či už sa zrovna v okolí testovacia častica nachádza alebo nie. Intenzita umožňuje popísať pole vektorovo - každému bodu pripíšeme vektor. Jeho veľkosť hovorí kvantitatívne o miere pôsobenia na hypotetickú časticu jednotkovej hmotnosti, jeho smer a orientácia hovoria o smere a orientácii tohto pôsobenia v priestore.

Na ilustráciu užitočnosti pojmu intenzity si tu spomeňme prípad ktorý sa používa v praxi veľmi často. V blízkom okolí je ako prominentne hmotné teleso bez konkurencie naša Zem. Keď sa čitateľ poobzerá po predmetoch ktoré má na dosah ruky, všetky vykazujú dôsledky gravitačného pôsobenia Zeme na ne. Interakcie medzi nimi navzájom sú oproti tejto prominentnej zanedbateľné. Pre výpočty pohybov blízko povrchu Zeme sa (pokiaľ ide o gravitačné pôsobenie) väčšinou stačí obmedziť na priťahovanie medzi Zemou a sledovaným telesom. A medzi Zemou a ďalším sledovaným telesom, atď. Znamená to časté vyčísľovanie výrazu $\kappa \frac{M_z m}{R_z^2}$, kde M_z je hmotnosť Zeme , R_z jej polomer, a m je premenná za ktorú dosadzujeme hmotnosť telesa ktorého pohyb v gravitačnom poli, práve študujeme. Ako vidíme, pre rozličné telesá tu vo výpočte vždy vystupuje spoločný výraz $\kappa \frac{M_z}{R_z^2}$, násobený gravitačným nábojom daného telesa m. Po niekoľkých výpočtoch človek uzná že opakujúca sa veličina sa oplatí spočítať zvlášť, pomenovať a používať ako skratka. V prípade situácií blízko povrchu Zeme, pre ktoré môžeme vzdialenosť od jej stredu považovať za približme rovnú jej polomeru (pár desiatok metrov je malá časť tisícok kilometrov), má táto veličina hodnotu približne $9,81 \mathrm{m.s}^{-2}$. Táto špecifická veľkosť **intenzity gravitačného poľa Zeme blízko povrchu** sa často sa značí symbolom g.

1.6.4 Poučenie z turistiky - po vrstevniciach a naprieč nimi

O intenzite možno uvažovať v kontexte mnohých javov, nielen gravitačného poľa. Vektorové polia všeobecne majú ešte širšie uplatnenie. Pre obohatenie intuície, skúsme si vektorové pole ilustrovať na konkrétnom príklade: spád terénu. Predstavme si horský terén a nás ako geodetov snažiacich sa ho zmapovať. Pri tomto mapovaní pre turistické účely má veľký význam strmosť svahov. Predstavme si teda vektorové pole intenzity výšky - strmosti. Ako každé vektorové pole, má v každom bode svoju mieru (existujú strmšie a miernejšie stúpania/klesania), smer (kopce majú v niektorých smeroch miernejšie svahy ako v iných) a orientáciu (stúpanie doľava znamená klesanie doprava a pod.).



Obr. 5: Vrstevnice, ekvipotenciálne krivky

Napriek tomu, že informácia o spáde je iste užitočná pri plánovaní trasy, turistické mapy obvykle neobsahujú vektorové dáta. Namiesto šípky/vektora v každom mieste máme mapu pokreslenú krivkami charakterizovanými jedným číslom, **vrstevnicami**. Krivky nie sú z praktických príčin nakreslené nekonečne husto, ale očividne sa model myslí tak, že cez každý bod prechádza práve jedna krivka. Nepretínajú sa. Z tohto modelu sa dá vyčítať o teréne mnohé. Vieme na základe hustoty a číslovania susedných vrstevníc povedať, ktorým smerom je aké stúpanie či klesanie. Pozdĺž vrstevnice žiaden spád, kolmo na ňu maximálny v danom mieste. Podľa hustoty vrstevníc v okolí vieme určiť mieru strmosti. Všimnime si, že vektorové pole (intenzita, strmosť, spád) - niekoľko čísel na každý bod bolo nahradené **skalárnym poľom** - ktoré priraďuje iba jedno číslo každému bodu. V našom turistickom podobenstve máme skalárne pole nadmorskej výšky. Takéto skalárne pole vo fyzike niekedy voláme **potenciálom**.

1.6.5 Gravitačné pole - potenciál

Vráťme sa ku gravitácii - aj tu existuje skalárne potenciálové pole, označme si ho pre prítomné účely ako ϕ. Jeho záporný **gradient** $-\vec{\nabla}\phi$ je vektorové pole inetnzity.

Uveďme si paralely gravitačného poľa s našou turistickou ilustráciou:

- potenciál (skalárne pole) ϕ - nadmorská výška
- gradient potenciálu, intenzita (vektorové pole) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ - spád, strmosť svahu
- ekvipotenciálne množiny (na nich má ϕ konštantnú hodnotu) - vrstevnice
- Pri pohybe po ekvipotenciálnej množine pole neovplyvňuje rýchlosť (neurýchľuje ani nespomaľuje, intenzita poľa má nulový priemet/ zložku v smere dotyčnicovom k takej množine). Pohyb po horách po vrstevnici nevyžaduje stúpať proti zemskej príťažlivosti ani brzdiť aby nás neurýchlila dole príliš.
- Intenzita je kolmá na ekvipotenciálne množiny. Svah sa najprudšie mení v smere kolmom na vrstevnice.

1.6.6 Vzťah intenzita - potenciál

Podobne ako existuje vzťah medzi vrstevnicami a strmosťou terénu, existuje vzťah medzi potenciálovým a jemu príslušným intenzitným poľom. Vektorové pole intenzity $\vec{E}$ je záporným ***gradientom*** skalárneho poľa potenciálu ϕ:

$$-\vec{\nabla}\phi = \vec{E}$$

V kartézskych súradniciach sú teda zložky $\vec{E}$ vyjadrené ako parciálne derivácie ϕ v smere súradných osí:

$$-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (E_x, E_y, E_z)$$

Intenzite gravitačného poľa budeného telesom hmotnosti M situovaným v strede súradnej sústavy potom v bode danom pozičným vektorom $\vec{r}$ prislúcha potenciál

$$\phi(\vec{r}) = -\kappa\frac{M}{r}$$

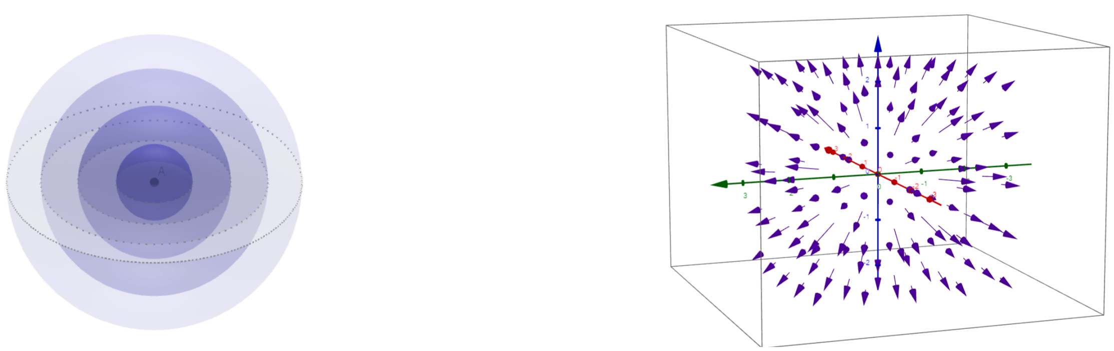
Potenciál je daný až na integračnú konštantu, ktorú obvykle volíme s ohľadom na nadchádzajúce výpočty - často nulovú hladinu potenciálu volíme v nejakom význačnom mieste pre danú aplikáciu. Napríklad pre výpočty astronomických predpovedí je význačným miestom nekonečno (okrem iného je rovnako vzdialené od všetkých hviezd a planét pre ktoré výpočty prevádzame). Aj my sme tu počítali s takou konvenciou.

1.6.7 Pokles intenzity so štvorcom vzdialenosti

Veľkosť intenzity gravitačného poľa so vzdialenosťou klesá - v súlade so skúsenosťou že bližšie telesá majú na seba väčší vplyv. Prečo klesá s druhou mocninou? Prečo ak dáme dve telesá trikrát ďalej, klesne sila deväťkrát? Prečo nie tiež trikrát? Prečo nie dvadsaťsedemkrát?

Pokles miery interakcie so štvorcom vzdialenosti súvisí so symetriou priestoru a jeho trojrozmernosťou. Od čias Michaela Faradaya poznáme veľmi názorný **siločiarový model** poľa. Azda by sme ho mohli ešte lepšie volať **intenzitočiarový** model, keďže obvykle sa kreslí ako súbor myslených čiar pozdĺž ktorých *by* pôsobila sila na testovacie teleso ktoré by do daného poľa prišlo.

Povedzme že v rámci modelu budeme kresliť M siločiar na každú jednotku hmotnosti zdrojového telesa (aby sme nejako kvantitatívne rozlíšili polia budené telesami rozličných hmotností). Uvažuje teraz ako závisí **hustota siločiar** od pozície v priestore. Model je **izotropný** vzhľadom na stred daný pozíciou telesa budiaceho pole - siločiary sa zbiehajú izotropne k nemu. Dôvodom je **symetria priestoru** - ak nie je dôvod uprednostniť nejaké smery, rozložíme siločiary rovnomerne do všetkých strán od zdroja. Izotropia ako symetria nám umožňuje **rozdeliť body priestoru do množín ekvivalencie** - rovnocenných bodov - v našom prípade ich voláme **ekvipotenciálnymi plochami**. Rovnocennosť je tu myslená v zmysle odlišnosť len (z hľadiska poľa) nepodstatným atribútom - tu je takým atribútom smer od stredu.

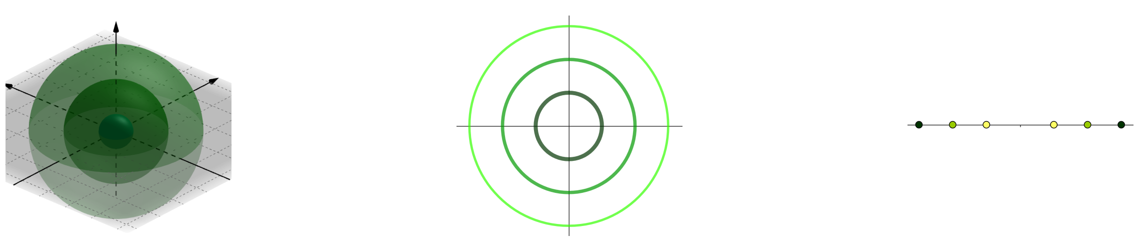


Obr. 6: Intenzita je kolmá na ekvipotenciálne plochy

Ekvipotenciálne plochy sú v našom prípade sféry s centrom v počiatku - intenzita je všade kolmá na danú plochu a pre každý bod danej plochy rovnako veľká. Všimnime si teraz **hustotu siločiar**. Ak by predstavovali prúdenie niečoho, aký by bol **prietok našimi ekvipotenciálnymi plochami**? Počet siločiar je konštantný, každou sférou ich prebieha rovnaký počet (ako sme spomínali, daný výdatnosťou zdroja poľa, tu hmotnosti). Čo sa však zo sféry na sféru mení je samozrejme hustota týchto siločiar. Ak sa M siločiar má rovnomerne rozložiť na sféru s polomerom r, bude počet siločiar na jednotku plochy nepriamo úmerný štvorcu vzdialenosti, pretože plocha sféry je mu úmerná. **Ekvipotenciálne plochy, množiny bodov s rovnakou hustotou siločiar, sa zväčšujú so štvorcom vzdialenosti, a hustota siločiar reprezentujúca intenzitu poľa s ním klesá.**

Všimnime si ešte, aký je vzťah medzi poklesom intentity so vzdialenosťou a dimenziou priestoru. Predpokladajme euklidovskú geometriu - ukazuje sa byť pomerne dobrým priblížením. Výdatnosť zdroja poľa sa rovnomerne rozkladá medzi všetky body v rámci triedy ekvivalencie. Čím viac deliacich sa, tým menej pripadne na jedného. Teda intenzita izotropného poľa klesá s mierou množiny rovnocenných bodov (ekvipotenciálnou plochou).

- V 3D je miera bodov s rovnakou vzdialenosťou od daného stredu úmerná švorcu vzdialenosti ($4\pi r^2$), preto intenzita so štvorcom vzdialenosti klesá. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha deväťkrát menšia intenzita.
- V 2D je miera bodov vzdialenách rovnako ďaleko od stredu úmerná vzdialenosti r, lebo miera kružnice je $2\pi r$. Hustota siločiar, a teda aj intenzita, by tam klesala s prvou mocninou vzdialenosti. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha trikrát menšia intenzita.
- V 1D sú množiny bodov s rovnakou vzdialenosťou od stredu dané dvojicami bodov. So vzdialenosťou miera týchto množín ekvivalencie neklesá, preto ani hustota siločiar a intenzita poľa. Trojnásobnej vzdialenosti prislúcha stále tá istá intenzita.



Obr. 7: Nárast ekvipotenciálnych množín so vzdialenosťou závisí od dimenzie priestoru

1.6.8 Intenzita a sila, potenciál a potenciálna energia

Intenzita a potenciál sú charakteristiky vplyvu nejakého hmotného telesa v okolí; má význam hovoriť o nich bez ohľadu na to, či sa kdesi nablízku nachádza testovacie teleso, ktoré by podliehalo tomuto vplyvu. Sú však zavedené, aby sa taký vplyv ľahko počítal keď sa také testovacie teleso hmotnosti m nájde: pomocou intenzity a potenciálu vyjadríme **silu** na testovacie teleso a **potenciálnu energiu** ktorú v danom poli má: Ak sa v poli nachádza teleso hmotnosti m, sila naň bude

$$\vec{F} = m\vec{E} = -m\vec{\nabla}\phi$$

Z tohto hľadiska máme teda gravitačnú silu pôsobiacu na testovacie teleso m vyjadrenú ako súčin dvoch faktorov: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ charakterizuje pole, a m je akýsi gravitačný náboj častice ktorá do toho poľa prišla.

Potenciálna energia tohto telesa bude

$$U = m\phi$$

Opäť tu vidíme podobný vzorec: jeden faktor charakterizujúci pole (ϕ), druhý predstavujúci gravitačný náboj (m).

1.6.9 Konzervatívna sila, potenciál

Popis interakcie pomocou potenciálu je veľmi užitočná vec. Je pre každú interakciu možná takáto reformulácia dát? Dá sa vždy namiesto vektorového nájsť skalárny popis, nejaká funkcia definovaná na priestore, priraďujúca každému bodu v priestore číslo? Je to možné pre gravitačné pole a niekoľko ďalších. Nie vo všeobecnosti - v matematickej všeobecnosti prinajmenšom.

Sily v prírode sú na prvý pohľad rozličného druhu - a predsa niekedy sa za zdanlivo nepríbuznými javmi nájde spoločný princíp. Z praktických dôvodov si ponechávame aj označenia síl, ktoré neodrážajú zatiaľ najhlbšie nájdené princípy. Keď technik popisuje tlmiče v stroji, nebude sa odvolávať na elektromagnetické alebo dokonca spinové javy medzi elementárnymi čiastkami hmoty, popíše systém pomocou sily pružiny. Podobne postupuje použije efektívny, skrátený popis pre interakciu medzi povrchmi telies pomocou trecej sily, interakciu molekúl plynu a molekúl piestu pomocou tlakovej sily atď. Newtonove rovnice sú pripravené prijať na svoju silovú stranu aj takéto efektívne sily. Ale samozrejme pokiaľ sa v skúmaných javoch objaví niečo, čo ich viaže dohromady, treba za tým ísť. Vo fyzike totiž existuje akýsi nepísaný zákon, empiricky overený lepšie ako klasická mechanika: objavenie hlbšej súvislosti a prispôsobenie našich matematických avatarov (reprezentácií pojmov a javov - ako funkcie, tenzory, diferenciálne oparátory atď) tak, aby táto hlbšia súvislosť bola explicitne vidieť, vedie k jednoduchším, všeobecnejšie platiacim modelom.

Čo sa týka interakcií v prírode, zatiaľ to vyzerá tak, že počet tých základných nie je viac ako 4, alebo azda 3, pretože jedna z nich (gravitácia) sa zdá byť lepšie uchopiteľná ak sa reprezentuje ako geometrický artefakt, nie sila. Existujú modely, ktoré dávajú zvyšné tri interakcie (elektromagnetická, silná a slabá) akosi pod jednu strechu. Toto nie je uzavretá kapitola vo fyzike, a nejdeme hĺbať nad prognózami, ale skonštatujeme jednu dôležitú črtu. Obvykle sa v prípade fundamentálych interakcií osvedčuje modelovať javy pomocou **potenciálového poľa**, umožňujúceho pripísať konfiguráciám častíc/polí **potenciálnu energiu**. V uzavretých systémoch, kde sú všetky interakcie konzervatívne sa (ako názov napovedá) **zachováva** istá veličina, celková **energia**. Táto skutočnosť robí možnými výpočty aj tam, kde Newtonove rovnice dávajú buď príliš zložité výpočty, alebo ani nie jasné ako ich sformulovať.

1.6.10 Gravitačný náboj a zotrvačnosť

V predchádzajúucich paragrafoch sme si uviedli hmotnosť telesa ako **gravitačný náboj**, akúsi **mieru, akou interaguje s gravitačným poľom** ak do nejakého príde. V newtonovskej mechanike nemáme apriori dôvod predpokladať že tento gravitačný náboj, miera tendencie interagovať gravitačne, je nejako korelovaný s **mierou zotrvačnosti** telesa vystupujúcou v druhom Newtonovom zákone ako inerciálna(zotrvačná) hmotnosť. Nakoniec spomínaný druhý zákon je myslený pre akúkoľvek silu; hmotnosť uvedená v ňom je miera zotrvačnosti voči pôsobeniu akejkoľvej sily. Prečo by táto miera zotrvačnosti mala byť daná práve gravitačným nábojom telesa? Prečo nie jeho elektrickým nábojom, prípadne ešte inými veličinami charakterizujúcimi teleso?

A predsa experimentálne sa **rovnosť** oboch veličín, inerciálnej hmotnosti aj gravitačného náboja telesa, rovná s presnosťou na mnoho platných cifier. Nepoznáme žiaden experiment kde by ich odchýlka bola väčšia ako citlivosť daného merania. Náhoda?

Táto rovnosť má mimoriadne nápadný dôsledok (nápadnosť je miernená zriedkavými príležitosťami skúmať gravitáciu bez doprovodu iných interakcií zastierajúcich efekt o ktorom má byť reč). Napíšme si druhý zákon napríklad pre teleso zotrvačnej hmotnosti m_i s gravitačným nábojom/hmotnosťou m_g v gravitačnom poli Zeme (gravitačnej hmotnosti M_z). Teda druhý Newtonov zákon aplikujeme na prípad keď pôsobiacu silou je práve sila gravitačná. Zem nech je centrovaná do počiatku súradnej sústavy, a teleso ktorého zrýchlenie počítame, nech je v mieste s pozičným vektorom $\vec{r}$, teda v mieste kde má pole intenzitu $\vec{E}(\vec{r})$ Druhý zákon potom hovorí, že pre zrýchlenie nášho telesa platí

$$m_i\vec{a} = m_g\vec{E}$$

Ak gravitačná a inerciálna hmotnosť sú rovnaké, z výpočtu vypadnú a zrýchlenie je od nich nezávislé. Teleso sa bude pohybovať so zrýchlením daným intenzitou gravitačného poľa, nezávisle od svojho inerciálneho atribútu. Teda keby naše teleso bolo dvakrát ťažšie, dostalo by rovnaké zrýchlenie akoby bolo dvakrát ľahšie.
Čo je to za silu, ktorá urýchľuje všetky telesá rovnako?

Pre porovnanie, elektrostatická sila urýchľuje rôzne ťažké telesá rôzne. Tiež sa dá napísať vo forme súčinu intenzity $\vec{E}_{el}$ poľa a náboja q telesa, ktorého pohyb v poli študujeme. Ak toto teleso má mieru zotrvačnosti m_i, potom podľa druhého zákona dostane v poli zrýchlenie podľa vzťahu

$$m_i\vec{a} = q\vec{E}_{el}$$

Teda ak bude mať dvakrát väčšiu zotrvačnosť, dostane dvakrát menšie zrýchlenie. Aj bežná skúsenosť s inými silami nám hovorí, že urýchliť ťažšie teleso je ťažšie. Potrebujeme tým väčšiu silu na dosiahnutie daného zrýchlenia, čím väčšiu má urýchľované teleso hmotnosť.
Gravitácia je iná.

1.6.11 Sila či pseudosila

Prečo je gravitácia taká odlišná od ostatných síl, prečo ten komplot zladenia sily so zotrvačnosťou telesa, na ktoré pôsobí? Čo je to za silu, ktorá je automaticky väčšia pre teleso s väčšou zotrvačnosťou, menšia pre teleso s menšou?

Treba podotknúť, že hoci nepoznáme inú silu podieľajúcu sa na takomto spiknutí, poznáme celú triedu **pseudosíl (fiktívnych síl)**, ktoré sa správajú presne takto. Ide o "sily", ktorým sa pripisuje zrýchlenie hoci aj voľného telesa pozorovaného *neinerciálnym pozorovateľom*, ak sa chce hrať na platnosť druhého zákona aj vo svojej sústave. Môže si pestovať fikciu, že zákon u neho platí, ale musí vymyslieť nejakých silových agentov zodpovedných za zrýchlenie, ktoré vidí. Ak zrýchlenie v jeho sústave označíme ako $\tilde{\vec{a}}$, a zotrvačnú hmotnosť pozorovaného telesa ako m_i, potom treba domyslieť nejakú silu $\tilde{\vec{F}}$ tak aby formálne platilo $m_i\tilde{\vec{a}} = \tilde{\vec{F}}$.

Tieto fiktívne sily majú vlastnosť ako gravitácia - tiež sú **úmerné zotrvačnej hmotnosti** telesa, a teda po dosadení z rovnice závislosti an hmotnostiach vypadnú. V neinerciálnej vzťažnej sústave sa tiež deje podivnosť, že všetky telesá bez ohľadu na hmotnosť dostávajú rovnaké zrýchlenie. (Pravda okrem prípadu, keď pôsobí aj "naozajstná sila", akú by za takú prehlásil aj inerciálny pozorovateľ.)

Ak napríklad sedíme vo vlaku, so súradnou sústavou danou trebárs stenami a dlážkou kupé, môžeme nejaký čas pozorovať, že všetko sa deje ako druhý zákon káže. Čo necháme na pokoji ostáva na pokoji, čo pošleme silou kamsi pôjde ako druhý zákon predpisuje. Odrazu sa však môžu všetky dosiaľ pokojné telesá pobrať k prednej stene - všetky s rovnakým zrýchlením (ak odmyslíme rôzne koeficienty trenia apod.) Čo sa stalo? Pre pozorovateľa zvonku sa stala veľmi prirodzená vec v súlade s prvým Newtonovým zákonom - najprv všetky telesá, ktoré sme my v našej vlakovej sústave vnímali v pokoji, vnímal človek na nádraží ako pohybujúce sa rýchlosťou vlaku - rovnomerne, priamočiaro. Keď vlak začak brzdiť, pre človeka z nádražia všetky šálky, kufre a cestujúci jednoducho pokračovali podľa prvého zákona ako doposiaľ, ale stena vlaku tak nepokračovala, lebo bola spojená s brzdiacim zariadením a príslušnými silami. Pre nás vnútri však zrazu akási pseudosila hodila všetko o prednú stenu [7]. Čo je zač a prečo všetko hodila s rovnakým zrýchlením nám dnu nie je jasné. Ale pre pozorovateľa vonku to ani nemôže byť inak - všetci išli rovnako rýchlo, teda všetci aj

[7] Výraz pseudo- alebo dokonca fiktívna sila neznačí, že javy, v súvislosti s ktorými ich pozorovateľ zavádza, by boli nejako imaginárne. Pozorovatelia vo vlaku aj vonku sa zhodnú na počte rozbitých šálok či zlomenín.)

mali pokračovať rovnako rýchlo, smerom k pribrzdenej stene, ktorá bola pre všetkých tiež rovnaká.

To, čo neinerciálny pozorovateľ vníma ako porušenie Newtonových zákonov vníma inerciálny pozorovateľ ako ich potvrdenie.

Podobne je to pre Eulerovu, Coriolisovu, odstredivú "silu" atď - všetky tieto prejavy neinerciálnosti sústavy z pohľadu pozorovateľa v nich majú vlastnosť, že na telesá pôsobia priamoúmerne ich zotrvačnj hmotnosti - dávajúc im všetkým z pohľadu neinerciálneho pozorovateľa to isté zrýchlenie.

Nie je potom aj gravitácia pseudosila, dôsledok neinerciálnosti sústavy? A nie je to vlastne dobrá správa pre principiálnu použiteľnosť Newtonových zákonov?

Spomeňme si, že v Newtonových zákonoch hral kľúčovú rolu pojem **voľného telesa**. Jeho pohyb slúžil ako štandard pojmov rovno, rovnomerne. Ak vieme voľnú časticu zabezpečiť aspoň v princípe, môžeme mať taký štandard aspoň v princípe. Ako teda zohnať voľnú časticu? Odtienime všetky sily na ňu. Môžeme teleso odmagnetovať, elektricky zneutrálniť, vyleštiť, odčerpať okolitý vzduch alebo iné odporové prostredie, odstrihnúť každú šnúrku či pružinku čo ho môže ovplyvňovať... a toto môžeme urobiť technicky dôkladnejšie alebo menej dôkladne, každopádne ak vieme odčerpať miliardu molekúl odporového prostredia, azda budeme vedieť odčerpať aj dve miliardy.

Ako však odtieniť gravitačnú silu a všetky s ňou súvisiace? (Pole Zeme ťahá teleso dole, teleso tlačí na podložku, ale potom aj podložka na teleso...) Reakcie podložiek a závesov možno zlikvidovať tak že prejdeme do padajúcej sústavy, teda že teleso nebude podopierané ničím - napríklad postavíme laboratórium v padajúcom výťahu (a s odčerpaným vzduchom), alebo sa poberieme aj s našou aparatúrou kdesi do vesmíru. Všetky tieto veci možno *v princípe* urobiť.
Ale ani s týmito všetkými opatreniami nie je v princípe možné odtieniť globálne gravitačný vplyvy ostatných telies, keďže gravitačná sila má podľa Newtonovej formulky nekonečný dosah a pôsobí, na rozdiel od trebárs elektrickej sily, vždy príťažlivo, nejde zneutralizovať. Samozrejme, dajú sa uvažovať približne inerciálne sústavy, kde štandard rovnomerne priamočiaro bude realizovaný s "takmer voľnými telesami"... ale ostáva fakt, že newtonovská mechanika (ak sa do nej zahrnie spolu s tromi pohybovými zákonmi aj zákon gravitácie) sama o sebe hovorí že v tomto vesmíre platí len približne, ak by gravitácia bola sila ako ostatné. Bola by to sila ktorú by bolo nemožné **globálne odtieniť**, teda by bolo v princípe nemožné vôbec mať voľnú časticu ktorá by nám dala prototyp rovnomerného priamočiareho pohybu.

Ak však **gravitácia nie je sila** - ak sa dajú jej prejavy chápať ako **charakteristiky geometrie časopriestoru - potom telesá na ktoré nepôsobí okrem gravitácie nič by *sú* voľné,** ich trajektórie v súlade s prvým zákonom *definujú* v časopriestore pojem priamočiaro. Akurát je možné že to nie sú euklidovské priamky čo takto vznikajú. To však nijako neprotirečí Newtonovej mechanike. Prvý zákon je zaradený práve preto, že je potrebné *zistiť* geometriu, nie ju predpokladať apriori euklidovskú.

Ľudia oboznámení s históriou fyziky len povrchne môžu mať dojem že geometrický model gravitácie ako zakrivenia priestoru či časopriestoru prišiel až s dvadsiatym storočím. Pritom potreba nejakého geometrického obrazu bola zjavná už v newtonovskej mechanike keď sa jednalo o principiálnu konzistentnosť. (Je pravda, že vtedy ešte nebol plne k dispozícii matematický aparát rozvinutý v 19. a 20. storočí, a chýbal aj prínos špeciálnej relativity.)

1.7 Gravitácia a krivosť - výhľady k všeobecnej relativite

Všeobecná relativita je asociovaná s **krivosťou časopriestoru.** Názov niekedy azda laikov zvádza k domnienke že sa jedná o akési zovšeobecnenie špeciálnej relativity. Ide však o z**ovšeobecnenie newtonovského modelu gravitácie (tak, aby boli lokálne zahrnuté princípy špeciálnej relativity)**.

1.7.1 Čo zovšeobecňujú Einsteinove rovnice

Bez ambície urobiť tu rýchlokurz všeobecnej relativity, uveďme si pre neskoršiu referenciu kompaktnú formu **Einsteinových rovníc**

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

s krátkym komentárom, že na ľavej strane máme objekt vyjadrujúci **zakrivenie časopriestoru**, napravo objekt súvisiaci so **zdrojmi gravitácie, hustotou energie-hybnosti** v danej oblasti časopriestoru. Súvis s Newtonovou gravitáciou vidno okrem iného v prítomnosti univerzálnej gravitačnej konštanty κ, spojitosť so špeciálnou relativitou naznačuje rýchlosť svetla c. Prípadne ešte odcitujme Wheelerov výrok o tom ako *hmota hovorí časopriestoru ako sa má zakriviť a časopriestor hmote ako sa má hýbať.*
Do hlbín tenzorového počtu sa pri prehľadových prednáškach nechodí, ale povedzme si, že predpovede tohto modelu je síce ťažšie spočítať, ale sú v lepšej zhode s pozorovaním ako je tomu pri newtonovskej verzii.

Lenže tá newtonovská verzia do veľkej miery funguje. Všeobecná relativita zovšeobecňuje niečo, čo je tam dobre. Čo sa zovšeobecnilo? Kde je analógia? Pod newtonovskou gravitáciou si mnoho ľudí rovno predstaví už zmienenú formulku pre veľkosť gravitačného pôsobenia dvoch telies povedzme hmotností M, m v istej vzdialenosti r, so slávnou gravitačnou konštantou κ (ktorej hodnotu vedia desaťroční študenti vysvetliť porovnateľne dobre ako ich vysokoškolskí kolegovia):

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2} \tag{2}$$

Kde v newtonovskej gravitácii vidno náznak súvisu medzi krivosťou a energiou či hmotou? O krivosť čoho by sa vôbec jednalo?

Ukazuje sa že aj newtonovská gravitácia sa dá vyjadriť ako zakrivenie časopriestoru, ale ukázať to vyžaduje trochu času a priestoru - často viac než bežný prehľadový kurz základnej fyziky umožňuje.
Avšak poukázať na **krivosť spojenú s gravitačným potenciálom** sa dá pomerne ľahko a rýchlo, s použitím základov vysokoškolskej matematiky.

Najprv uveďme na pravú mieru, čo v newtonovskej gravitácii je vlastne zovšeobecnené v rovniciach všeobecnej relativity. Nie priamo Newtonov gravitačný zákon pre silu pôsobiacu na nejaké testovacie teleso hmotnosti m v poli nejakého iného telesa hmotnosti M budiaceho skúmané pole; Einsteinove rovnice (1) nakoniec o testovacom telese priamo nehovoria. Popisujú aký vplyv má hmota (napríklad zmienené teleso hmotnosti M) na časopriestor okolo.

Teda lepším **predchodcom/analógom Einsteinových rovníc je newtonovský popis gravitačného poľa ako takého(pomocou intezity alebo potenciálu)**, nie jeho vplyv na testovaciu časticu.

Zopakujme si z predošlých odsekov, že **intenzita gravitačného poľa** budeného hmotou M v počiatku súradnej sústavy je konzervatívne vektorové pole $\vec{E}$, **záporne vzatý gradient skalárneho potenciálu** ϕ, meniace sa v závislosti od polohy v priestore ($\vec{r}$) :

$$\vec{E} = \kappa \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{\nabla}\phi \tag{3}$$

Je v (3) nejaký súvis s krivosťou? **Krivosť** je geometrický pojem, skúmajme teda **geometriu** situácie. V priestore okolo hmoty M sú isté význačné plochy - koncentrické sféry so stredom v mieste kde je zmienená hmota. Sú to **ekvipotenciálne plochy** rozmeru $S = 4\pi r^2$. Na každú z nich je vektorové pole intenzity kolmé a veľkosť intenzity je v rámci jednej plochy konštantná. Toto znamená okrem iného veľmi jednoduchý výpočet **toku poľa intenzity danou plochou**:

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E \tag{4}$$

Zo vzťahu pre veľkosť intenzity

$$E \, = \, \kappa \frac{M}{r^2}$$

(po prenásobení 4π) vieme, že tento **tok intenzity plochou je úmerný hmote vo vnútri**:

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E = 4\pi\kappa\, M \tag{5}$$

Obe strany (5) vieme prepísať ako objemový integrál. Ľavú stranu pomocou Gaussovej vety ktorá dáva do súvisu tok poľa uzavretou plochou S a divergenciu poľa v objeme V ktorý táto plocha ohraničuje. Hmotu na pravej strane vieme prepísať ako objemový integrál hustoty ρ. Potom máme

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{E}\, dV = 4\pi\kappa \iiint_V \rho\, dV$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi\kappa\rho \tag{6}$$

Teda divergencia intenzity gravitačného poľa je úmerná hustote hmoty, alebo, povedané ľudovo, hmota pôsobí ako zdroj gravitácie. Ešte si spomeňme že intenzita je záporne vzatý gradient potenciálu $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ a dosaďme to do (6):

$$-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi = 4\pi\kappa\rho \tag{7}$$

Divergencia gradientu je **laplacián**, suma druhých derivácií: $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi = \Delta\phi$, takže (7) je možné prepísať do tvaru zodpovedajúceho tzv. **Poissonovej rovnici**, ktorá dáva do súvisu **hustotu hmoty budiacej gravitačné pole a laplacián gravitačného potenciálu toho poľa**:

$$\Delta\phi = -4\pi\kappa\,\rho \tag{8}$$

A tu je krivosť! Ak ju nevidno, tak aj príležitosť ujasniť si **geometrický význam laplaciánu**.

1.7.2 Stredná krivosť a laplacián

Z technického hľadiska je laplacián v euklidovskom priestore v kartézskej sústave diferenciálny operátor ktorý môže byť vyjadrený sumou druhých derivácií podľa jednotlivých súradníc:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \, ... \, + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Teda v jednorozmernom priestore je to jednoducho druhá derivácia. Táto súvisí s **krivosťou grafu funkcie**, na ktorú operátorom druhej derivácie pôsobíme. Ako je jasné už zo základného diferenciálneho počtu, v jednom rozmere majú druhú deriváciu (1-rozmerný laplacián) na súvislom intervale (nielen v jednotlivých bodoch) všade nulovú práve lineárne funkcie, ktorých grafom je priamka - krivka bez krivosti. Pre lineárnu funkciu platí, že jej hodnoty sú rovnomerne rozložené v zmysle, že hodnota v danom bode je priemerom hodnôt v susedných bodoch.

Vo vyšších rozmeroch nulový laplacián nejakej funkcie $\Delta f = 0$ neznamená nevyhnutne že graf f je plochý v euklidovskom zmysle (hoci funkcia grafom ktorej je rovina má iste laplacián nulový), ale graf s nulovou tzv. **strednou krivosťou**. Nulová stredná krivosť v nejakom bode znamená, že hodnota funkcie je tu **priemerom hodnôt v susedných bodoch**. Nenulová stredná krivosť kvantifikuje odchýlku od takéhoto rovnomerného rozloženia hodnôt. Grafy funkcií troch a viac premenných nevieme vizualizovať (iba ich priemety do nižších rozmerov), lebo by sme potrebovali veľa rozmerný priestor (3 a viac rozmerov pre premenné, jeden pre funkčnú hodnotu). Ale pojem laplaciánu a strednej krivosti tam pokojne môžeme preniesť a opierať sa o príslušný matematický aparát aj tam kde nás vizuálna predstavivosť nemôže viesť.

Z tohto pohľadu teda Poissonovu rovnicu (8) môžeme vnímať ako **súvis medzi rovnomernosťou rozloženia hodnôt gravitačného potenciálu ϕ v priestore a hustotou hmoty ρ v ňom**. Tam, kde je hustota nulová, je potenciál rozložený v priemere rovnomerne, v zmysle že stredná krivosť vyjadrená laplaciánom je nulová ($\Delta\phi = 0$). Teda pre potenciál v takej oblasti platí, že v každom bode je jeho hodnota priemerom susedných hodnôt. Tam, kde je potenciál rozložený nerovnomerne (stredná krivosť $\Delta\phi \neq 0$), sa podľa Poissonovej rovnice nachádza nejaká hmota ($\rho \neq 0$).

Einsteinove rovnice (1) hovoria čosi podobné, aj keď toho hovoria viac a všeobecnejšie, a krivosť v nich spomínaná súvisí so samotným časopriestorom. To je však aj dôsledkom toho, že tamojší potenciál je desaťzložkový a týchto 10 funkcií predstavuje nezávislé zložky **metriky, geometrickej charakteristiky časopriestoru**. Čo sa týka druhej strany rovnice, zdrojov gravitačného poľa, Poissonova rovnica uvádza ako zdroj nerovnomernosti gravitačného potenciálu nenulovú hustotu hmoty ρ. Einsteinove rovnice počítajú s hmotou ako s formou energie, a ako taká má svoje miesto v objekte $T_{\mu\nu}$ na pravej strane (a majú tam miesto ešte aj všelijaké iné aspekty, nakoniec všeobecná relativita je všeobecnejšia teória ako Newtonova gravitácia.)

Každopádne, obe verzie, newtonovská aj einsteinovská hovoria o tom, že prítomnosť hmoty má dopad na geometriu v okolí.

1.7.3 Hypotheses non fingo?

Ešte jedna zaujímavá analógia je medzi newtonovskou a einsteinovskou gravitáciou. Keď Newton predstavil svoj model, priniesol mimoriadne zjednotenie do fragmetovaných poznatkov z mechaniky. Zrazu bolo možné popísať padanie jabĺk a pohyb Mesiaca ako prejavy jedného princípu. A predsa, už v časoch jej vzniku bolo jasné (Newtonovi samotnému azda viac ako mnohým iným), že sú tu voľné konce. Sám sa vyjadril že nevie akým agentom gravitácia pôsobí, ale že je absurdné aby tam niečo, čomu ešte nerozumie nebolo. Vo všeobecnej relativite, nie ako matematickej hračke, ale ako pokuse o popis nášho časopriestoru, je tiež niekoľko vecí o ktorých vieme, že o nich veľa nevieme - jednak sú to vlastnosti objektu $T_{\mu\nu}$ na veľmi malých škálach a vlastnosti podivného člena $\Lambda g_{\mu\nu}$ zodpovedajúceho temnej energii, ktorý sa do rovníc (1) zahŕňa na základe potreby, na ktorú poukázali kozmologické pozorovania na veľkých škálach.

Nejaký ďalší Einstein či Newton azda príde s modelom, ktorý elegantne popíše tieto nejasnosti, aby sme sa mohli posunúť k ďalším veciam ktoré ešte ani popísať nevieme.

1.8 Energia a časový vývoj - výhľady ku kvantovej mechanike

Klasická newtonovská mechanika sa dá skúmať v **rôznych formalizmoch**. Tradične sa na školách prezentuje mnohoraké použitie druhého Newtonovho zákona, čo zahŕňa diferenciálne rovnice druhého rádu pre polohu skúmaného telesa. Ale newtonovský formalizmus nie je jediný, ktorý sa dá použiť. Klasická mechanika sa dá skúmať aj v iných (lagrangeovský, hamiltonovský, variačné princípy). V nasledujucej časti si spomenieme prvky tzv. **hamiltonovskej formulácie**, aj za účelom neskoršieho poukázania na **spoločné črty klasickej a kvantovej mechaniky**, ktoré v tomto formalizme vidno azda ľahšie ako v newtonovskom.

Zdôraznime že sa nejedná o inú teóriu, ale o iný formalizmus. Prečo prepisovať čo funguje do iných tvarov a foriem? Veď s Newtonovými rovnicami sa dá namodelovať čo klasická fyzika umožňuje namodelovať. Je to trochu ako pýtať sa, načo vedieť používať rôzne súradné sústavy. Veď kartézska je dobrá a jednoduchá, načo sférické a parabolické a cylindrické komplikácie - až kým človek nenarazí na rovnice, ktoré v jedných súradniciach vyzerajú ako zmes členov s veľmi nejasnou interpretáciou, a v iných sa riešia viac menej pohľadom… Iný formalizmus niekedy umožňuje situáciu lepšie prečítať, a niekedy umožňuje zovšeobecnenia ktoré v inom nevidno [8].

Pozrime sa, čo vlastne klasická mechanika robí. Zo znalosti stavu systému teraz nám pohybové rovnice posyktujú predpoveď pre stav neskôr (alebo aj spätne). **Časový vývoj systému predstavuje postupnosť (parametrizovanú časom) jednotlivých stavov. Pohybové zákony (Newtonove v klasickej mechanike) nám umožňujú zrekonštruovať túto postupnosť zo znalosti jedného jej člena.**

Tu si treba seriózne uvedomiť, čo je vlastne **stav** systému. Vezmime veľmi jednoduchý systém - hmotný bod. Pri matematickom pohľade na Newtonov druhý zákon pre toto teleso

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{9}$$

vidíme, že sa jedná o diferenciálnu rovnicu druhého rádu, nezávislou premennou je čas t (parameter vývoja), závislou sú súradnice polohy telesa $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Rovnica obsahuje nanajvýš ich druhé časové derivácie, dané jednak hmotnosťou telesa m a pôsobiacou silou $\vec{F}(t)$). Už v jednorozmernom prípade (keď skúmaným systémom je jeden hmotný bod s jedným stupňom voľnosti $x(t)$, (napríklad môže sa pohybovať len v smere jednej osi) si takáto rovnica druhého rádu vyžaduje dve počiatočné podmienky - hodnotu neznámej funkcie a jej prvej derivácie v nejakom konkrétnom (obvykle počiatočnom) čase. Stav jedného hmotného bodu teda tvoria jednak údaje o polohe $\vec{r}$, a údaje súvisiace s hybnosťou $\vec{p}$.

Reprezentácia stavu systému je jedným z dôležitých **rozdielov medzi klasickou a kvantovou fyzikou**. Tu nejdeme robiť rýchlokurz kvantovej mechaniky, ale máme ju vo výhľade, keď chceme predsatviť alternatívny zápis Newtonových rovníc, preto si z nej spomeňme aspoň čosi.

Pohybovým zákonom v kvantovej mechanike je **Schrödingerova rovnica.** Akási kvantová alternatíva k Newtonovým zákonom. Otázkou je, koľko z tej analógie je jasnej keď sa na spomenuté dva zákony pozrieme, ešte aj po zbežnom predstavení jednotlivých symbolov čo sa v nich vyskytujú. Keby sme položili otázku, ako sa klasický a kvantový zákon líšia, možno by sme mali problém rozhodnúť kde vôbec začať zoznam rozdielov, pretože je ťažké vyjadriť odlišnosť dvoch vecí bez toho, aby sme videli aspoň niečo spoločné k čomu vyjadrenie vzťahovať.
Kto videl aspoň základy hamiltovoského formalizmu aplikovaného na klasické problémy, môže mať akú-takú predstavu o tom, že z matematického hľadiska sú popisy kvantovej a klasickej mechaniky v istom zmysle analogické. Preštudovať hamiltonovský formalizmus do hĺbky žiada viac času ako je v bežných kurzoch pre technické obory k dispozícii; ale dajú sa prezentovať aspoň nejaké časti. Ilustrujme si spoločné aspekty Newtonovej a Schrödingerovej rovnice na systéme predstavujúcom jeden elektrón v nejakom potenciáli (poli konzervatívnej sily). Klasický a kvantový popis:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \tag{10}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}_E\Psi \tag{11}$$

kde symboly znamenajú nasledovné: $\vec{F}$ - sila, m hmotnosť, t čas, $\vec{r}$ poloha, i komplexná jednotka, $\hbar$ redukovaná Planckova konštanta, Ψ vlnová funkcia, $\hat{H}_E$ hamiltonián (index indikuje že sa jedná

[8] A bez ambícii vysvetliť tu vec bližšie, už sa vo fyzike stalo že jeden formalizmus sa ukázal akosi hlbší ako iný, aj keď na začiatku sa javili ako rovnocenné formulácie.

o operátor energie, kvantový analóg klasickej veličiny).

Časové derivácie, teda spojitosti s časovým vývojom, sa objavujú v oboch zákonoch; ale jedná sa o prvú deriváciu v (11) a druhú v (60). Treba si ujasniť, čo sa vlastne vyvíja - aký je vzťah medzi objektmi v rovniciach (60) a (11). Snahou je ukázať, že v pozadí oboch modelov je spoločný princíp - **časový vývoj stavu súvisí s energiou**.

Prepíšme rovnice do tvaru, v ktorom vystupujú kľučové pojmy (**stav, energia, vývoj**) tak explicitne ako sa dá. Ak študovaným systíémom je spomínaný elektrón, jeho **stav v kvantovej mechanike** je reprezentovaný tzv. **vlnovou funkciou** Ψ (teraz sa jej nevenujeme hlbšie, len ju zmieňujeme), a v **klasickej mechanike polohou a hybnosťou** $(\vec{r}, \vec{p})$. Teda v záujme porovnania mechaník by sme mali radi v (60) explicitne $(\vec{r}, \vec{p})$. Toto sa urobí jednoducho, ak zvážime ako hybnosť súvisí s čarovou deriváciou polohy:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\vec{p}}{m} \end{aligned} \tag{12}$$

Teraz máme dve rovnice prvého rádu (12) namiesto jedej rovnice druhého rádu (60). Avšak bolo dosiahnuté viac ako len výmena rádu a počtu rovníc, totiž že sa začína rysovať analógia s (11). Na ľavej strane(12) teraz explicitne vystupuje prvá časová derivácia klasického stavu systému, podobne ako je prvá derivácia kvantového stavu v (11).

Teraz dajme do súvisu pravé strany. V kvantovom prípade je to **operátor energie (hamiltonián)** pôsobiaci na stav. Klasická verzia môže pôsobiť v tomto ohľade veľmi odlišne. Avšak dostať aj tu do obrazu energiu nie je veľký problém.
Predpokladali sme **konzervatívnu silu**, teda môže byť vyjadrená ako **záporný gradient vhodného potenciálu**. Aby bola jasnejšia analógia s pravou stranou (11), chceli by sme aj v klasickom prípade dostať do obrazu celú energiu, nielen potenciálovú časť. Toto nie je problém urobiť; keďže kinetická energia závisí od hybnosti, nie od polohy, môže byť beztrestne vsunutá do pozičného gradientu:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} E_p = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}(E_p + E_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} E = -\left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z}\right)$$

Týmto prepisom sily ako záporným gradientom energie máme polovicu (12) vyjadrenú s energiou na pravej strane. Aby sme podobnú vec dosiahli aj pre druhú polovicu, všimnime si, že pravá straba môže byť prepísaná ako derivácia kinetickej energie ($E_k = p^2/2m$) podľa hybnosti. Tentoraz využijeme skutočnosť, že potenciál nezávisí na hybosti v prípadoch ktoré tu uvažujeme, a teda môžeme do derivácie bezpečne popri kinetickej energii prepašovať aj potenciálnu:

$$\frac{\vec{p}}{m} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E_k = \vec{\nabla}_{\vec{p}}(E_k + E_p) = \vec{\nabla}_{\vec{p}} E = \left(\frac{\partial E}{\partial p_x}, \frac{\partial E}{\partial p_y}, \frac{\partial E}{\partial p_y}\right)$$

.

A ešte všetko poskladajme dokopy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\vec{p} \\ \vec{r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\vec{\nabla}_{\vec{r}} E \\ \vec{\nabla}_{\vec{p}} E\end{pmatrix}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}_E \Psi$$

Teraz oba zákony, klasický aj kvantový, vyjadrujú predstavujú **časovú zmemu stavu** (na ľavých stranách prvé časové derivácie polohy-hybnosti alebo vlnovej funkcie) v súvislosti s **energiou** (na pravo). Matematické objekty a operácie sú samozrejme odlišné [9] - veď kvantová a klasická mechanika sa líšia hlbšie ako len formalizmom.

Ale spoločný princíp tu je: **Energia je hlboko zviazaná s časovým vývojom.**

[9] Hoci predsa len podobnejšie ako táto stručná prezentácia umožňuje ukázať.

2 Svetlo na konci rovníc

2.1 História

Dnes už deti na základnej škole vedia odrecitovať poučku o svetle ako elektromagnetickom vlnení. Že však elektrina a magnetizmus patria do jedného prívlastku, a že by niečo mali mať so svetlom, nebolo zrejmé ešte nejaké dve storočia dozadu. Dokonca ešte dve desaťročia po uverejnení Maxwellovej práce z roku 1865, zhŕňujúcej mnohé experimentálne aj deduktívne nazbierané aspekty elektromagnetizmu, bolo treba namáhavo hľadať po vtedajších univerzitách ľudí, ktorí by teórii rozumeli alebo aspoň v nej videli niečo hodné pozornosti. Môže to mať dočinenia s Maxwellovou prezentáciou - v čase vydania jeho práce bola písaná zložitých formalizmom, primatematickým pre fyzikov a prifyzikálnym pre matematikov. Po úspechu Newtonovskej mechnaniky bola snaha vysvetľovať a vizualizovať všetko cez mechanické sily medzi nejakými objektami, reprezentované s napätiami a tlakmi v nejakom médiu. Úporne pretrvávajúca predstava svetlonosného éteru ako bežného média s množstvom mechanických vlastností, ktoré bolo zložité až nemožné zmieriť s experimentálnymi dátami, navádzala ľudí hľadať zložité vizualizácie toho, čo rovnice predstavovali. Navyše, Maxwell sa ukázal ako skromný človek, a keď mal možnosť hovoriť o svojej práci pred rozsiahlym publikom, spomenul ju len okrajovo, na konci svojej prednášky venovanej inému modelu, referujúc ten svoj ako *inú teóriu elektriny, ktorá sa mu páči.* Notácia neveľmi priateľská bežnému užívateľovi matematiky tiež nepomohla. Ľudia citliví viac na rýchle závery a vonkajší rozruch ako na hĺbku ju potom ľahko prehliadli.

2.2 Črty a kontakty

Súbor základných rovníc klasického elektromagnetizmu sa volá po Maxwellovi, pričom jednotlivé časti nesú iné mená - po Maxwellovi je vlastne priamo pomenovaný len jeden člen v jednej z nich. Prečo teda súbor nesie jeho meno? Gaussov zákon pre elektrické a magnetické pole, Ampérov zákon pre prúdy a Faradayov zákon pre indukciu boli známe pred Maxwellovou prácou, ale ním dodaný člen (Maxwellov posuvný prúd) ich zošil konzistentne dokopy. Pri spätnom pohľade mohla byť vodítkom snaha o symetriu medzi elektrickým a magnetickým poľom alebo konzistentnosť s rovnicou kontuinuity. Každopádne, po zahrnutí sa ukázala nielen nezničiteľnosť elektrického náboja a nerozlučnosť elektriny a magnetizmu, ale aj ich súvis so svetlom. Ešte poznamenajme, že Maxwellove rovnice sú pri troche oboznámenia sa s vektorovou analýzou jednoduché a názorné v ich dnešnej formulácii, ale táto elegancia je ťažšie badateľná v ich pôvodnom vyjadrení (1865, A dynamical theory of the electromagnetic field), kde boli zákony v nich skryté rozpísané do cca 20 rovníc (nie nezávislých). Nájdenie jednoduchšieho formalizmu pre dané účely si žiada niekoho, kto je ochotný predrať sa divokejšou verziou, nestratiť zo zreteľa pointu, vyšliapať potom v divočine skratky a sprístupniť jednoduchú pointu masám. Tu to bola do značnej miery zásluha Olivera Heavisida, Josiaha Willarda Gibbsa and Heinricha Hertza.

Maxwellovým rovniciam sa treba venovať jednotlivo aj po skupinkách, pretože vzťahy medzi jenotlivými rovnicami sú porovnateľne dôležité ako každá z rovníc osobitne. Jedná sa o previazaný systém, ale jeho previazanosť bolo ťažké vidieť, kým sa skúmali len jednotlivé špeciálne prípady.

Upozornime na niekoľko výrazných čŕt týchto rovníc. Spomeňme aj veľmi stručne niektoré prepojenia na rozličné oblasti fyziky.

Poľnosť - máme tu **parciálne** diferenciálne rovnice, v newtonovskej mechnaike boli obyčajné. Aj v elektromagnetizme sa síce operuje s druhým Newtonovým zákonom v uvislosti s Lorenzovou silou, ale dynamika polí samotných je daná Maxwellovými rovnicami. Sú parciálne, **prvého rádu, lineárne**. Princíp superpozície teda môže hrať veľkú rolu, aj s tým súvisiaci rozpis riešení do vhodných bázových funkcií. Vlastné stavy význačných operátorov teda budú matematicky dôležité.

S poľnosťou súvisiaca **lokálnosť**. Pole tu už nie je len akási pomocná štruktúra, "sila na jednotkový náboj ktorý by hypoteticky mohol byť v danom mieste". Sú tu difeneciálne rovnice popisujúce dynamiku týchto polí, časový vývoj ich samých. Polia majú kapacitu niesť hybnosť a energiu. Ako také sú istým náznakom zbavenia sa "pôsobenia na diaľku", ktoré toľko znepokojovalo Newtona. Dva náboje interagujú s poľom vo svojom bezprostrednom okolí, táto interakcia sa poľom prenáša až k druhému náboju.

Sú tu isté prepojenia s kvantovou mechnaikou. Jedná sa o dvojvrstvový popis dejov. Rovnice hovoria o vývoji veličín - polí v prípade elektromagnetizmu či vlnovej funkcie v prípade kvantovej mechaniky - na ktoré nemáme taký priamy dosah ako na ich kvadráty. Ďalšou zo smeroviek je kvantovanie náboja. Podobne je to s vlastnosťami trvalých magnetov a stabilitou atómov. Toto všetko už síce nevyplýva z Maxwellových rovníc, ale to je práve jeden z náznakov, že teóriu treba rozšíriť.

Prepojenia s klasickou mechanikou sú jednak formou spomínanej Lorenzovej sily, ale veľmi výrazné sú aj analógie s mechanikou tekutín.

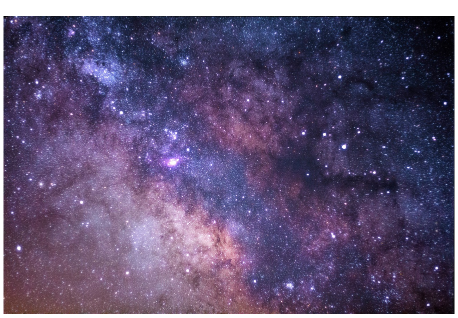
Prepojenie na špeciálnu relativitu je veľmi výrazné. Z Maxwellových rovníc nám vyplynie akási invariantná (voči inerciálne sa pohybujúcim pozorovateľom) rýchlosť, čosi o čom klasická mechanika nechyrovala. Závislosť rozdelenia elektromagnetického poľa na elektrickú a magnetickú časť je závislé od pozorovateľa. Veľmi to evokuje podobnú závislosť delenia časopriestorového intervalu na časovú a priestorovú zložku.

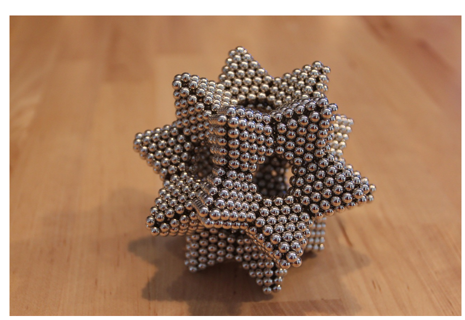
2.3 Jedna zo štyroch

Elektromagnetická interakcia je momentálne vnímaná ako jedna zo štyroch fundamentálnyhc síl v prírode. Do istej miery sa jej matematický model prepája s modelmi slabej a silnej interakcie, s týmto prepojením sú však spojené rozličné veľké " ale"kvantovej teórie poľa. S gravitáciou v einsteinovskom zmysle je ťažké (resp tak sa nám to javí teraz) prepojiť ktorúkoľvek z nich. Avšak podoba modelu klasického elektrostatického poľa s newtonovskou gravitáciou, spočívajúca v poklese intenzity poľa so štvorcom vzdialenosti od zdroja je veľmi nápadná, a bola takou dávno:

$$E_g = \kappa \frac{M}{r^2} \qquad\qquad E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Elektromagnetická interakcia voči gravitačnej veľmi výrazná v nasledujúcom zmysle: Už pár ťahmi hrebeňom vieme zo svojich vlasov nazbierať dosť náboja na to, aby sme kompenzovali gravitaťnú príťažlivosť celej zemegule. Podobne veľkú silu je možné vyvinúť obyčasjnou magnetkou ktorá drží nákupný zoznam na chladničke. Táto magnetka kompenzuje príťažlivosť celého zemského jadra, plášťa a všetkých oceánskych vôd... Napriek tomu však pohyb tejto zemegule a zvyšku slnečnej sústavy vyzerá byť podľa gravitačných povelov, nie elektromagnetických.





Obr. 8: Po troche, ale bez kontra-tendencií sa nazbierajú obrovské sily ako pravidlá tanca celých galaktických kôp. A aj veľké sily sa vedia efektívne stratiť v oblastiach, kde idú proti sebe.

Prečo? Kým "gravitačný náboj", ktorým sa častice angažujú v danom poli, má len jedno znamienko, elektrický má dve, aj magnet má dva póly. Gravitácia nevie byť odpudívá, elektromagnetická sila vie. Teda je možné ju kompenzovať, odtieniť, vyrušiť. Toto, spolu s nápadnou vyrovnanosťou kladného a záporného elektrického náboja, a s výskytom magnetických pólov len vo vyrovnaných pároch, je aj dôvodom, prečo na veľkých škálach vyhráva gravitácia.

2.3.1 Elektrický náboj

Mimochodom, prečo nehovoríme o magnetickom náboji? Veď elektromagnetizmus je už jedno slovo... Lepšia otázka by asi bola, prečo nehovoríme o elektromagnetickom náboji. Azda z lenivosti a tradície: Existenciu toho, čomu hovoríme elektrický náboj, a neexistenciu toho, čomu by sme hovorili magnetický náboj, možno chápať takto: Nepoznáme niečo, čo by vytváralo nami merateľné magnetické pole štýlom monopolu. Niečo, čo vytvára nami merateľné elektrické pole ako monopol, je to, čomu sa bežne hovorí elektrický náboj. Samozrejme dá sa nájsť elektrický dipól, ale magnetický monopól nie. Pritom však objekt nesúci elektrický náboj je zdrojom magnetického poľa. Ak sa náboj voči nám nepohybuje, necítime jeho magnetické pole našimi testovacími nabitými časticami (spin teraz nechajme bokom). Ale pohybujúci sa elektrický náboj *je* zdrojom elektromagnetického poľa. O magnetizme sa niekedy hovorí ako o relativistickom jave, lebo pohyb je relativistický pojem. Z makroskopického hľadiska teda môžeme takto zhruba hovoriť. Ale magnetizmus je aj kvantovomechanická vec (tu aspoň spomeňme ten vynechaný spin)- a elektrina ako vec s ním nerozlučne spojená teda tiež. Nepohybujúci sa elekrický náboj je len približný pojem, model, ktorý neobstojí, ak zahrnieme aj kvantovú mechaniku, princíp neurčitosti a spin elektrónu. Teda mohli by sme pokojne hovoriť o elektromagnetickom náboji, lebo nič vykazujúce elektrický náboj nie je celkom bez magnetických aspektov a opačne. Ak sa pohybujeme voči danej nabitej častici, cítime markantné "makroskopicky badateľné"magnetické pole. Ak aj sme v pokojovej sústave priemernej polohy ťažiska častice, stále ostáva jej spin, vnútorný moment hybnosti nerozlučne spätý s magnetickým momentom. (Tento môže byť kompenzovaný momentmi okolitých častíc, ale je tam.) A opačne, nič vykazujúce magnetické vlastnosti nie je bez elektriny. Aj neutrón má magnetický moment - a neutrón je elektricky neutrálny len ako celok, jeho kvarky sú elektricky nabité. (Náboj je kompenzovaný, ale je tam.)

2.3.2 Gravitačný, elektrický náboj a (ne)rovnomernosť rozdelenia

Ako je to s kvantovaním? Toto je vec, ktorú zatiaľ na gravitačných nábojoch - hmotách - nepozorujeme. Nezdá sa zatiaľ, že by všetky hmoty boli celočíslenym násobkom nejakej minimálnej jednotky. Tzv. Planckova hmota je na úrovni cca 20 mikrogramov. Atómy sú podstatne ľahšie. Najľahšie častice vyzerajú byť neutrína, ale nezdá sa, že by si vôbec udržiavali konzistentne svoj hmotnostný stav, a nemáme dôkazy o tom, že by ich "čisté hmotnosti"boli základnou jednotkou pre iné častice. Naproti tomu elektrický náboj, ak je naozaj prezícne zmeraný, sa ukazuje byť vždy celočíselný násobok elementárneho náboja elektrónu. Kvarky ako subnukleárne časti síce javia tretinové náboje, ale kvarky nikam nejdú bez takého doprovodu, ktorý dolňa celkový náboj v partii na celočíslený násobok základného. Pri elektrickom náboji ide naozaj o počet kusov vo vesmíre, a je namieste otázka, prečo je taký vyrovnaný. Vyzerá byť: ak by nebol, pozorovali by sme veľké odpudzovanie nielen na úrovni rovnako nabitých galaxií, ale aj ich rozpad (gravitácia by nevedela kompenzovať elektrické odpudzovanie). Dá sa azda namietnuť, že rovnováhu predsa netreba vysvetľovať, vysvetlenie žiada odchýlka z nej. V takom prípade však, prečo nie je náboj rovnomerne rozdelený na častice rovnakých hmotností? Prečo je väčšina záporného náboja v ľahkých elektrónoch a väčšina kladného náboja v ťažkých protónoch, namiesto varianty koľko elektrónov, toľko (rovnako ťažkých) pozitrónov a koľko protónov, toľko (rovnako ťažkých) antiprotónov? Toto je vlastne odnož otázky prečo je viac hmoty ako antihmoty, so zdôraznením rovnomernosti a nerovnomernosti pre elektrický, gravitačný náboj a ích vzťah.
Odpoveď vo fyzike zatiaľ nemáme. Vyrovnanosť spomínaných množstiev by ešte nemusela zname-

nať neprítomnosť akejkoľvek energie, nakonie pri strete elektrónu a pozitrónu nie je výsledkom nič, ale energeticky zospovedajúce svetlo. Avšak štruktúry ako ich vo vesmíre poznáme by neprežili. Niekedy sa na to reaguje v zmysle antropického princípu, že keby podmienky neboli, aké sú, nebolo by bytostí, ktoré by sa na ne pýtali. To je komentár, nie odpoveď [10]

2.3.3 Plus mínus číselná os

Na náboj plus, mínus, neutrál sme už tak zvyknutí, že sa nad tým ani nepozastavujeme. Aký iný by mohol byť? Experimentálne to dávalo zmysel: V laboratóriu sa dali všelijako trieť a nabíjať predmety, a rozdeliť na tri kopy - povedzme A,B,C. V skupine A boli tie, čo na blízkosť ostatných (bez ohľadu na príslušnosť k A,B alebo C) nereagovali. V B boli tie, čo odpudzovali všetkých zo svojej skupiny (B) a priťahovali všetkých zo skupiny (A). V skupine C boli tie, čo odpudzovali všetkých zo svojej skupiny (C) a priťahovali všetkých z B. Nebolo potrebné vytvárať ďalšiu kategóriu, každé teleso v laboratóriu sa dalo zaradiť do jednej z týchto troch. Navyše, vhodnou kombináciou predmetov z B a C sa dali vytvoriť objekty patriace do A. Človek ani nemusí vedieť mnoho z algebry, aby videl vhodnosť pomenovať skupiny B,C ako kladné a záporné (alebo opačne, to je už vec konvencie a tradície) a skupinu A ako neutrálnu. Inými slovami, máme tu starú známu číselnú os s jej kladnou a zápornou časťou a nulou medzi nimi. Drvivá väčšina našich matematických modelov je spojená s číslenou osou. Celé, racionálne, reálne čísla... dokonca aj modely euklidovskej roviny či priestorov sú vyskladané ako vhodné kombinácie "nezávislých číselných osí". Možno mnohé úspechy vo fyzike máme skrz túto skutočnosť - že s elektrickým nábojom, ktorý vyzerá byť spojený s hmotou okolo nás veľmi fundamentálnym spôsobom, je práve nami používaný počítací systém tak explicitne konzistentný. Ak potrebujeme niečo vyvážiť, potrebujeme siahnuť vhodne ďalekon na opačnú stranu nášho počítadla. Ani neuvažujeme, že by bolo potrebné aj čosi iné. Ale možno sú iné možnosti. Predstavme si klasické miešanie troch základných farieb (ako ich vníma ľudské oko či mozog). Ak bielu označíme ako neutrál, tak na kompenzáciu trebárs modrého vnemu nám treba siahnuť do dvoch ďalších farebných smerov - červeného a zeleného. To už nie je číslená os, ale akási číselná trojsmerka. Ľudské videnie je komplexná záležitosť a popísaná procedúra je len popisom akýchsi efektívnych javov. Ale v prírode sa napodiv vyskytuje druh náboja, ktorý funguje práve takto: Na to, aby sme niečo kompenzovali, netreba nevyhnutne pridať jeden antikomplement, ale možno to urobiť aj tak, že pridáme dva iné komplementy. Je to tzv farebný náboj (názov pochádza práve z analógie ľudského vnímania farieb) kvarkov, subnukleárnych častíc. Na farebne neutrálnu kombináciu treba buď farebne neutrálnu časticu, alebo tri komplementárne farebné náboje...alebo farebný a antifarebný. Tu už analógia s videním farieb trochu zlyháva. Ale odhliadnuc od toho, tu je zábavná vec, spojenie s elektromagnetizmom: Kvark a antikvark, napríklad modrý a antimodrý, sa líšia znamienkom elektrického náboja! Ťažko to zobraziť. Je tu samozrejme pokušenie vziať euklidovský trojrozmerný priestor, s troma kolmými osami, každá majúca kladnú a zápornú časť, a skúsiť či skladanie 3D vektorov nebude dobrý model. Ale nie je to celkom to, čo skladanie farebných nábojov. Trojrozmerný vektor ťažko môže reprezentovať stav vo farebnom priestore, lebo dvomi kolmými vektormi v smere x a y nevieme kompenzovať vektor v smere z, kým dvomi "kolmými"nábojmi - modrým a zeleným - vieme vyvážiť červený. Ktovie, možno by bola fyzika jednoduchšia, keby sme našli nejaké bytostne trojkové číselné modely.

[10] Ak niekto znedazdajky dostane od suseda facku a opýta sa prečo, asi nebude považovať za adekvátne vysvetlenie, že keby facku nedostal, nemohol by sa na ňu pýtať.

2.4 Maxwellove rovnice

Po toľkých rečiach napíšme konečne slávne Maxwellove rovnice. Píšeme ich tu ako vyzerajú vo vákuu (v zmysle nie v prostredí s vlastnou permitivitou a permeabilitou)

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

$$\tag{15}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \qquad \oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S} + \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S}$$

$$\tag{16}$$

Poďme ich rozobrať po jednej aj po skupinkách, povedať si o špeciálnych prípadoch a vzťahoch medzi rovnicami. Dvom vyjadreniam Maxwellových rovníc sa hovorí diferenciálny a integrálny tvar. Súvis medzi nimi je veľmi jasný, ak je jasná daná partia vektorovej analýzy (Gaussova a Stokesova veta). Ak tomu tak nie je, je doporučené konzultovať nejaký text o tom pojednávajúci.

Najprv si ujasnime notáciu. $\vec{E}$, $\vec{B}$ predstavujú vektorové polia - intenzitu elektrického poľa a magnetickú indukciu. Často budeme skrátene hovoriť o elektrickom a magnetickom poli. Jednotkou elektrickej intenzity je newton na coulomb alebo volt na meter, jednotkou magnetickej indukcie je tesla:

$$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$[\vec{B}] = \frac{1}{\mathrm{m\ s^{-1}}} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{m\ s^{-1}}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \mathrm{T}$$

Veličina ρ predstavuje hustotu elektrického náboja (jednotkou je C m^{-3}), teda objemový integrál z nej predstavuje celkový náboj Q v danom objeme:

$$\iiint_V \rho dV = Q$$

Veličina $\vec{J}$ predstavuje plošnú hustotu prietoku náboja, náboj pretečený jednotkou plochy za jednotku času (jednotka $\mathrm{Cm^{-2}s^{-1}} = \mathrm{Am^{-2}}$). Po preintegrovaní cez plochu teda získavame prúd tečúci skrz túto plochu:

$$\iint_S \vec{J}.d\vec{S} = I$$

Náboj Q a jeho prúd I spolu samozrejme súvisia. Keďže náboj celkovo nevzniká a nezaniká, len sa presúva, musí pri nenulovej bilancii toku z nejakého objemu V ohraničeného uzavretou plochou ∂V stúpať alebo klesať množstvo náboja dnu (stúpať ak viac prišlo ako vyšlo, klesať v opačnom prípade):

$$\oiint_{\partial V} \vec{J}.d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \tag{17}$$

Ak na tok $\vec{J}$ cez plochu použijeme Gaussovu vetu

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{J}dV = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

dostávame sa postupne k diferenciálnemu tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0 \tag{18}$$

Vzťah (18), resp. (17) predstavuje **rovnicu kontinuity, zákon zachovania elektrického náboja**.

Permeabilita μ je mierou magnetizácie prostredia pod vplyvom aplikovaného magnetického poľa. Je vlastnosťou materiálu vypĺňajúceho daný priestor a dá sa povedať, aj priestoru samotného. Táto vákuová časť závislosti sa označuje ako μ_0. Jednotkou je henry na meter, alebo newton na kvadrát ampéra. Celková permeabilita je potom súčin vákuovej a relatívnej (voči vákuu) $\mu = \mu_r\mu_0$. Pre vákuum potom $\mu_r = 1$. Permitivita ϵ je mierou polarizácie prostredia pod vplyvom aplikovaného elektrického poľa. Je vlastnosťou materiálu vypĺňajúceho daný priestor a priestoru samotného, pričom vákuová časť sa obvykle značí a ϵ_0 a podobne ako v prípade permeability, je celková permitivita súčinom vákuovej a relatívnej časti $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$. Jednotkou ϵ_0 je farad na meter, alebo coulomb na volt na meter. Tu sa budeme zaoberať len vákuovým prípadom.
Teraz si ujasnime integračné domény v integrálnej verzii Maxwellových rovníc. V zásade sa jedná o vzťahy integrálov cez nejaké domény a ich hranice a časovú zmenu týchto integrálov.Jednoduchý, dvojný alebo trojný integrál naznačuje rozmernosť domény, cez ktorú sa integruje. Krúžok na integrále symbolizuje uzavretosť integračnej oblasti, teda ide buď o integrál po uzavretej krivke ∂S ohraničujúcej otvorenú plochu S v prípade $\oint_{\partial S}$, alebo o integrál po uzavretej ploche ∂V ohraničujúcej nejaký objem V v prípade $\oiint_{\partial V}$. Označovať hranice uzatvárajúce nejakú oblasť Ω ako $\partial\Omega$ má svoju tradíciu a vcelku dobrý dôvod v teórii diferenciálnych foriem[11]. Skalárny súčin vektorového poľa a elementu krivky, napríklad $\vec{E}.d\vec{l}$, preintegrovaný pozdĺž uzavretej krivky, je mierou cirkulácie poľa $\vec{E}$, pozdĺž tejto krivky. Vektor $d\vec{l}$ si možno predstaviť ako infinitezimálne posunutie pozdĺž krivky. Pre infinitezimálne malú krivku dostávame rotáciu poľa $\vec{E}$ v bode predstavujúcom stred infinitezimálnej plochy ohraničenej spomínanou slučkou, násobenú skalárne touto plôškou:

$$\vec{E}.d\vec{l} = \vec{\nabla} \times \vec{E}.d\vec{S}$$

Skalárny súčin vektorového poľa a elementu plochy, napríklad $\vec{E}.d\vec{S}$, predstavuje tok touto plôškou. Nezabudnime, že vektor $d\vec{S}$ má smer normály na danú plochu [12] a tok poľa je najefektívnejší, ak ide rovnobežne s touto normálou, a nulový, ak tečie pozdĺž plochy, teda vôbec nie cez ňu. Preintegrovaním po uzavretej ploche vlastne získavame bilanciu toku von a dnu - pre infinitezimálne malú plochu tak získavame divergenciu poľa v bode predstavujúcom stred infinitezimálneho objemu ktorý tá plocha ohraničuje, násobenú týmto objemom:

$$\vec{E}.d\vec{S} = \vec{\nabla}.\vec{E}dV$$

Toľko k značeniu, poďme si rozobrať Maxwellove rovnice aj po významovej stránke.

[11] ktorá je doporúčaná na preštudovanie ako lepšia alternatíva v prípadoch, keď by sa človek chystal čas horšie zabiť

[12] Čo sa orientácie týka, je daná konvenciou: Ak sa jedná o uzavretú plochu, normála je kladná smerom von. Ak sa jedná o uzavretú plochu, potom smer normály súvisí s orientáciou ohraničujúcej krivky: Keď obiehame hranicu v smere hodinových ručičiek, orientácia normály je podľa pravidla pravej ruky.

2.4.1 Gaussov zákon pre elektrické pole

pozrime bližšie na prvú rovnicu

$$\oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Je to veľmi názorný zákon. Ak tok poľa z nejakej oblasti nie je vyvážený (celkovo nulový, teda koľko dnu, toľko von), potom tam musia byť nejaké pramene alebo pohlcovače, teda kladné alebo záporné náboje, a to v nevyváženim počte, aby zodpovedali za bilanciu toku [13]. Použitím Gaussovej vety o divergencii [14]

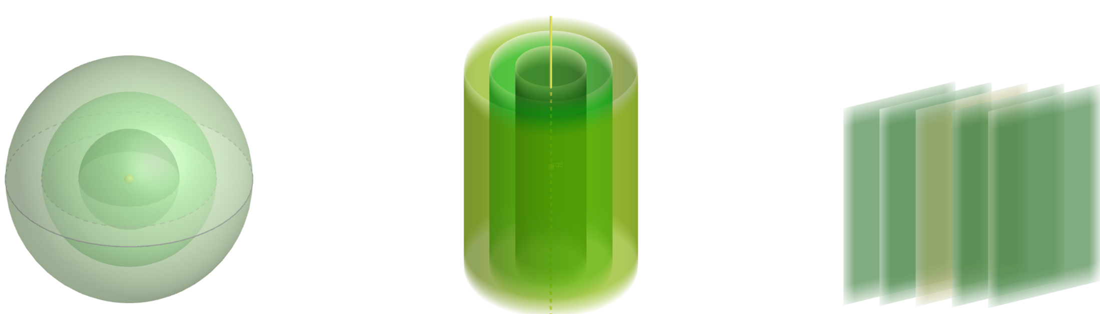
$$\oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{E} dV \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dostávame súvis divergencie a hustoty náboja, teda diferenciálnu verziu.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Prvá Maxwellova rovnica nám okrem iného hovorí, že existujú zdroje elektrického poľa, elektrické náboje. Nehovorí, že by v oblastiach bez nábojov bolo pole nevyhnutne nulové; v takých oblastiach je len nevyhnutne nulová divergencia tohto poľa. Pre oblasť s celkovo nulovým tokom cez jej hranicu nemusí nevyhnutne platiť, že tam žiadne náboje nie sú - len že je tam toľko kladného ako záporného náboja. Z grafického hľadiska prvá rovnica hovorí, že čiary znázorňujúce prúdnice tohto poľa majú svoje význačné počiatky (vychádzajú z kladných nábojov) aj konce (na záporných nábojoch).

Známy Coulombov zákon pre intenzitu elektrického poľa v okolí bodového náboja a jej pokles so štvorcom vzdialenosti je len špeciálnym prípadom prvej Maxwellovej rovnice. Podobne azda trochu menej známe vzťahy pre závislosť intenzity a vzdialenosti od nabitého dlhého drôtu a veľkej nabitej roviny (ideálne nekonečných rozmerov, aby sa mohla naplno využiť symetria toku v plošnom integrále). Tieto výpočty patria do bežných cvičení v štandardnom kurze elektromagnetizmu, tu len upozornime, že charakter poklesu intenzity so vzdialenosťou sa dá vidieť ešte než sa človek pustí do integrovania: V prípade bodového náboja sú triedami "rovnocenných bo-



Obr. 9: Pokles intenzity pre rozlične symetrické rozloženia nábojov

dov"koncentrické sféry, v prípade dlhého nabitého drôtu (priamky) koncentrické valce, a v prípade nabitej rozsiahlej roviny zas roviny s ňou rovnobežné. Veľkosť týchto tried ekvivalencie závisí od

[13] V elektromagnetizme máme kladný a záporný náboj a je jasné, že jeden bude hrať úlohu prameňa a druhý "pohlcovača", teda že vektor intenzity bude orientovaný z jedného do druhého. Ktorý je ktorý je vec konvencie, a tá sa zaviedla tak, že z kladných nábojov elektrické pole vyteká a do záporných sa prepadá.

[14] Po Gaussovi sa toho volá toľko, že je lepšie trochu rozvinúť prívlastky.

vzdialenosti nasledovne: sféry rastú s druhou mocninou vzdialenosti r^2, plášte valcov s prvou mocnicou vzdialenosti r, a rovnobežné roviny nemenia veľkosť. Tok elekrického poľa bodového náboja sa prerozdeľovaním na plochy rastúce ako r^2 riedi v opačnom pomere r^{-2}, tok poľa nábojov na priamke sa prerozdeľovaním na plochy rastúce ako r riedi v opačnom pomere r^{-1}, a tok nabitej roviny sa so vzdialenosťou nemení, lebo sa prerozdeľuje stále na rovnako veľké plochy.

2.4.2 Gaussov zákon pre magnetické pole

Naproti tomu obdobná rovnica pre magnetickú indukciu hovorí, že jej celkový tok cez ľubovoľnú uzavretú plochu je nulový.

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Použitím Gaussovej vety o divergencii

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{B} dV = 0$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Z grafického hľadiska, magnetické prúdnice (integrálne krivky magnetického poľa) sú vždy uzavreté samy do seba. Teda zdroje magnetického poľa, ak nejaké sú, sa nikdy nevyskytujú izolovane, ale vždy tak, aby dohromady pole malo všade nulovú divergenciu. Pohybujúci sa elektrický náboj je zdrojom magnetického poľa, ale je tu nevyhnutná dvojpólovosť, lebo ide odniekadiaľ niekam. Ak rozlomíme magnet s pólmi vzdialenými 10 cm, získame dva magnety s pólmi dvakrát bližšie pri sebe. A tak ďalej. Narážame tu však na zaujímavú otázku. Povedzme, že v matematike môžeme deliť nejakú úsečku do nekonečna. Ale magnety sú z atómov, a raz narazíme na posledný v rade. Kde je magnetizmus v atóme? Aj v atóme máme pohybujúci sa elektrický náboj, a jeho pohyb zodpovedá za časť magnetického momentu. Povedzme, že rozbijeme atóm na nukleóny a jednotlivé elektróny. Kde sú teraz póly magnetu? Kde sa berie magnetický moment samotného elektrónu? Magnetizmus nie je klasický jav, siaha do do kvantovej teórie a veľmi pravdepodobne za ňu. Keby si však boli Ampére, Maxwell, Faraday povedali, že nemá význam formulovať zákony elektromagnetizmu, kým nie je jasný mechanizmus vzniku zdrojov týchto polí, možno by sme doteraz nemali ani Maxwellove rovnice, ani relativitu, ani kvantovú mechaniku. Podobne Newton formuloval gravitačný zákon s tým, že si bol vedomý toho, že sa jedná o neúplnú teóriu s istými veľkými otáznikmi, mal však našťastie priveľa rozumu na to aby ju preto nechal ležať ladom. Vo fyzike ťažko čakať na všetky súčiastky, lebo kým sme nevideli všetko, ani nevieme, koľko ich ešte čakať. Treba stavať z toho čo máme, počítať s tým, že je to neúplné a že po nás príde niekto kto podopĺňa a poopravuje veci zas na základe toho, čo bude mať k dispozícii on.

2.4.3 Faradayov zákon

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

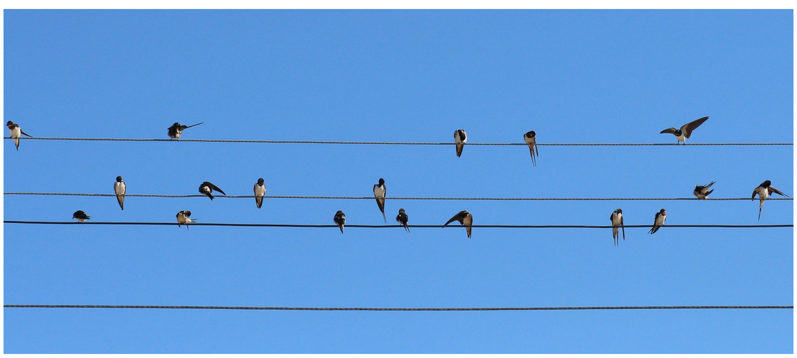
Použitím Stokesovej vety o rotácii

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}).d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dáva sa tu do súvisu cirkulácia elektrického poľa, teda integrál z neho pozdĺž uzavretej krivky ohraničujúcej nejakú plochu, s časovou zmenou magnetického toku cez túto plochu. Integrál elektrického poľa po dráhe je elektromotorické napätie. Znamienko mínus je vyjadrením známeho Lenzovho zákona. Vytvára sa napätie takej polarity, že ním indukovaný pohyb nábojov by vytváral magnetické pole opačné k tomu, ktoré indukovalo toto napätie. Preložme to do trochu bežnejšie ho jazyka. V okolí magnetu je magnetické pole. Ak vezmeme nejaký vodivý drôt a urobíme z neho uzavretú slučku, ohraničuje nám v priestore nejakú plochu. Tok poľa vytvoreného magnetom cez túto plochu je daný jednak veľkosťou pola, veľkosťou plochy, a ich vzájomnou orientáciou, čo všetko je zahrnuté v plošnom integráli $\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$. ak sa tento tok nemení, v drôte sa neindukuje napätie. Ak však magnetický tok nejako v čase meníme, trebárs pohybom magnetu, pohybom slučky, alebo natočením slučky, potom v drôte sa touto zmenou indukuje napätie, teda (keďže kov disponuje pomerne voľnými nábojmi schopnými nasledovať požiadavky vzniknutého elektrického poľa) ampérmeter by tam registroval prúd. Ktorým smerom pôjde tento prúd? Tu veľmi vidno, ako sú Maxwellove rovnice prepletené a ťažko ich vysvetľovať po jednej. Predbehnime trochu a povedzme si, že podľa Amperovho zákona elektrický prúd tiež vytvára magnetické pole. Teda náš prúd indukovaný v drôtenej slučke vytvorí nejaké sekundárne magnetické pole, a jeho polarita bude podľa Lenzovho zákona opačná ako polarita primárneho magnetického poľa. Je to mimoriadne významné mínus, podobne (a nie celkom nezávisle) významné ako znamienko kombinujúce časové a priestorové derivácie vo vlnovej rovnici, alebo relatívne mínus medzi silou smerom do rovnovážnej polohy a výchylkou z tejto rovnovážnej polohy pri harmonickom oscilátore. Šírenie svetla vákuom, cez miliardy megaparsekov pomedzi hviezdy, má svoj odraz aj v tomto mínus. Oproti tomuto je technické využitie tohto javu azda neveľmi impozantné, ale patrí sa ho spome-



Obr. 10: Faradayov zákon prispel k vybudovaniu stretávacích lokalít pre lastovičky.

núť: máme tu možnosť premieňať mechanickú či tepelnú energiu na elektrickú. Voda z priehrady alebo rozpínajúca sa zohriata para môžu mechanicky meniť tok magnetického poľa vo vodivých slučkách jednoduchým otáčaním či už týchto slučiek alebo magnetov, indukujúc tak napätie ktoré sa potom využije - v typických prípadoch zas na nejakú mechanickú prácu alebo teplo. Skladovanie energie v elektrickom poli je teda medzikrok, ale z hľadiska logistiky vcelku významný. Prepraviť energiu elektrickým vedením je často jednoduchšie ako každému navoziť tony uhlia či uránu alebo postaviť pri každom podniku priehradu.

Ešte tu upozornime aj na statický prípad, totiž keď časové derivácie polí sú nulové. V takom prípade platí $\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$, v súlade s konzervatívnosťou elektrostatického poľa, pre ktoré platí, že integrál $\int \vec{E}.d\vec{l} = 0$ závisí len na rozdiele potenciálov medzi koncovými bodmi, a teda pre uzavretú krivku je nulový. Statická situácia je *špeciálny* prípad, samozrejme pokrytý Maxwellovými rovnicami.

2.4.4 Ampérov zákon a Maxwellov prídavok

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

Použitím Stokesovej vety o rotácii

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}).d\vec{S} \qquad = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Toto je rovnica so zaujímavou históriou. Súvis cirkulácie magnetického poľa pozdĺž nejakej uzavretej krivky s prúdom pretekajúcim plochou, ktorú tá krivka ohraničuje, bol dobre experimentálne podložený. V statickom prípade, keď veci nezávisia od času, Maxwellov príspevok samozrejme nehrá rolu a pôvodný Ampérov zákon dáva dobré výsledky. Ale objav súvisu s časovou zmenou toku elektrického poľa (teda nielen toku nábojov) bol práve tým Maxwellovým príspevkom, ktorý robí zo všetkých rovníc, ktoré teraz nesú ako súbor jeho meno, konzistentnú vec. Pri spätnom pohľade sa tento príspevok priam pýta do rovníc kvôli symetrii. Ak zmena magnetického toku indukuje elektrické pole, prečo by zmena elektrického toku neindukovala magnetické? Po vojne je ľahko byť generálom - v čase, keď Maxwell robil štúdie, bolo novinkou že magnetizmus a elektrina vôbec súvisia, a o nejakej hlbokej symetrii v ich vzťahu bolo ťažko hovoriť, než k tomu presekal cestu. Ako bolo spomenuté, aj dnešné značenie komponent už je prispôsobené symetrii, ktorá však pred Maxwellom nebola známa. A netreba zatvárať oči pred faktom, že doteraz používame pojmy, v ktorých by bolo nezmyslom predstierať absolútnu symetriu magnetických a a elektrických pojmov - viď elektrické monopoly a magnetické dipóly. Je to azda spôsobené aj tým, že nevnímame konfiguračný ("pozičný") a hybnostný ("pohybový") priestor celkom symetricky, čo by však ani nebolo celkom namieste vzhľadom na to, že časové a priestorové pojmy síce súvisia veľmi, veľmi úzko, ale čas nie je "len ďalší rozmer", bez ohľadu na skratkovité tvrdenie kdejakých popularizačných aktivít.

Pozrime sa však na nevyhnutnosť prídavku, Maxwellovho posuvného prúdu, z hľadiska zákona zachovania elektrického náboja, teda rovnice kontinuity. Z tohto hľadiska Ampérov zákon nemôže byť "celý príbeh". Vezmime tie dve z Maxwellových rovníc, ktoré obsahujú zdroje, teda hustotu náboja a prúdu - Gaussov zákon pre elektrické pole a hustotu náboja, a Ampérov zákon pre magnetické pole a elektrický prúd. Do tohto druhého pridajme akože zatiaľ neznámu položku $\vec{X}$, a ukážme, čomu sa musí rovnať, ak má byť rovnica kontinuity zachovaná:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{X}$$

Rovnica kontinuity (18) viaže časovú deriváciu hustoty náboja a divergenciu hustoty prúdu. Hustota náboja vystupuje v Gaussovom zákone, hustota prúdu v Ampérovom. Preto poderivujme Gaussov zákon podľa času a vezmime divergenciu Ampérovho zákona, prenásobme vhodne permitivitou a podeľme permeabilitou aby sa ukázali členy z rovnice kontinuity

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\mu_0} vec\nabla.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X}$$

a sčítajme takto upravené rovnice:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X}$$

Nezabudnime, že divergencia rotácie je nulová, a teda máme

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}$$

Ak teda platí rovnica kontinuity, potom pre prídavok k Ampérovmu zákonu musí platiť

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X} = 0$$

$$\vec{\nabla}.(\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{X}) = 0$$

$$\vec{X} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

čo je práve člen dodaný Maxwellom.

2.5 Ďaleko od zdrojov

Vo vákuu, v oblastiach, kde nie sú náboje ani prúdy, stále môžu byť - a sú - elektrické a magnetické polia. Maxwellove rovnice tam vyzerajú nasledovne:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = 0 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

$$\tag{21}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\tag{22}$$

Upozornime tu na pozoruhodnú symetriu medzi poliami. Až na jedno mínus a konštanty, ktoré sú nevyhnutné kvôli konzistentnosti zvolených jednotiek, rovnice vzniknuté zámenou $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa nelíšia od nezamenenej verzie[15]. Môžeme sa pokúsiť formálne rozseparovať ($\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyjadriť nie jedno pomocou druhého, ale každé zvlášť.) Vieme, že rotácia $\vec{B}$ je úmerná časovej zmene $\vec{E}$ a opačne, a vieme aj, že nabla operátor komutuje s časovými deriváciami (keďže parciálne derivácie podľa

[15] Mimochodom, spomenuté mínus nie je žiadnou chybou krásy. Súvisí so štruktúrou časopriestoru a na tej ťažko hľadať chyby krásy.

času a priestoru ako nezávislých premenných komutujú). Vezmime teda rotáciu posledných dvoch rovníc

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{23}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{24}$$

ešte uveďme, že rotácie rotácie je gradient divergencie mínus divergencia gradientu (laplacián) tohto poľa:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - \Delta\vec{V} \tag{25}$$

Potom pre naše polia máme

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

člen rovný divergencii bude s ohľadom na prvé dve Maxwellove vákuové rovnice nulový:

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Jedna vec je, že po (formálnom; stále platí že mimo zdrojov sa tie polia udržujú navzájom, zmena jedného indukuje druhé) rozreťazení obe polia spĺňajú rovnakú rovnicu, žiadne mínus ani konštanta ten súlad neruší. Druhá je, že tá rovnica je vlnová! Toto je niečo, čo už dnes asi nevyvolá spadnutie sánky, jednak kvôli notorickej poučke o elektromagnetickom vlnení a jednak že sme často zvyknutí prehliadať, čo sa vlastne stalo. Tak čo sa stalo? Niekoľko rovníc pozbieraných ako súhrn experimentov s vodičmi a magnetmi, plus dômyselný prídavok, ktorý chýbal do konzistentnosti, k tomu matemetický rozmar "poďme rozreťaziť a prišli sme k tomu, že magnetické a elektrické pole poslúchajú rovnicu formálne rovnakú ako vlny na jazere alebo husľovej strune Faktor $\epsilon_0\mu_0$ stojí pritom na mieste, kde obvykle stojí prevrátená hodnota kvadrátu rýchlosti šírenia vlny. Ešte aj z hľadiska fyzikálnych jednotiek, v ktorých meriame permitivitu a permeabilitu, to sedí. A ak to nestačilo - permitivita a permeabilita boli namerané, a po dosadení číselných hodnôt zodpovedajúcich vlastnostiam vákua prídeme k tomu, že zodpovedajúca rýchlosť zodpovedá cca $2,99.10^8$m s^{-1}, čo súhlasí s nameranou rýchlosťou svetla na povážlivo veľa platných cifier, priveľa na to, aby sme túto zhodu konštánt pripísali náhode alebo experimentálnej neistote.

Nielen že elektrina a magnetizmus nejestvujú separátne - ani od svetla nie sú separátne! Toto je jedno z veľkých zjednotení vo fyzike, porovnateľné s Newtonovým objavom, že Mesiac aj jablká padajú podľa toho istého princípu, napriek tomu že okrajové podmienky robia z tých pádov veľmi odlišné divadlo. A elektromagnetizmus bol kľúčový aj pre mechaniku, bez jeho vĺn by Newton to jablko a Mesiac nevidel. To, že vlny nie sú celý príbeh, nám nemá kaziť radosť z tejto kapitoly fyziky. Ani kvantové zovšeobecnenie nie je celý príbeh.

3 Čriepky termodynamiky a štatistickej fyziky

Postupy vo fyzike sa dajú deliť podľa rozličných kritérií. Jedným z nich je orientácia postupu.

Teórie *zospodu hore* vychádzajú z jednoduchých zákonov pre elementárne objekty v teórii, a vyvádzajú dôsledky pre komplikovanejšie zložené systémy. Príkladom je štatistická fyzika. Pohyb jednotlivých molekúl je v klasickej štatistickej fyzike popísaný cez jednoduchú newtonovskú mechaniku, a potom sa pomocou priemerov a efektívnych hodnôt opisujú pohyby veľkých súborov molekúl.

Teórie *zhora dole* vychádzajú z akýchsi metazákonov, z niekoľkých princípov okrem iného poskytujúcich podmienky pre iné zákony (príkladom je zachovanie energie, neklesanie entropie). Do takejto kategórie patrí klasická termodynamika.

Zaujímavé veci sa môžu objaviť, keď popisujú tie isté javy.

3.1 Štatistická fyzika

Toto je partia fyziky využívajúca matematiku *absurdne veľkých čísel*. Základné numerické manipulácie s bežnými číslami a princíp indukcie, ktorý nám umožňuje zovšeobecňovať aritmetické zákony ďalej a ďalej, nás môžu zvádzať k domnienke, že na číselnej osi sa vyznáme dobre. Jedným z častých problémov je (ne)pochopenie pojmu nekonečna, o ktorom sa uvažuje ako o veľmi veľkom čísle. Koľko nárazov na realitu to spôsobuje! Ultrafialová katastrofa známa v súvislosti so zlyhaním popisu žiarenia čierneho telesa súvisí s rozdielom medzi nekonečným a nie nekonečným. Vysporiadanie sa s ňou zahŕňalo aplikovanie štatistických metód na žiarenie zahriatych telies a rozpoznanie, že *nekonečne malé a iba ozaj malé je kvalitatívny, nielen kvantitatívny rozdiel.*
Potom tu máme ešte ďalší druh nerozlišovania - medzi normálnymi číslami, aké používame na popis bežnej skúsenosti, a absurdne veľkými číslami, ktoré na taký popis nepoužívame. Kameňom úrazu môže byť práve naivne domýšľavá viera vo vlastnú schopnosť extrapolovať svoju skúsenosť do končín kam nesiaha, na základe toho, že si nevieme predstaviť kde a ako by to mohlo zlyhať. Veď práve. Zdá sa, že redukcionistický pohľad (napríklad predpoklad, že z vlastností zrniečka piesku vieme vydedukovať vlastnosti dún Sahary) tu nefunguje, že v nejakom zmysle "More is different", ako písal Philip Anderson vo svojej slávnej eseji spred vyše polstoročia.

3.2 Systém, stavy a štatistický súbor

Keď používame štatistický popis, je dobré mať jasno v tom, čo vlastne popisujeme, čím je definovaný náš **systém**, teda ktoré kvality sú jeho charakteristikami natoľko, že ich má v identifikačnom preukaze, a ktoré sa môžu meniť, rozlišujúc tak jeho **stavy**. Pomyslený súbor toľkých kópií nášho súboru, koľko je všetkých možných rozlíšiteľných stavov, (každá reprezentuje systém v jednom stave)potom tvorí tzv. **štatistický súbor**.

A teraz ku kľúčovému slovíčku "rozlíšiteľných"stavov. Ešte aj v klasickom prípade, keď nie je reč o principiálnej, kvantovomechanickej neurčitosti, máme rozlíšiteľnosť podmienenú mierou pre detail pri meraní. Podľa tohto rozlišujeme pojem makrostavu a mikrostavu. **Makrostav** je charakterizovaný hodnotami nejakých efektívnych makro-veličín, **mikrostav** je daný údajmi detailnej realizácie.

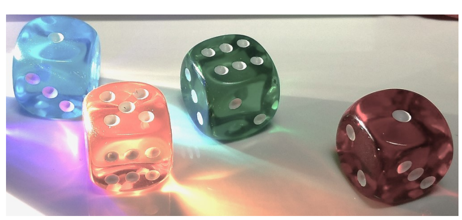
Uveďme si ako jednoduchý príklad hádzanie dvomi kockami - berme klasické rozlíšiteľné kocky[16]. Tu môžeme za makrostav považovať súčet na oboch, a mikrostav je daný detailmi hodnôt na jednotlivých kockách.

Obr. 11: Pravdepodobnosť takéhoto hodu je 1:36. Pravdepodobnosť súčtu 7 je 1:6.

Mikrostavov je 36, makrostavov 11. Očividne na niektoré makrostavy musí pripadať viac mikrostavov. Uveďme si ich detailne:

$$
\begin{aligned}
2 &= 1+1 \\
3 &= 2+1 = 1+2 \\
4 &= 1+3 = 3+1 = 2+2 \\
5 &= 1+4 = 4+1 = 2+3 = 3+2 \\
6 &= 1+5 = 5+1 = 2+4 = 4+2 = 3+3 \\
7 &= 1+6 = 6+1 = 2+5 = 5+2 = 3+4 = 4+3 \\
8 &= 2+6 = 6+2 = 3+5 = 5+3 = 4+4 \\
9 &= 3+6 = 6+3 = 4+5 = 5+4 \\
10 &= 4+6 = 6+4 = 5+5 \\
11 &= 5+6 = 6+5 \\
12 &= 6+6
\end{aligned}
$$

Ako vidno, najviac mikrostavov (6) prislúcha makrostavu zodpovedajúcemu súčtu 7. Najmenej mikrostavov prislúcha makrostavom zospovedajúcim súčtom 12 a 2 (každému po jednom). Pokiaľ sú kocky nezaujaté, je pravdepodobnosť všetkých mikrostavov rovnaká (1:36), ale makrostavy sú na tom inak - najpravdepodobnejší je ten sedmičkový, prislúcha mu 6 zo všetkých 36 mikrostavov. Najmenej pravdepodobné sú makrostavy zodpovedajúce súčtu 2 a súčtu 12.



Obr. 12: S narastajúcim počtom častíc, medzi ktoré možno prerozdeliť celkovú sumu, exponenciálne narastá množstvo mikrostavov a rozdiel v pravdepodobnostiach makrostavov. Hodiť pri dvoch kockách maximálny súčet má pravdepodobnosť $1:6^2$. Hodiť maximálny súčet pri štyroch kockách má pravdepodobnosť $1:6^4$.

[16]hoci môže byť zaujímavé uvažovať aj kvantový prípad nerozlíšiteľných kociek

3.3 Mikrokanonický súbor a základná veta štatistickej fyziky

Jedným zo základných štatistických súborov je **mikrokanonický súbor**. Systémom je v tomto prípade istá skupina častíc obývajúca pevne daný objem a izolovaná tak, že celková energia E_{total} je konštantná. Príkladom môže byť plyn uzavretý vo fľaši, izolovaný od okolia tak, že nemôže meniť svoju energiu, objem ani počet častíc. Jednotlivé stavy sa líšia rozdelením celkovej energie medzi jednotlivé častice. Na začiatku mohlo byť rozloženie veľmi nerovnomerné - trebárs polovica častíc mohla byť "zamrznutá", s malými hybnosťami, a druhá polovica mohla byť tvorená veľmi rýchlymi časticami. Častice si pri zrážkach odovzdávajú energiu a hybnosť, a čo jedna stratí, iná získa.

Mikrostav je v tomto prípade detailná informácia o tom, akú čiastku celkovej energie majú jednotlivé častice. Pokiaľ môže energia častice nadobúdať iba diskrétne hodnoty, potom makrostav je popísaný informáciou, koľko častíc N_i má energiu E_i (pričom samozrejme, $\sum_i N_i E_i = E_{total}$). Pokiaľ je možné spojité spektrum energií, makrostav je daný informáciou, koľko častíc $n(E)$ má energiu v rozmedzí $\langle E, E+\delta E\rangle$, kde $\langle \delta E\rangle$ môže zodpovedať trebárs jemnosti nášho merača energie, pričom $\int_0^{E_{total}} dE\, n(E) = E_{total}$.

Rozdelenie energie medzi častice má pravdepodobnostnú interpretáciu: ak náhodne[17] vyberiem časticu, bude mať zrejme energiu z intervalu $\langle 0, E_{total}\rangle$. Aká je pravdepodobnosť, že má energiu z intervalu $\langle E, E+\delta E\rangle$? Teda ako sa správa pravdepodobnosť ako funkcia energie? Pred ustálením je odpoveď silne podmienená počiatočnými podmienkami a teda všeobecnú odpoveď ťažko podať. avšak veľmi často nás zaujíma situácia v rovnováhe, po ustálení. Ak počkáme dostatočne dlho (v závislosti od veľkosti systému to niekedy znamená pár sekúnd kým sa makroskopické veličiny prestanú meniť), nerovnomerný stav daný počiatočnými podmienkami prenechá miesto istému rovnovážnemu rozdeleniu rýchlostí, istému makrostavu. Ktorý to bude? Zrejme ten s najvyšším počtom mikrostavov. A ako sú na tom s pravdepodobnosťami tie? Uveďme ako postulát základnú vetu štatistickej fyziky, akýsi analóg predpokladu o nezaujatých kockách:

V rovnováhe sú všetky dostupné mikrostavy rovnako pravdepodobné.
Ak počet všetkých mikrostavov s celkovou energiou E_{total} je $\Omega(E_{total})$, potom pravdepodobnosť každého z nich (povedzme všeobecne n-tého) je

$$p(n) = \frac{1}{\Omega(E_{total})}$$

Takémuto rozdeleniu sa hovorí mikrokanonické, a jedná sa o akúsi Occamovu britvu štatistickej fyziky.

3.4 Entropia

Povedzme si niečo o veličine zvanej **entropia**. Je to jeden z tých tajomných pojmov vo fyzike ktorý každý pozná z počutia, ale jeho súvis s inými bežnými pojmami ostáva zahmlený. hovorí sa o nej ako o neusporiadanosti, miere neporiadku či zmätku... ale toto je označenie vystavené vysokému riziku nepochopenia. **Miera skrytej informácie** je trochu lepšia voľba. Je pravda že v neporiadku sa mnoho informácií ťažko hľadá, ale pojem neporiadku má niekedy asociácie nie celkom v súlade s entropiou ako je chápaná v štatistickej fyzike. Pod skrytou informáciou sa myslí informácia potrebná na identifikáciu konkrétneho mikrostavu, ktorým je realizovaný daný makrostav. Vráťme sa pre ilustračné účely k hádzaniu dvoma kockami. Ak špecifikujeme makrostav "súčet je 2", nie je nijaká pochybnosť o príslušnom mikrostave, ktorým sa tento makrostav realizoval. Nie je iná možnosť, ako jeden bod na jednej kocke a práve toľko na druhej. Tento makrostav nedáva priestor žiadnemu skrytiu informácie o mikrostave. Má nulovú entropiu. Naproti

[17] Tu budeme slovo náhoda chápať v klasickom zmysle, ako štatistický pokryv nezistenej informácie o snáď nie príliš relevantných zaujatostiach.

tomu, k makrostavu "súčet je 7"prislúcha 6 mikrostavov ktorými sa mohol realizovať. Je to najpravdepodobnejší makrostav, ale naša pravdepodobnosť uhádnuť konkrétny realizovaný mikrostav je v jeho prípade najmenšia. Mal by mať najväčšiu entropiu zo všetkých makrostavov (ostatným prislúcha menej mikrostavov, máme lepšie pravdepodobnosti ich uhádnuť pri znalosti makrostavu).

Entropia je pojem prislúchajúci makrostavu. Je rastúcou funkciou počtu jeho mikrostavov. Aj pravdepodobnosť makrostavu rastie s počtom jeho mikrostavov.
Makrostavy s vyššou entropiou sú pravdepodobnejšie.

Ostáva nám nejako rozumne zvoliť "rastúcu funkciu počtu mikrostavov". Volíme logaritmus tohto počtu násobený konštantou, ktorá si neskoršie vyžiada osobitný komentár.

$$S = k \ln \Omega \tag{26}$$

Voľba logaritmu je výhodná: jednak robí z absurdne veľkých čísel menej absurdne veľké čísla $\ln 10^{23} = 23 \ln 10$. A vďaka kľúčovej vlastnosti (logaritmus súčinu je súčet loragitmov) umožňuje definovať entropiu ako **aditívnu veličinu pre neinteragujúce systémy**. Vezmime dva také, každý sám osebe s entropiou S_1, S_2 a s počtom mikrostavov $\Omega(E_1)$, $\Omega(E_2)$. Kombinovaný systém bude mať energiu $E = E_1 + E_2$ a počet mikrostavov

$$\Omega(E_1 + E_2) = \Omega(E_1).\Omega(E_2)$$

$$k \ln [\Omega(E_1 + E_2)] = k \ln [\Omega(E_1).\Omega(E_2)] = k \ln [\Omega(E_1)] + k \ln [\Omega(E_2)]$$

$$S = S_1 + S_2$$

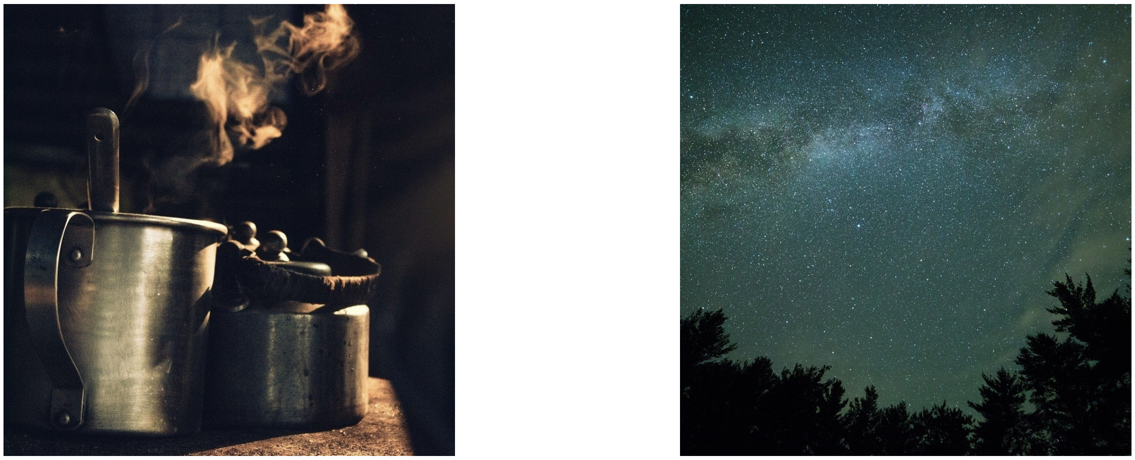
Konštanta úmernosti medzi logaritmom počtu mikrostavov a entropiou je Boltzmannova, s hodnotou

$$k = 1,38 \,.\, 10^{-23} \mathrm{J.K}^{-1}$$

Jednotkou je joule na kelvin, teda **Boltzmannova konštanta** bude slúžiť ako prevodný faktor medzi energiou a teplotou. Metódy na meranie týchto dvoch veličín boli používané a prístroje okalibrované na príslušné jednotky ešte prv, ako bol ujasnený súvis medzi nimi. Prekladací faktor to dopĺňa. Malé číslo v príslušných jednotkách súvisí s tým, že počty atómov v objemoch, ktoré bežne meriame, sú absurdne veľké a ich veľkosti oproti tým objemom absurdne malé. Vezmime si azda (na školách) najznámejší výskyt Boltzmannovej konštanty v stavovej rovnici ideálneho plynu:

$$pV = NkT$$

Tu p je tlak, V objem, T teplota. Všetko je merané v takých jednotkách, aby bežné tlaky, teploty a objemy mali priradené "rozumné čísla". Lenže takým objemom, tlakom a teplotám prisucha prítomnosť obrovského množstva N molekúl (obrovské v zmysle 10^{23}). Kompenzuje ho (číselne) práve malá hodnota k.



Obr. 13: Bez pokrievky môžeme v priebehu niekoľkých minút stratiť počet molekúl porovnateľný s počtom hviezd vo viditeľnom vesmíre.

3.5 Zákony termodynamiky

Klasická termodynamika je princípová teória. Narába s pojmami teploty, energie a entropie, a jej postuláty sú zhrnuté do štyroch zákonov, resp. metazákonov, lebo ide viac o princípy, ktorými majú prejsť zákony vhodného modelu. Tradujú sa v rôznymch fomuláciách, poznačených tradíciou, vkusom prednášajúceho a náladou strúhať vtipy. Ťažko nájsť inú partiu fyziky, kde základné postuláty znejú tak samozrejme (že človek má pocit po ich počutí ďalej čakať na pointu), a predsa majú takú silu vylúčiť neperspektívne modely vo fyzike.
Poďme si ich tu zhrnúť, pospájať trochu kľúčové pojmy termodynamiky a štatistickej fyziky, a ponechať dostatok tajomstva na ďalšie uvažovanie (ponechať dostatok naozaj nie je problém).

Obr. 14: Využiteľnosť údajov na teplomeri, dôvera že energia sa netratí, len odovzdáva (a možno to trochu regulovať izoláciou), a že čiastočky liečivých látok z byliniek difundujú do okolitej vody (a efektívnejšie ak je zohriata) … Pri každej chrípke nám pomáha aspoň intuitívna znalosť termodynamiky. Teplomer, termofor aj recepty na bylinkové čaje sú jej empirickým využitím.

Nultý zákon: Existuje veličina - **teplota** - taká, že pre systém v **rovnováhe** sa nemení, a môže slúžiť ako rozdeľovacia kvalita systémov do **tried ekvivalencie**. V nasledujúcom pod každým *byť v rovnováhe s* rozumejme *mať rovnakú teplotu ako.* Overme požiadavky na vzťah ekvivalencie: Reflexívnosť: Každý systém, ak je v rovnováhe, je v rovnováhe sám so sebou. Symetria: Ak A je v rovnováhe s B, potom aj B je v rovnováhe s A. Tranzitívnosť: Ak je systém a v rovnováhe so systémom B a zároveň B je v rovnováhe so systémom C, potom sú v rovnováhe aj systémy A a C.

Prvý zákon: **Energia** sa zachováva. Niekedy formulovaný ako nemožnosť zostrojiť perpetuum mobile prvého druhu (zariadenie, ktoré by periodicky pracovalo bez čerpania energie odniekadiaľ) alebo obed zdarma. Tento zákon siaha naprieč fyzikou a nezdá sa, že by bol niekde narušený. Ak máme podozrenie, že sa nám v nejakom systéme stráca energia, skôr hľadáme nejakú jej dosiaľ neznámu formu alebo chybu v izolácii systému, než porušenie prvého zákona. Okrem prípadu, keď ako systém uvažujeme celý vesmír. Nie je však namieste tu celkom hovoriť o zachovaní či nezachovaní energie, lebo tu sme narazili práve na to, že buď plne nerozumieme mechanike na veľkých škálach, alebo nerozumieme všetkým formám energie, veľmi pravdepodobne oboje.

Druhý zákon: Existujú **nevratné** deje. Celková **entropia** neklesá. Teplo prúdi z teplejšieho telesa na studenšie. Nemožno zostrojiť perpetuum mobile druhého druhu (periodicky pracujúci stroj, ktorý by všetko prijaté teplo bezo zvyšku premieňal na využiteľnú prácu, bez straty do chladiča), alebo treba preplatiť ten obed z prvého zákona. Výrok Arthura Eddingtona v tomto ohľade je taký známy, že ho tu uvedieme už aj z tradície:

"Myslím, že zákon o vzrastaní entropie má mimoriadne postavenie medzi zákonmi prírody. Ak niekto poukáže na nesúhlas tvojej obľúbenej teórie a Maxwellových rovníc - tým horšie pre Maxwellove rovnice. Ak sa ukáže, že tvoja teória nesúhlasí s experimentom - nuž, aj tí experimentátori občas veci dopletú. Ale ak tvoja teória ide proti druhému zákonu termodynamiky, neviem ponúknuť žiadnu nádej; neostáva pre ňu nič okrem upadnutia do najhlbšej hanby."

O čo tu ide? Ako súvisí nevratnosť dejov a smer prúdenia tepla? Na druhý z týchto javov sa spoliehame kedykoľvek dáme mlieko do chladničky alebo panvicu na sporák, a na nevratnosť dejov sa spoliehame častejšie ako sa pozrieme na hodinky (čo je len jeden z premnohých prejavov.) Na nárast entropie, tendenciu smerovania do najpravdepodobnejších makrostavov a s tým spojené rovnovážne usporiadania sa spoliehame vždy, keď hodíme čaj do kanvice alebo otvoríme okno aby sme vyvetrali…

Pozrime sa na **nárast entropie pri interakcii** dvoch systémov. Už sme si ukázali, že pre systémy, ktoré pri kontakte neinteragujú, je celková entropia jednoducho súčtom pôvodných jednotlivých entropií (čo bol aj jeden z dôvodov na logaritmus v definícii entropie). Čo v prípade, ak si systémy môžu vymieňať energiu?

Majme dva systémy, pred kontaktom s energiami E_1, E_2 a počtami mikrostavov $\Omega_1(E_1)$, $\Omega_2(E_2)$. Celková energia kombinovaného systému ostáva $E_{total} = E_1 + E_2$, ale prerozdelenie tejto sumy má mnoho možností, viac ako len súčin počtu pôvodných mikrostavov. Teda entropia kombinovaného systému, s umožnenou interakciou medzi jeho časťami, je väčšia, alebo aspoň nie menšia ako súčet pôvodných entropií pred interakciou. Zdá sa, že nárast entropie súvisí s interakciami, a s tým, že veci sa stávajú a neodstávajú, čo súvisí so smerom plynutia času. Smer plynutia času teda vyzerá byť mimoriadne spojený s nárastom entropie. Nakoľko je ním *daný* je otvorená otázka. Jedna z tých, čo siahajú za naše súčasné pochopenie dejov v prírode.

Počet stavov kombinovaného systému je v prípade diskrétneho spektra energií, ktoré je možné si vymieňať

$$\Omega(E_1+E_2) = \sum_{E_i=0}^{E_1+E_2} \Omega_1(E_i)\Omega_2(E_{total}-E_i) \; > \; \Omega_1(E_1).\Omega_2(E_2)$$

$$k\ln\left(\Omega(E_1+E_2)\right) = k\ln\left(\sum_{E_i=0}^{E_1+E_2} \Omega_1(E_i)\Omega_2(E_{total}-E_i)\right) \; > \; k\ln\left(\Omega_1(E_1).\Omega_2(E_2)\right)$$

$$S(E_1+E_2) \; > \; S_1(E_1)+S_2(E_2) \tag{27}$$

Teda naozaj interakciami rastie entropia.

Pre ilustráciu **smeru prúdenia energie** pri kontakte systémov, vezmime si teraz hračkársky model, situáciu s jednoduchými numerickými hodnotami: Majme dva systémy, každý pozostávajúci z nejakého množstva častíc N_1, N_2. Energia nech je kvantovaná (to je zjednodušenie, nie hrozba), najmenšie kvantum nech má hodnotu ϵ.

Počty častíc sú $N_1 = 10$ a $N_2 = 20$ Celkové energie sú $E_1 = 200\epsilon$ a $E_2 = 1000\epsilon$. Tieto kvantá sú náhodne distribuované medzi častice systémov. Treba predpokladať rovnakú pravdepodobnosť pre všetky mikrostavy. Najpravdepodobnejší makrostav bude ten, ktorému zodpovedá najväčší počet mikrostavov, teda najväčšia entropia. Je viac spôsobov ako realizovať rovnomernú distribúciu než spôsobov ako dať trebárs všetku energiu jednej častici. Pozrime sa na situáciu v systémoch pred kontaktom a po kontakte, a uvažujme, ako požiadavka maximálnej entropie súvisí s odovzdávaním energie medzi systémammi:

Systémy separátne, pred kontaktom:

Systém 1 … 10 častíc, 200 kvánt energie. Priemerný počet kvánt na jednu časticu: 200:10=20

Systém 2 … 20 častíc, 1000 kvánt energie. Priemerný počet kvánt na jednu časticu: 1000:20=50

Ak umožníme migráciu kvánt energie celým kombinovaným systémom (odovzdávajú sa zrážkami častíc), rozdeľujeme vlastne 1200 kvánt na 30 častíc, teda stredný a najpravdepodobnejší počet kvánt na jednu z nich je 1200:3=40 kvánt/častica.

Systémy spojené, po interakcii:

Systém 1: 10 častíc, 400 kvánt energie. Priemerný počet kvánt na jednu časticu: 400:10=40

Systém 2: 20 častíc, 800 kvánt energie. Priemerný počet kvánt na jednu časticu: 800:20=40

Systém 1 kontaktom získal energiu - najpravdepodobnejšie má teraz dohromady 40.10=400 kvánt. Systém 2 strácal, najpravdepodobnejšie má teraz dohromady 20.40=800 kvánt. Všimnime si tiež, že pre straty a zisky celkovej nenrgie nebol kľúčový celkový energetický obsah systému, ale množstvo energie pripadajúcej na jednu časticu. Keby to bolo rovnaké, nijaká makrovýmena by sa neudiala. Ak nebolo, bol k dispozícii entropickejší stav, a teda sa šlo k nemu.

Očividne tu máme deje, ktoré sívisia s tým, čomu bežne hovoríme teplota. Teplo medzi dvoma objektami sa vymieňa, ak sa líšia teplotou, a systém s nižšou teplotou energiu získava, kým ten s vyššou teplotou ju stráca. A žiadna makroskopicky detekovateľná výmena sa nedeje ak sú teploty rovnaké. Očividne sa nám tu hlásia asociácie s pojmami ako teplo (energia) a teplota, pre ktoré máme nejakú intuitívnu predstavu (nakoľko je zavádzajúca je druhá vec). Ako sem pridať entropiu a definovať tieto veličiny tak, aby štatistická interpretácia teploty hladko prechádzala do termodynamickej predstavy tejto veličiny? Definícia bola volená nasledovne:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \tag{28}$$

Parciálna derivácia je namieste, keďže v závislosti od obmedení kladených na systém sa entropia môže meniť napríklad s objemom atď.

Dá sa formulovať aj trochu menej všobecne, bližšie k termodynamike: vezmime plyn v uzavretej nádobe, dodajme mu trochu energie vo forme tepla δQ (berme malé hodnoty, pri ktorých sa teplota príliš nezmení), zmenu jeho entropie označme dS. Teplota T nech je úmerná strednej hodnote energie na jednu časticu v čase, keď sme teplo dodali. Potom

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \tag{29}$$

Ako vidno, nárast entropie je úmerný dodanému teplu. To dáva zmysel: je teraz k dispozícii o δQ viac energie, ktorú možno distribuovať, viac možností ako distribúciu urobiť, viac mikrostavov, viac entropie. Ale nárast entropie je nepriamo úmerný teplote, pri ktorej príspevok prišiel. To tiež nie je veľmi proti intuícii: teplota súvisí s tým, koľko celkovej energie už systém má (keďže je rastúcou funkciou strednej hodnoty). Ak pridáme desať jednotiek energie do systému, kde už ich je milión, jedná sa o relatívne malú zmenu ktorú ťažko zaregistrovať. Či má nejaká častica 1000 jednotiek energie alebo 1001 ju príliš neodlišuje od jej susedov[18].

A ako je to so znamienkom? Keby δQ bolo záporné, teda keby sme plyn chladili, zmena jeho entropie by bola záporná. Ako je to teda s neklesaním entropie? Kľúčové je, že *celková entropia neklesá*. Teplo odobraté plynu zvýšilo entropiu chladiča[19].

Tretí zákon. Entropia systému chladeného až k **absolútnej nule** smeruje k nejakej konečnej konštantnej hodnote. Pri absolútnej nule je systém povinný byť v stave s najnižšou energiou. Tento stav nemusí byť jediný, môže byť degenerovaný (viac stavov, niečím sa líšiacich, môže mať najnižšiu energiu). Ak je tu degenerácia, potom entropia ani pri absolútnej nule nebude nulová. Ale túto formuláciu by sa predsa len patrilo doplniť dôvetkom, že *konečným počtom krokov nemožno dosiahnuť nulovú teplotu.* Nakoniec aj súvis teploty, kinetickej energie a princípu neurčitosti z kvantovej mechaniky (systémy v extrémnych podmienkach často potrebujú kvantový popis) napovedá, že sa tu jedná o hypotetický stav.

3.6 Kanonický súbor a Boltzmannovo rozdelenie

Systémy s fixnou energiou, izolované, sú dôležitý teoretický model. V realite ich máme len v rámci aproximácie a často ani to nie, odmysliac celý vesmír kde je izolovanosť beztak trochu ošemetnou otázkou. Vcelku často však máme systémy v kontakte s okolím, v **tepelnej rovnováhe**, teda s rovnakou teplotou ako má okolie, a touto prakticky konštantnou počas dostatočne dlhého času, aby stačil na naše pozorovania. Takýto systém, s fixnou teplotou, objemom a počtom častíc, potom štatisticky popisujeme pomocou tzv. **kanonického súboru** (súbor virtuálnych kópií systému, líšiacich sa mikrousporiadaním). Akýmsi katalyzátorom pri výpočtoch ohľadne kanonického súboru je spomínané okolie, **rezervoár energie**. Označme ho ako R. Náš systém označme A (lebo S sa veľmi mýli s entropiou). Nech celková energia rezervoára R aj systému A je E_{total}, a nech systém A môže byť v stavoch E_n. Energetické stavy môžu byť degenerované v zmysle, že tej istej energii

[18] Toto sú viac motivácie ako exaktné úvahy vedúce k definícii (28). Jej vhodnosť sa ukazuje pri poctivom počítaní počtu stavov pre ideálny plyn spĺňajúci čo má ideálny plyn spĺňať a konfrontácii s intuitívnym termodynamickým súvisom medzi energiou a teplotou.

[19] Môžeme dostať zapratanú pivnicu do veľmi usporiadaného stavu a znížiť jej entropiu, ale za cenu ešte väčšej entropie v atmosfére, odtokovom potrubí a smetnom koši.

môže prislúchať viac stavov systému A. Označme tento počet $\Omega_A(E_n)$. Predpokladáme, že R disponuje podstatne väčším množstvom celkovej energie ako systém A samotný, že prechodom malého množsta tepla z R do A sa teplota rezervoára prakticky nezmení. Ako je to s rozdelením energií pre častice nášho systému A? Najprv vezmime počet stavov kombinovaného systému R+A. Prvá suma je cez energie, ktoré si z celkovej môže vziať systém A, druhá suma je cez všetky stavy systému A, ktoré zodpovedajú energii E_n:

$$\Omega(E_{total}) = \sum_{E_n} \Omega_R(E_{total} - E_n)\Omega_A(E_n) = \sum_n \Omega_R(E_{total} - E_n)$$

Využime definíciu entropie ako logaritmu počtu mikrostavov (26), a tiež fakt $E_n \ll E_{total}$, rozviňme teda čo sa dá v E_n, a využime definíciu (28) teploty ako prevrátenej hodnoty derivácie entropie podľa energie:

$$\Omega(E_{total}) = \sum_n \exp\left[\ln \Omega_R(E_{total} - E_n)\right] = \sum_n \exp\left[\frac{S_R(E_{total} - E_n)}{k}\right]$$

$$\approx \sum_n \exp\left[\frac{S_R(E_{total})}{k} - \frac{E_n}{k}\frac{\partial S_R}{\partial E}\right]$$

$$\approx \exp\left[\frac{S_R(E_{total})}{k}\right] \sum_n \exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]$$

V poslednom riadku sme pred sumu vyňali faktor súvisiaci len s rezervoárom, nezávislý na energetických stavoch systému, cez ktoré sa sumuje (energia rezervoára je priveľká na to, aby si všímal, koľko si berie systém A). Máme teda vyjadrenie pre počet mikrostavov kombinácie rezervoár R + systém A. Podľa základnej vety štatistickej fyziky sú všetky rovnako pravdepodobné. Koľko z nich zodpovedá situácii, že systém A je v stave n? To vyjadruje práve príslušný člen sumy, teda $\exp\left[\frac{S_R(E_{total})}{k}\right] \exp\left[-\frac{E_i}{kT}\right]$. Pravdepodobnosť n-tého stavu je teda podiel tohoto počtu a celkového počtu všetkých možných stavov

$$p(n) = \frac{\exp\left[\frac{S_R(E_{total})}{k}\right] \exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{S_R(E_{total})}{k}\right] \sum_n \exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]}$$

Ako vidno, faktor súvisiaci s rezervoárom sa môže teraz vykrátiť. Rezervoár nám tu naozaj poslúžil ako katalyzátor. Dostávame sa tak k **Boltzmannovmu rozdeleniu** pre kanonický súbor:

$$p(n) = \frac{\exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]}{\sum_n \exp\left[-\frac{E_n}{kT}\right]} \tag{30}$$

Pripomeňme, že sumujeme cez stavy, nie jednotlivé energie (vtedy by sme mali v sume ešte každý člen vynásobiť príslušným počtom stavov s danou energiou). V prípade nedegenerovaných energetických hladín je to jedno, lebo tam ku každej energii prislúcha práve jeden stav. V prípade spojitého energetického spektra systému (nie diskrétnych hladín E_n, ale hodnôt z nejakého spojitého intervalu) treba namiesto sumovania cez stavy cez ne integrovať (teda cez parametre ktoré identifikujú stav - v nedegenerovanom prípade stačí cez energiu).

Boltzmannovo rozdelenie má veľmi široké použitie, keďže v mnohých prípadoch nás zaujíma práve **rovnovážny stav**, ktorý je možné zmysluplne charakterizovať teplotou. Systémom môže byť dokonca aj jedna častica - ostatné v jej okolí potom tvoria rezervoár. Tu trochu narážame na obvyklý pohľad na teplotu ako na "strednú kinetickú energiu na jednu časticu". Stačí však stredovať cez dostatočne dlhý časový interval pre túto jednu časticu namiesto okamžitého stredovania cez množstvo častíc a môžeme si zachovať aj túto predstavu. V prípade, že náš systém identifikujeme s jednou časticou v kúpeli ostatných, nám Boltzmannovo rozdelenie hovorí, s akou pravdepodobnosťou ju nájdeme s danou energiou. A keďže ostatné môžu byť práve tak dobre "tou vybratou", hovorí nám toto rozdelenie aj to, aká časť častíc má danú energiu.

3.7 Ohňom a mrazom

Pravdepodobnostné rozdelenie (30) nám hovorí aj zaujímavú vec o súvise pravdepodobností energií a teploty. Stavy s energiami E_n podstatne vyššími ako kT majú mizivú pravdepodobnosť. Ak ide teplota k nule, systém je nútený usadiť sa v najnižšom energetickom stave, pre vyššie ide pravdepodobnosť výskytu do nuly. V tejto súvislosti si spomeňme napríklad na Curieho teplotu, pri prekročení ktorej niektoré materiály strácajú svoje magnetické vlastnosti. Ako to súvisí s Boltzmannovým rozdelením? Makroskopicky pozorovateľný magnetizmus pochádza v týchto materiáloch (aj) z toho, že je energeticky výhodné (neživá príroda hľadá minimá potenciálnej energie) mať magnetické momenty jednotlivých atómov zladené jedným smerom. Iné nastavenie momentov by viedlo k vyššiemu energetickému stavu. Pri nízkych teplotách sú stavy s vyššou energiou nepravdepodobné. Pri vyššej teplote je však faktor exp $\left[-\frac{E_n}{kT}\right]$ nezanedbateľný aj pre menej ekonomické hladiny. Pár elektrónvoltov hore dole nehrá veľkú rolu.

Je zaujímavé všímať si štruktúry, ktoré vznikali za "prísnych"podmienok nízkych teplôt, kde systém mal len na základné energetické výdavky a porovnať ich s tými, ktoré vznikali v opačnej situácii, keď energetické ohľady nehrali veľkú rolu. Štruktúra magnetu a snehovej vločky neprežije istú hraničnú teplotu, a tak sa nám môže zdať, že vyššie teploty ničia usporiadané štruktúry. V istom zmysle, ale netreba slepo zovšeobecňovať. Niekedy napodiv práve nával energie umožní systému prejsť do energeticky ešte výhodnejšieho (nižšieho) stavu. Železo je jeden z najstabilnejších prvkov, ale bolo treba vysoké teploty v žiare prvých hviezd aby sa prekonal energetický val brániaci nukleónom ľahších prvkov dostať sa dokopy. Podobne je to so syntézou mnohých prvkov, ako kyslík, dusík, uhlík. Bez takýchto prvkov by ani tých magnetov a snehových vločiek nebolo. Možno namietnuť, že pri dostatočne vysokej teplote by sa rozbili aj atómy železa atď. Pravda, ale zas nevieme aké energetické valy sme ešte nevideli prekonané, a aké štruktúry sú za nimi možné.

Obr. 15: Hviezda z istej diaľky roztopí ľadové kryštáliky. Hviezda celkom blízko vytvorí materiál, bez ktorého by nevznikli.

3.8 Strelka času

Prvý zákon termodynamiky nie je smerový. Ak energia bude ako bola, ťažko na základe prvého zákona pri pohľade na dve momentky systému povedať, ktorá bola skôr. Naproti tomu druhý zákon smerový je, alebo aspoň nie je symetrický na oba smery plynutia času. Ak máme dve momentky systému, a na jednej je entropia vyššia ako na druhej, potom tá entropickejšia bola urobená neskôr. Kľúčové je, aby momentky zachytávali ako systém všetko, čo nejako interagovalo (je možné mať večer upratanejší dom ako ráno - ale interagovali sme pritom s relatívne veľkou čiastkou sveta, ktorá náš nízkoentropický stav domu zaplatila vyššou entropiou.) Druhý zákon je v tomto smere unikátny spomedzi zákonov fyziky. Je entropia jednoducho stúpajúcou funkciou času, alebo je plynutie času ekvivalentné nejakej - nejako stúpajúcej forme entropie? Dej, počas ktorého entropia stúpne, je nevratný (znova treba brať do úvahy celý interagujúci systém). Teda sú veci, ktoré sa nemôžu odstať. Sú toto míľniky času, z ktorých sa nevracia späť?

Toto sú zaujímavé otázky na dlhé debaty a bezsenné noci (a vhodne poňaté, použiteľné ako pomocná liečba zákernej arogancie založenej na situácii *viac rovníc ako rozumu*).

Tu si však radšej prozaickejšie povedzme ešte pár poznámok k entropii v okolitom vesmíre a u nás na Zemi. Spomeňme jednu známu poučku zo základnej školy. Čo máme zo Slnka? Energiu - pravda, ale naša Zem vyžiari do vesmíru asi toľko ako prijme (inak by sa vyparila vplyvom nahromadeného tepla). Tak ak dávame koľko dostávame, načo to Slnko? Kľúčové tu nie je len to, či príde energia, ale *v akej forme* príde.

Uvažujme v tejto súvislosti situáciu, keď chceme postaviť vodnú elektráreň, alebo hoci len vodný mlyn, a hľadáme vhodné miesto. Povedzme, že máme k dispozícii dve jazerá: jazero s jednou hladinou, rovnomerne rozloženou vodou, povedzme v nadmorskej výške 1500 metrov (čiže je tu značná potenciálna energia oproti hladine mora, akurát s ňou nie je spojené). A druhé jazero má hladiny dve, lebo je rozdelené priehradou. Horná hladina nech je vo výške 1000 metrov nad morom, dolná vo výške 990 metrov. Dokopy možno menej potenciálnej energie, ale omnoho lepšie využiteľnej - nerovnakosť rozloženia vody v druhom jazere, nižšia entropia, umožňuje viac využitia.

Obr. 16: Pre využiteľnosť nejde len o energiu. Ide o energiu uloženú v stave s nízkou entropiou, čo často znamená menej rovnomerne rozloženú.

Podobne je to s energiou zo Slnka a energiou vyžiarenou Zemou v rámci chladenia. Tá zo Slnka prichádza z pozoruhodne malou entropiou. Má približne spektrum čierneho telesa s teplotou okolo 5000 K, teda prichádzajúce fotóny sú poväčšinou z viditeľného spektra. Naša Zem však do veľkej miery vyžaruje ako podstatne chladnejšie teleso, v infračervenej časti spektra. Na každý vysoko energický fotón zo Slnka vyžiari Zem niekoľko nižšie energických fotónov. Suma energie je vyrovnaná (alebo približne vyrovnaná), ale entropia vo vesmíre bola zvýšená. Možno sme do vesmíru vrátili, koľko sme dostali, ale nie v rovnako využiteľnej forme. Je to ako vrátiť rozmlátený porcelán - aj keď odovzdáme všetko do posledného črepu, nie sme celkom vyrovnaní. Nie je to treba vidieť negatívne. Na Zemi za to beží dobrý čajový večierok v podobe života a ktovie aká využiteľnosť ešte čaká aj to, čo teraz vyzerá nevyužiteľné.

Ak entropia neklesá, a naopak, má tendenciu prudko stúpať, a aj tak po miliardách rokoch ostalo

Obr. 17: Rastliny a iné vysokousporiadané systémy na Zemi veľmi efektívne udržujú svoj nízkoentropický stav na úkor navyšovania entropie v okolí dýchaním, metabolizmom a ďalšími činnosťami.

vo vesmíre ešte toľko možností ju navyšovať, potom buď začal s pozoruhodne malou entropiou (nulovou?) alebo možnosti ju navyšovať priebežne rástli. Možno oboje. Tak či onak, pokiaľ nevieme ako to bolo, pravdepodobne je predčasné prezentovať teórie o tepelnej smrti vesmíru, keď vraj má byť entropia maximálna a udalosti žiadne. Jednak nevieme, či je možné maximálnu entropiu dosiahnuť v konečnom čase, ani či možnosti navyšovania entropie priebežne nerastú s rozpínajúcim sa vesmírom. Každopádne, ak niekto uvidí odlúhovanie čaju v šálke, opačnú difúziu, kde sa častice vracajú späť do byliniek, netreba sa báť, že sa smer času obracia a udalosti sa odstávajú. To by sa totiž malo potom týkať aj našich neurónov a informácií vo forme spomienok. Teda v prípade obrátenia času by sme to nemali zbadať tak, že by sme si pamätali čaj vylúhovanejší a po ňom menej vylúhovaný. Ak sa čas už otočil, máme to vôbec ako zistiť? Tieto otázky netreba brať s väčšou vážnosťou aká im patrí, ale možno poslúžia ako motivácia brať do úvahy vyššie spomenuté rezolútne vyjadrenie Arthura Eddingtona o druhom zákone. Ak niekto predsa len vidí odlúhovanie čaju, mal by zvážiť, či si vyberal najvhodnejšie bylinky.

Obr. 18: Na svoju príčetnosť si treba dávať pozor, ale o vesmír sa netreba báť.

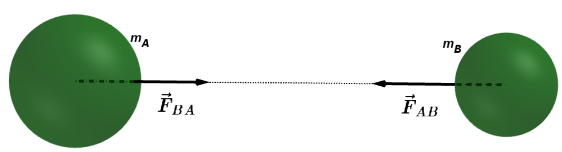
4 Absolútne a relatívne

4.1 Prvý a tretí Newtonov zákon

Newtonove zákony sa už deti na základnej škole učia spamäti, patrí to k folklóru podobne ako Pytagorova veta. Aj v rámci testu ich porozumenie, skúsme zvážiť otázku: Načo sú nám prvý a tretí Newtonov zákon?

Druhý predsa hovorí, že zrýchlenie telesa je priamo úmerné sile, ktorá naň pôsobí, a nepriamo úmerné hmotnosti. Špeciálne teda pre nulovú silu máme nulové zrýchlenie, čiže nulovú zmenu rýchlosti a rovnomerný priamočiary pohyb.

Uvážme ďalej dve vzájomne na seba pôsobiace telesá hmotností m_A, m_B izolované od vplyvu okolia (na celý systém zvonku nepôsobí nič). Označme $\vec{F}_{AB}$ silu, ktorou pôsobí A na B. Zrýchlenie telesa B nazvime $\vec{a}_B$. Silu, ktorou pôsobí B na A, označme $\vec{F}_{BA}$. Zrýchlenie telesa A nazvime $\vec{a}_A$ Druhý Newtonov zákon hovorí o silách zvonku, teda ak vezmeme kombinované teleso A+B, bude v Newtonovom zákone vystupovať na mieste sily nulový vektor $\vec{0}$. Polohu ťažiska nazvime $\vec{r}_T$, jeho rýchlosť $\vec{v}_T$ a zrýchlenie $\vec{a}_T$. Použime teraz druhý Newtonov zákon trikrát; pre teleso A, pre teleso B, pre kombinované A+B.



$$\begin{aligned} A: \quad & \vec{F}_{BA} = m_A\vec{a}_A \\ B: \quad & \vec{F}_{AB} = m_B\vec{a}_B \\ A+B: \quad & \vec{0} = (m_A + m_B)\vec{a}_T \end{aligned}$$

Zapíšme podľa definície ťažiska vzťah medzi zrýchleniami $\vec{a}_T$, $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$

$$\begin{aligned} \vec{a}_T &= \frac{m_A\vec{a}_A + m_B\vec{a}_B}{m_A + m_B} \\ (m_A + m_B)\vec{a}_T &= m_A\vec{a}_A + m_B\vec{a}_B \\ \vec{0} &= \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} \\ \vec{F}_{BA} &= -\vec{F}_{AB} \end{aligned}$$

Tak ako je to s tromi Newtonovými zákonmi? Nestačil by druhý? Nie sú prvý a tretí jeho dôsledky - prvý v mimoriadne jednoduchom prípade v tretí v kombinovanejšom? Nevšimol si azda Newton túto prebytočnosť? Samozrejme, keby šlo v prvom a treťom zákone len o to, čo sme sugestívne predložili vyššie, boli by prebytočné. Ale tie dva zákony tam nie sú primárne preto, čo pokrýva druhý. Sú tam ako súčasť *návodu, ako zostrojiť inerciálny systém súradníc.* Prvý hovorí o tom, čo považovať za *rovné čiary* a *rovnomerné tikanie* hodiniek. Trajektória voľného telesa je prototyp rovnej čiary, a hodinky, ktoré prejdeniu rovnako dlhých úsekov priradia rovnaký počet tiknutí, idú rovnomerne. Predpokladá sa pritom, že máme nejaký prototyp tuhých telies, ktorými možno vymerať *rovnaké úseky* a telies považovaných za voľné. Toto je samozrejme predpoklad vložený do teórie. Je však pozoruhodné, že v prírode nachádzame širokú triedu objektov, ktoré pri použití ako tuhé telesá konštantnej dĺžky alebo voľné telesá (všetko v rámci istého priblíženia) dávajú navzájom konzistentné výsledky, a v tom je aj praktická použiteľnosť tohto predpokladu. Tretí hovorí o tom, ako *zosynchronizovať hodinky* na rôznych miestach.

Ukážme si to na jednorozmernom prípade. Umiestnime agentov pozdĺž osi. Ako im nastaviť rovnaký čas na ich hodinkách? V počiatku nechajme trebárs vybuchnúť nálož uspôsobenú tak, aby sa rozpadala na dve rovnaké časti. Agenti, ku ktorým sa dostane časť idúca ich smerom, stlačia stopky v okamihu, keď ide okolo nich. Môžu potom daný údaj opraviť o čas potrebný na prekonanie vzdialenosti k nim. Podstané tu je, že agent napravo a naľavo v rovnakej vzdialenosti od počiatku si takto nastavia konzistentný čas, za predpokladu že oba šrapnely boli urýchlené rovnakými silami (predpokladali sme pre jednoduchosť rovnakú hmotnosť), teda leteli na obe strany rovnako rýchlo, teda že časové úseky na preklenutie rovnakej vzdialenosti boli rovnaké.

Samozrejme pri takejto synchonizácii hodiniek, definícii rovných čiar, rovnomernosti tikania, a tuhosti pravítka platia zákony o homogenite a izotropii zotrvačnosti tautologicky. Systém súradníc bol *zvolený* tak, aby platili. O to však ide - potrebujeme nejako vybrať, čo bude predstavovať rovné čiary, rovnaké úseky, rovnomerné tikanie, aby sme mohli v druhom zákone tvrdiť niečo o odchýlkach od rovnomerného priamočiareho pohybu. Druhý zákon potom hovorí, že odchýlka od rovnomerného pohybu, zrýchlenie, je dané ako podiel pôsobiacej sily a hmotnosti telesa.

Všimnime si aj, čo druhý zákon hovorí implicitne, faktom, že hmotnosť je len skalár, a konštantný skalár (pokiaľ sa nám teleso nekúskuje, čo žiada rozpísať Newtonove zákony pre časti atď). Hmotnosť, miera zotrvačnosti, odporu voči zmene rýchlosti, je nezávislá na smere a mieste. Dokopy Newtonove zákony hovoria, že zotrvačnosť je homogénna a izotropná, čo vedie k zachovaniu celkovej hybnosti pre izolovaný sytém. Vonkajšia sila je identifikovaná s jej časovou zmenou. Newtonove zákony platia v inerciálnej vzťažnej sústave, teda platia v tej v ktorej platia. Je to tautológia, ale mimoriadne užitočná. Keď si totiž nájdeme systém, v ktorom spomínaným spôsobom nakreslíme súradné čiary a nastavíme hodinky, zisťujeme, že zákony platia konzistnetne pre veľmi širokú škálu objektov.

Inerciálne sústavy získané použitím zotrvačnosti hmotných objektov sú tie isté, ktoré získame použitím zotrvačnosti svetla. Toto je jedna z kľúčových myšlienok relativity. Energia má zotrvačnosť. Nie v zmysle, že by svetlo bolo možné spomaliť alebo urýchliť, alebo že by mohlo byť v pokoji v sústave nejakého hmotného pozorovateľa, ako tomu je pri hmotných objektoch. Ale svetelné signály použité na definíciu rovných čiar a synchronizáciu hodiniek na rôznych miestach nám dajú systém inerciálny aj pre mechnaniku [20]. Novinkou pri prechode k relativite neboli inerciálne systémy. Prekvapením boli *vzťahy* medzi nimi.

4.2 Nezrovnalosti s galileovskou transformáciou

Ak máme inerciálny systém S so súradnicami x, t, v klasickej mechanike sa zvyklo *predpokladať*[21], že iný systém $\tilde{S}$ pohybujúci sa voči S rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v v smere osi x, s hodinkami nastavenými na nulu keď sa stretajú (a S má vtedy na hodinkách tiež nulu), má súradnice

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - vt \\ \tilde{t} &= t \end{aligned} \tag{31}$$

Tomuto hovoríme **galileovská transformácia**. Hovorí, že čas plynie v oboch sústavách rovnako, že pozície sú posunuté o člen lineárne rastúci s časom, že rýchlosť pozorovaných objektov je

[20] Tu treba pridať poznámku, akú pridal Sommerfeld k Einsteinovmu prelomovému článku: Do prvého rádu. Myslíme do prvého rádu v pomere rýchlosti telesa a rýchlosti svetla v/c.

[21] Ale samotné Newtonove zákony to netvrdia. Naopak, ako uvidíme neskôr, tretí zákon s takým predpokladom nie je ani konzistentný.

posunutá o konštantný člen a zrýchlenia že sú v oboch systémoch rovnaké:

$$\tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d(x-vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u - v$$
$$\tilde{a} = \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2(x-vt)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = a$$

Znie to veľmi intuitívne v zmysle, že napríklad skladanie rýchlostí funguje ako nám bežná skúsenosť a presnosť hovorí: Ak dva vlaky sa voči nádražiu pohybujú rýchlsťami u, v jedným smerom, potom voči sebe sa pohybujú rýchlosťou veľkosti $|u-v|$.

Avšak pozornejšie úvahy a experimenty dávajú tejto intuícii len status efektívnej aproximácie.

Je pravda, že dvaja pozorovatelia pohybujúci sa jeden voči druhému rovnomerne priamočiaro (a používajúci korektne Newtonove zákony na zostrojenie svojich súradníc) sú buď obaja inerciálni alebo obaja neinerciálni. Ale predpoklad, že ich súradné systémy sú viazané vťahmi (31) *sa experimentálne aj teoreticky ukázal ako mylný.*

Spomeňme niektoré nezrovnalosti v predpoklade, že inerciálne sústavy súvisia vzájomne galileovskými transformáciami:

Maxwellove rovnice majú pre vákuovú **rýchlosť svetla** len jednu hodnotu pre všetky sústavy, v ktorých tieto rovnice platia. Vidno to na vlnovej rovnici, ktorá z nich vyplýva pre elektrické $\vec{E}$ a magnetické polia $\vec{B}$

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \vec{\nabla}\vec{E}$$
$$\epsilon_0\mu_0 \frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = \vec{\nabla}\vec{B}$$

Faktor $\epsilon_0\mu_0$, súčin permitivity a permeability vákua, stojí na mieste prevráteného kvadrátu rýchlosti vlny:

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Nikde tu nie je referencia k rýchlosti zdroja voči pozorovateľovi, v ktorého súradniciach sú rovnice platné, ani rýchlosti pozorovateľa voči prostrediu, v ktorom sa vlna šíri. Toto bola vlastne jedna z hlbokých rán predstave éteru ako bežného nosného média pre svetlo. Experimentálne bola táto "podivnosť"potvrdená. Maxwellove rovnice majú svoju transformáciu súradníc $(x,t) \to (\tilde{x},\tilde{t})$, ponechávajúcu vlnovú rovnicu aj s rýchlosťou svetla invariantnú, ale nie je galileovská.

Tu prichádzame k podivnej situácii: Newtonove aj Maxwellove rovnice predpokladajú nejakú triedu súradníc, v ktorej platia. Súradné systémy v rámci týchto tried sú spríbuznené cez nejaké transformácie. Pokiaľ sú tieto transformácie rôzne, potom iste sa tieto triedy nemusia zhodovať, aj keby sa našla jedna súradná sústava vhodná pre mechaniku a elektromagnetizmus súčasne. Potom ale by sme mali nástroj na detekciu absolútneho pohybu: meranie elektromagnetických javov! Lenže nič také sa nepodarilo ukázať. V laboratóriu na hladko plávajúcej lodi dopadnú elektromagnetické pokusy ako by dopadli keby loď stála. Aj vnútorne akosi škrípe predstava jednej triedy význačných pozorovateľov pre mechaniku a inej pre elektromagnetizmus.

Azda ešte závažnejší je problém z hľadiska konzistentnosti už v rámci samotnej mechaniky. Keďže sa veľmi často zabúda na skutočné role prvého a tretieho zákona, môže sa takýto "detail" prehliadnuť. Zrýchlenie z druhého zákona je síce voči transformácii (31) invariantné, ale symetria tretieho zákona nie! Povedzme, že prvý pozorovateľ videl dve telesá A,B rovnakej hmotnosti silou vzájomného odpudzovania (trebárs výbuchom rozbušky) ísť od seba rýchlosťami $-u$, u v zápornom, resp. kladnom smere osi x. Potom udalosti, body na ich svetočiarach by v jeho úradnej sústave mali súradnice (x_A, t_A) a (x_B, t_B) spĺňajúce

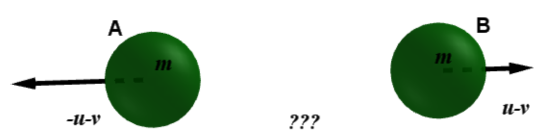
$$x_A = -ut_A$$
$$x_B = ut_B$$

$$\frac{x_A}{t_A} = -\frac{x_B}{t_B}$$

Ale v súradnej sústave spojenej s tou prvou transformáciami (31) nebude platiť analogická symetria:

$$\tilde{x}_A = x_A - vt_A = -ut_A - vt_A = (-u - v)\tilde{t}_A$$
$$\tilde{x}_B = x_B - vt_B = ut_B - vt_B = (u - v)\tilde{t}_B$$

$$\frac{\tilde{x}_A}{\tilde{t}_A} \neq -\frac{\tilde{x}_B}{\tilde{t}_B}$$



Jednoducho v tejto sade súradníc to bude vyzerať, že vzájomné pôsobenie častíc, ktoré ich poslalo na cestu od seba, nebolo symetrické. Alebo zotrvačnosť nie je izotropná. Potom to ale nie je inerciálna sústava.

Inerciálni pozorovatelia sa môžu líšiť rovnomerným priamočiarym pohybom, ale ich súradné systémy nemôžu byť viazané galileovskými transformáciami.

Treba nájsť inú transformáciu medzi dvoma inerciálnymi systémami x, t a $\tilde{x}, \tilde{t}$.

4.3 Vzťahy medzi inerciálnymi sústavami

Niekedy veľmi pomáha mať jasné kritériá prv než človek začne hľadať. Aké požiadavky máme na vzťah dvoch súradných systémov, ak oba majú byť inerciálne (všetky Newtonove zákony v nich majú platiť) a zároveň počiatok jedného sa v systéme druhého bude pohybovať rovnomerne priamočiaro, povedzme rýchlosťou v?

Priestorové súradnice pozorovaných voľných telies by mali byť lineárne funcie času v oboch systémoch. Teda transformácia má byť lineárna, aby takú charakteristiku zachovala. Požiadavka linearity nám vylúčila nekonečne mnoho transformácií - a nekonečne veľa ponechala. Lineárna transformácia medzi dvomi dvojicami premenných má 4 parametre. Aké podmienky ešte naložiť? Tu sa na pomoc ponúka spomínaný podivný jav rovnakej rýchlosti svetla v sústavách, kde Maxwellove rovnice platia. Prečo neskúsiť predpoklad, že Maxwellove a Newtonove rovnice platia v tých istých súradných sústavách (a že tieto sú si všetky rovnocenné)? Veď experimentálne sa nepodarilo odlíšiť fyziku v laboratóriu v pokoji od fyziky v laboratóriu v rovnomerno priamočiarom pohybe nielen na základe mechanických dejov, ale ani elektromagnetických. Vezmime to teda vážne.

Postulujme rovnocennosť všetkých inerciálnych sústav pre popis všetkých dejov, nielen mechanických, a postulujme tiež, že rýchlosť svetla je homogénna izotropná, vo všetkých inerciálnych (z mechanického aj elektromagnetického hľadiska[22], keďže postulujeme, že sa zhodnú) sústavách tá istá konštanta, bez ohľadu na pohyb zdroja.[23]

Všimnime si ešte jednotky. Z matematického hľadiska x, t by mohli predstavovať bezrozmerné premenné, ale toto je fyzika, kde sa zdanlivo jedná o hrušky a jablká. Ich miešanie nie je také zakázané ako sa niekedy hovorí, treba však pri ňom dávať pozor. Aj v bežnom živote niekedy miešame jednotky času a priestoru. Na turistických smerovníkoch bežne býva vzdialenosť miest

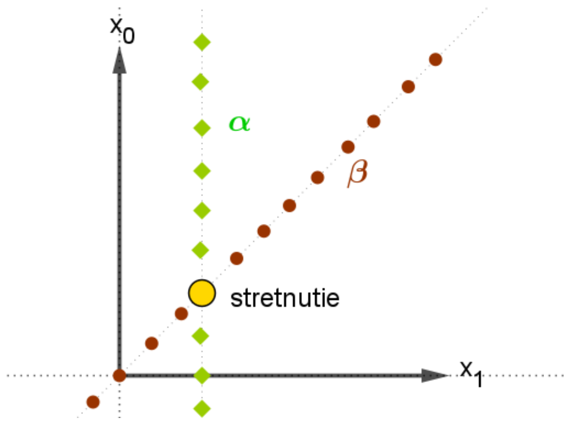
Obr. 19: Vzdialenosť v časových jednotkách je názorná: pútnická minúta či svetelný rok.

udaná v hodinách. Tento údaj môže byť zmysluplný, ak predpokladáme nejakú referenčnú rýchlosť (pri tých smerovníkoch je to rýchlosť priemerného turistu). Vo fyzike máme jednu význačnú rýchlosť, spomínanú rýchlosť svetla z Maxwellových rovníc. Prečo ju nepoužiť ako prevodný faktor? Zaveďme označenie $x_0 = ct$. Budeme tak merať čas v priestorových jednotkách. V opačnom garde to poznáme z astronomických príručiek, kde sa vzdialenosti udávajú vo svetelných rokoch. **Časopriestor** má potom súradnice

$$\begin{aligned} x_i \quad &- \quad \text{priestorové súradnice } \ i = 1,2,3 \\ x_0 \quad &- \quad \text{časová súradnica, svetelná dĺžka} \end{aligned}$$

Body v časopriestore sú **udalosti** - niečo sa stalo niekde a niekedy. Udalosti s rovnakými priestorovými súradnicami sú v danej súradnej sústave **súmiestne** . Udalosti s rovnakými časovými súradnicami sú v danej súradnej sústave **súčasné**. Krivka v časopriestore, ktorých body zodpovedajú **udalostiam z histórie** nejakého pozorovateľa, je jeho **svetočiara**. V časopriestore sa nedá ostať v tom istom bode-udalosti.

[22]Platia rovnice Newtonove ("do prvého rádu v v/c") aj Maxwellove, a je jedno či synchronizujeme hodiny na rôznych miestach svetelnými alebo hmotnými signálmi.
[23]Aj bez ohľadu na pohyb pozorovateľa, keďže to už pokrýva rovnocennosť inerciálnych sústav.



Obr. 20: Udalosti na svetočiarach objektu α, ktorý je v danej súradnej sústave v pokoji, a objektu β, ktorý sa pohybuje pozdĺž osi x. Stretnutie je spoločný bod svetočiar.

Samozrejme grafické znázornenie je potrebné trochu preškálovať. 1 svetelná sekunda predstavuje asi 300 000 km, a 1 svetelný meter zodpovedá asi 3 nanosekundám. Aby časopriestorové obrázky boli trochu pohodlnejšie, volia sa často jednotky času a priestoru tak, aby rýchlosť svetla v nich mala jednotkovú veľkosť. Potom svetočiara svetla sleduje hlavné diagonály súradnej sústavy.

Poďme hľadať transformáciu $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ medzi inerciálnymi sústavami S a $\tilde{S}$.

Vezmime jednoduchý príklad, kde sa sústavy zhodnú na orientácii priestorových osí, aj na čase 0 pri stretnutí počiatkov. Nech sa ich vzájomný pohyb koná pozdĺž osí $x_1, \tilde{x}_1$. Nech sa $\tilde{S}$ voči S pohybuje rýchlosťou v
Linearita takej transformácie znamená

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L & 0 & 0 \\ M & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kx_0 + Lx_1 \\ Mx_0 + Nx_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Hľadáme koeficienty K, L, M, N. Ak požadujeme rovnakú, izotropnú rýchlosť svetla v S aj $\tilde{S}$, znamená to vlastne toto: ak pri míňaní sa počiatkov v nich zasvietime, tak plochy, do ktorých sa práve dostáva svetelný signál, budú rásť s časom. V oboch sústavách požadujeme, aby tieto rastúce plochy boli popísané rovnicami sféry s polomerom úmerným času a rýchlosti svetla, teda

$$(c\tilde{t})^2 - \tilde{r}^2 = (ct)^2 - r^2 \tag{33}$$

$$\tilde{x}_0^2 - (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$(Kx_0 + Lx_1)^2 - (Mx_0 + Nx_1)^2 = (x_0 + x_1)^2 - (x_0 + x_1)^2$$

dostávame tak podmienky

$$K^2 - M^2 = 1$$
$$N^2 - L^2 = 1$$
$$KL - MN = 0$$

Zredukujme počet parametrov. Označme

$$\frac{L}{N} = \frac{M}{K} = q$$

potom máme

$$K^2 - q^2K^2 = 1 \quad \rightarrow \qquad\qquad K = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

$$N^2 - q^2N^2 = 1 \quad \rightarrow \qquad\qquad N = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$$

Pri výbere znamienka pri odmocninách sme zvážili rolu koeficientov K, N v (32) a to, že chceme v oboch sústavách rovnakú orientáciu priestorových osí aj plynutia času. Pre zvyšné parametre potom platí

$$L = qN = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$$
$$M = qK = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$$

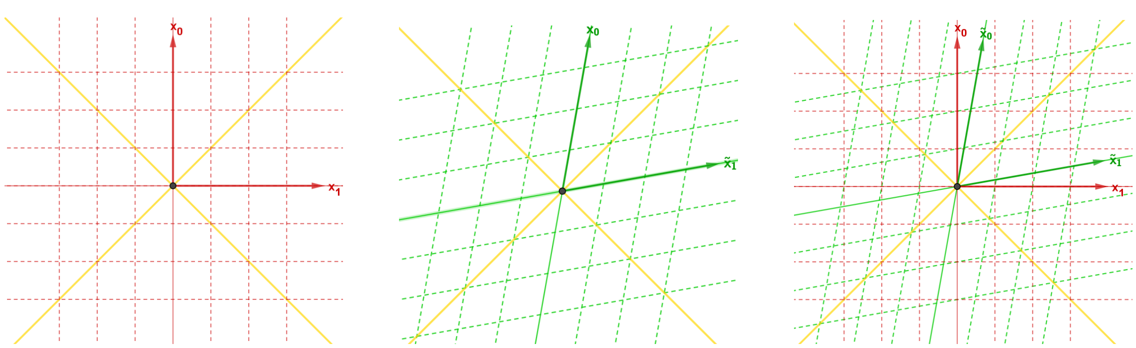
dokopy teda máme (vynecháme tie priestorové premenné, ktoré sa nezmenili)

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \begin{pmatrix} 1 & q \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Ostal nám tu jeden neznámy parameter, q. Ten nájdeme úvahou:

Pre $v \rightarrow 0$ potrebujeme identickú trasnformáciu jednotkovou maticou. Okrem toho, v rámci princípu korešpondencie chceme, aby sa naša transformácia redukovala na galileovskú (31) pre rýchlosti malé oproti svetelnej. To znamená úmernosť q a $-v$. Samozrejme znamienko hovorí len to, že vlnovková sústava sa pohybuje v kladnom smere osi x nevlnkovej sústavy, ide len o tradíciu písať a kresliť veci zľava doprava. Ďalej q má byť bezrozmerné, lebo je pod odmocninou odčítané od 1. A rýchlosť svetla sa experimentálne nedarí prekročiť - ani dosiahnuť hmotnými objektami, teda čakáme $|q| < 1$. To naznačuje $q = -v/c$. Prišli sme tak k transformácii

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{35}$$



Obr. 21: Súradný systém S a jeho pohľad na súradný systém $\tilde{S}$, ktorý je voči nemu v rovnomernom priamočiarom pohybe. Svetočiary svetelného signálu vyslaného z počiatku v čase 0 sú invariantné voči transformácii. Hladiny súčasnosti pre daného pozorovateľa sú rovnobežné s jeho priestorovou osou. Svetočiary objektov nehybných z jeho pohľadu sú rovnobežné s jeho časovou osou.

Poznamenajme tu ešte, že transformácia s rovnakými koeficientami samozrejme viaže aj intervaly v našich súradných sústavách. Tá forma je azda ešte užitočnejšia.

$$\begin{pmatrix} \Delta\tilde{x}_0 \\ \Delta\tilde{x}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Toto si zaslúži rozpísanie. Jedná sa o **Lorentzove transformácie** intervalov.

$$\Delta\tilde{x}_0 = \frac{\Delta x_0 - \frac{v}{c}\Delta x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{37}$$

$$\Delta\tilde{x}_1 = \frac{\Delta x_1 - \frac{v}{c}\Delta x_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Treba si ich dlho obzerať. Pre $v << c$ sa znova objavuje galileovská aproximácia. Keďže naše zmysly sú citlivé na také rýchlosti, dáva táto aproximácia použiteľné výsledky pre každodenné bežné aplikácie. Potom je tu treba poukázať na krásnu symetriu medzi priestorovými a časovými intervalmi. Zápis $ct = x_0$, resp. $c\tilde{t} = \tilde{x}_0$ jej napomohol. Ďalej je veľmi ľahké nájsť inverznú transformáciu, stačí si uvedomiť, že ak $\tilde{S}$ ide voči S rýchlosťou v, potom S ide voči $\tilde{S}$ rýchlosťou $-v$.

Uvedené intevaly sa vzťahujú na súradnice nejakých dvoch udalostí, ktorých priestoročasové súradnice sa líšia o intervaly $\Delta x_0, \Delta x_1$ v nevlnovkovom popise S a $\Delta\tilde{x}_0, \Delta\tilde{x}_1$ vo vlnovkovom $\tilde{S}$.

Všimnime si, že súčasnosť dvoch udalostí v S ($\Delta x_0 = 0$) neimplikuje ich súčasnosť v $\tilde{S}$, teda $\Delta\tilde{x}_0 \neq 0$, pokiaľ neboli dané udalosti v S aj súmiestne, teda aj $\Delta x_1 = 0$. Relatívnosť súčasnosti je novinka, ale je v peknej symetrii s relativitou súmiestnosti, na ktorú sme zvyknutí. Cestujúci vo vlaku povie, že trebárs čaj si nalial aj vypil na jednom mieste, ale z pohľadu výpravcu na nádraží sa tieto udalosti stali mnoho metrov od seba.

Priestorové aj časové intervaly medzi udalosťami sú teda relatívne, záležia od pozorovateľa. Ale ak sa jedná o inerciálnych pozorovateľov, je kvadrát **priestoročasového intervalu medzi udalosťami invariantný**:

$$(\Delta\tilde{x}_0)^2 - (\Delta\tilde{x}_1)^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 \tag{38}$$

Známe efekty ako dilatácia času notoricky ilustrovaná na "paradoxe"dvojčiat či kontrakcia dĺžok podobne ilustrovaná na vlaku idúcom cez prikrátky tunel s nebezpečnými závorami, sú špeciálnymi prípadmi.

Osobitne výzmamný prípad je situácia, keď dve udalosti ohraničujúce časopriestorový interval zodpovedajú bodom na svetočiare nejakého pozorovateľa (povedzme pre konkrétnosť toho, ktorý je trvalo v počiatku $\tilde{S}$). Pre neho je priestorová časť intervalu nulová (keďže obe udalosti nastali v počiatku jeho súradnej sústavy, ktorú si z definície nosí zo sebou) a teda časopriestorový interval je úmerný údaju $\Delta\tilde{\tau}$ na jeho hodinkách, dobe, ktorá mu uplynula medzi týmito pre neho súmiestnymi udalosťami.

$$(c\,\Delta\tilde{\tau})^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 \tag{39}$$

Je to jeho **vlastný čas**, jeho miera plynutia času[24] Veľmi kľúčová veličina.

[24]Parameter, podľa ktorého tiká fáza jeho vlnovej funkcie v kvantovej mechanike. Parameter, ktorý je pri pohybe optimalizovaný, teda udávajúci (aspoň čiastkovú) agendu systému, čo môžeme využiť ak chceme zapojiť do výpočtov variačný počet.

4.4 Rešpekt pre tretí zákon

Spomeňme si na problém s galileovskými trnasformáciami a nezachovaním symetrie tretieho Newtonovho zákona. Overme, či Lorentzove transformácie (35) obstoja lepšie. Uvážme teda dve telesá A,B rovnakej hmotnosti, ktoré boli najprv pokoji v počiatku inerciálnej sústavy S a vzájomným odpudzovaním nadobudli pri strate kontaktu rýchlosti $-u$ a u. Ich pohyb je z hľadiska S popísaný rovnicami

$$x_A = -ut_A$$
$$x_B = ut_B$$

$$\frac{x_A}{t_A} = -\frac{x_B}{t_B}$$

Pozrime sa na popis v súradnej sústave S, spojenej s $\tilde{S}$ transformáciami (35). Vrátime sa tu pre porovnanie k priestorovej osi x a časovej $t = x_0/c$. Ako vidno, formálna symetria tým trochu utrpí:

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Budeme potrebovať opačnú transformáciu, vyjadrenie x, t pomocou $\tilde{x}, \tilde{t}$:

$$t = \frac{\tilde{t} + \frac{v}{c^2}\tilde{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x = \frac{\tilde{x} + v\tilde{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Použime Lorentzovu transformáciu na popis trajektórie telesa A

$$-u = \frac{x_A}{t_A} = \frac{\frac{\tilde{x}_A + v\tilde{t}_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{\frac{\tilde{t}_A + \frac{v}{c^2}\tilde{x}_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{\tilde{x}_A + v\tilde{t}_A}{\tilde{t}_A + \frac{v}{c^2}\tilde{x}_A}$$

$$\frac{\tilde{x}_A}{\tilde{t}_A} = -\left(\frac{u+v}{1+\frac{vu}{c^2}}\right)$$

Použime Lorentzovu transformáciu na popis trajektórie telesa B

$$u = \frac{x_B}{t_B} = \frac{\frac{\tilde{x}_B + v\tilde{t}_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{\frac{\tilde{t}_B + \frac{v}{c^2}\tilde{x}_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{\tilde{x}_B + v\tilde{t}_B}{\tilde{t}_B + \frac{v}{c^2}\tilde{x}_B}$$

$$\frac{\tilde{x}_B}{\tilde{t}_B} = +\left(\frac{u+v}{1+\frac{vu}{c^2}}\right)$$

$$\frac{\tilde{x}_A}{\tilde{t}_A} = -\frac{\tilde{x}_B}{\tilde{t}_B}$$

Teda tretí zákon je splnený aj v transformovanej sústave.

4.5 Druhý zákon do prvého rádu

Lorentzove transformácie sú lineárne, takže prvý zákon rešpektujú - rovné a rovnomerne prejdené trajektórie takými pri nich ostanú. Tretí zákon zachovávajú, ako sme ukázali (na rozdiel od galileovských!). Ako je to s druhým? Ide tu o jednoduché, len mierne zdĺhavé cvičenie v prepisovaní diferenciálnych výrazov v druhom zákone do nových súradníc (35), a použitie inverznej transformácie kde treba. Chceme prepísať výraz $\frac{d^2x_1}{dx_0^2}$. Pripravme si výpočty:

$$\frac{d}{dx_0} = \frac{\partial\tilde{x}_0}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0} + \frac{\partial\tilde{x}_1}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0} - \frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_0}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx_0^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_0^2} + \left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_1^2} - 2\frac{v}{c}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_0\partial\tilde{x}_1}\right)$$

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1 + \frac{v}{c}\tilde{x}_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{d^2x_1}{dx_0^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3}\frac{d^2\tilde{x}_1^2}{d\tilde{x}_0^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{1}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3}\frac{d^2\tilde{x}^2}{d\tilde{t}^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$m\,\frac{d^2\tilde{x}^2}{d\tilde{t}^2} = \left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3 F = \tilde{F}$$

Druhý zákon tým nie je stratený, ale musíme pripustiť jeho modifikáciu tým, že aj sila sa transformuje. Upozornime tu ešte na fakt, že tu sme boli v jednorozmernom prípade a sila bola nevyhnutne v línii pohybu telesa, teda ide o longitudálny prípad. Aj transverzálna sila (teda v smere osi, ktorá sa netransformuje) vo vyššom počte rozmerov by sa transformovala, lebo aj čas sa transformuje, nielen priestor. Ale ubudol by jeden faktor $\sqrt{1-(v/c)^2}$ zodpovedajúci priestorovému smeru.

Všimnime si tu ešte, že do prvého rádu v/c sa sila nemení. Ako sa písalo v spomínanej Sommerfeldovej poznámke.

4.6 Neminúť zmysel

Venujme ešte pár slov istým nedorozumeniam o relativite. Ťažko spomenúť všetky najrozšírenejšie, ale adresujme aspoň niektoré.

Niekedy sa príbeh relativity podáva v zmysle, že pri nesúhlasných symetriách mechaniky a elektromagnetizmu stavila na elektromagnetizmus a stávku vyhrala. Prevzala grupu symetrií elektromagnetizmu, aj sa to osvedčilo. Ale patrí sa poznamenať, že galileovské transformácie nie sú súčasťou Newtonových zákonov, aj keď ich možno považovať za súčasť klasickej tradície. Každopádne však ich prehlasovanie za symetrie klasickej mechaniky je trochu zavádzajúce, ako sme videli pri ich probléme s tretím zákonom. Naproti tomu lorentzovské transformácie rešpektuje prvý aj tretí zákon a druhý minimálne do prvého rádu v parametri v/c. V tomto zmysle sú tak lorentzovské transformácie azda lepšou symetriou aj pre tú mechaniku.

Teória relativity *nehovorí*, že všetko je relatívne. Jeden z postulátov naznačuje, že veci odlišné v rôznych inerciálnych systémoch sú len relatívne, ale hneď druhý trvá na absolútnej rýchlosti svetla (a následne časopriestorového intervalu a mnohého čo s ním súvisí) pre všetky inerciálne systémy. Doba a vzdialenosť medzi dvoma udalosťami môžu byť pre rôznych pozorovateľov rôzne, ale len za predpokladu, že nie sú zároveň súčasné a súmiestne. Ak také sú čo i len v jednej zmysluplnej súradnej sústave, sú také vo všetkých. Stretnutie svetočiar nie je relatívne. Keby to tak nebolo, potom trebárs stretnutie skupiny ľudí by sa podľa jedného pozorovateľa na nástupišti uskutočnilo a podľa druhého v idúcom vlaku nie. Takéto nezhody svedectiev sa vo fyzike netolerujú.

Teória tiež nehovorí, že čas je len ďalšia súradnica ako všetky ostatné. Je možné sa pohybovať po uzavretej (z pohľadu niektorej súradnej sústavy) krivke v priestore. Časopriestorový kolotoč však nemáme. Znamienko mínus v (38) robí z geometrie priestoročasu podstatne odlišnú záležitosť ako Pytagorova veta pre euklidovský priestor, kde všetky súradnice sú rovnakého typu.

Obr. 22: Všetko nie je relatívne a čas nie je ďalšia súradnica ako všetky ostatné.

Ale na rozdiel od newtonovskej fyziky čas sa pri pohybe v relativite transformuje spolu s priestorom, preto uvažujeme scenáre v časopriestore. To bolo nakoniec často výhodné aj predtým. S relativitou však prišiel kľúčový vhľad, **rozlíšenie súradnicového a vlastného času**.

Osobitne zaujímavý je pojem vlastného času v súvislosti so svetlom. Nech naša sústava je S, a uvážme v nej časopriestorový interval medzi vyžiarením svetla z hviezdy a jeho pohltením v našom oku. Keďže svetlo ide práve rýchlosťou svetla, bude tento interval nulový. Žiaden vlastný čas pre svetlo medzi udalosťami, ktorými prechádza, neuplynie.

$$0 = (\Delta x_0)^2 - ((\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2) \tag{40}$$
$$0 = \Delta\tilde{\tau}_{svetlo} \tag{41}$$

Pri pohľade na nočnú oblohu vidíme svetlo z hviezd, ktoré sa podľa nášho súradného systému vydalo na cestu pred rozličnými dobami - pred 2,5 miliónmi rokov v prípade hviezd v Andromédе, pred vyše 8 storočiami v prípade Rigelu, pred asi 2,6 tisícročiami v prípade Deneb, pred 26 rokmi v prípade Vegy. Niekedy hovoríme, že vidíme tak a tak vzdialenú minulosť a cesta tomu svetlo trvala toľko a toľko. To je pohľad nášho súradného systému, nášho rozloženia hladín súčasnosti. Pre svetlo sú však obe udalosti - opustenie povrchu hviezdy aj dopad do našich očí - súčasné. Keď pozeráme na nočnú oblohu, vlastne aj na dennú, a nielen oblohu, je dobré si uvedomiť, že naša pozícia je jediná v celom vesmíre, v ktorej je svetelné "teraz"tvorené práve danou zostavou momentiek.

Obr. 23: Jedinečná zostava dávnych, vzdialených, pre svetlo prítomných udalostí.

5 Vlnovo časticové dilemy

Kvantová teória je na stole už storočie. Niekedy sa predstavuje ako nepochopiteľná a neveľmi pekná, ale je otázne čo sa tým myslí. Že ide proti mnohým predstavám hromadeným osobitne od zrodu modernej fyziky ťažko poprieť. Čo sa krásy týka, vrátili sa s ňou v istom zmysle úvahy o "hudbe sfér", tak netreba robiť unáhlené závery. Samozrejme aj táto teória je len model. Žiaden nie je taký pekný ako skutočná príroda.
Niekedy sa o tejto partii hovorí ako o fyzike mikrosveta - ale nie je dobré to chápať tak, že v makrosvete by jej prejavy nebolo vidno. Aj les si niekedy nevšimneme pre stromy. To, že sa všetko neprepadne ku stredu Zeme (vcelku makroskopický efekt) je prejav Pauliho vylučovacieho princípu, ktorý ani nie je ako formulovať len s pojmami klasickej fyziky. Strelka kompasu je makroskopický objekt, aj jej stáčanie k zemským pólom. Ale vysvetliť vlastnosti strelky nejde klasicky. Ešte aj prežitie pohľadu do ohniska či kuchynskej rúry bez ožiarenia tvrdými gama lúčmi je ťažko vysvetliť klasickou fyzikou (ktorá tu predpovedá nereálne tragický scenár).



Obr. 24: Udržať sa na povrchu, používať kompas a prežiť pobyt blízko zahriatych objektov môže byť podľa klasickej fyziky priveľký problém.

5.1 Dve cesty?

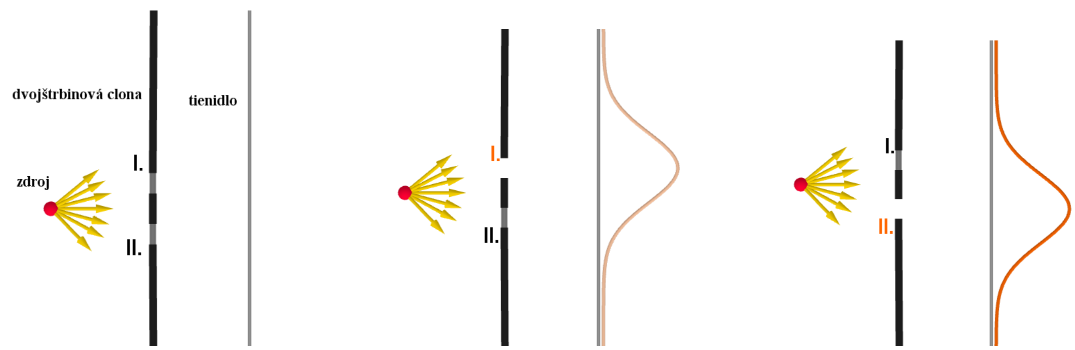
Na prelome 19. a 20. storočia bolo čerstvo objasnených mnoho javov. Ale práve pozorovaním nových a nových situácií začínalo byť zrejmé, že niečo s klasickým popisom je problém. Možno málokto čakal, aké základné predpoklady bude treba prehodnotiť, ale náznaky potreby nejakého prehodnotenia boli. Spätne si môžeme vyberať, ktorý z prejavov tejto skutočnosti použijeme na didaktické účely. Veľmi často sa používa práve **dvojštrbinový experiment** - možno práve kvôli jeho jednoduchosti je na ňom vidno zásadné prvky kvantovej mechnaniky bez rozptyľovanie mnohými detailmi.

Potrebujeme nejaký zdroj objektov, ktorých vlastnosti skúmame. Môže sa jednať o elektrónové delo či lampu s podľa možnosti monochomatickým svetlom. Experiment bol skúšaný aj pre mnohomolekulové útvary, a predpokadá sa, že výsledky by platili aj keby sme použili nerozbitné meteority, s predpokladom príslušného nastavenia parametrov (pre náročnosť tohto nastavenia sa s nimi experiment nerobil). Budeme tu hovoriť o elektrónoch, ale nezabudnime, že zastupujú aj iné objekty, včítane fotónov svetla.

Pred zdrojom je umiestnená nepriestrelná clona s dvomi otvormi - povedzme rovnako veľkými, symetricky umiestnenými voči zdroju. Zdroj vypúšťa objekty veľmi veľkoryso, necieli špecificky na žiadnu štrbinu. V nejakej vzdialenosti od clony je tienidlo. Je celé pokryté detektormi. Každý detektor zaberá rovnakú malú plôšku a všetky sú rovnako citlivé. Zaznamenávajú počet elektrónov, ktoré do nich dopadli a podielom tohto počtu k celkovému počtu dotávame **pravdepodobnosť** dopadu do danej oblasti tienidla. Je výhodné zaviesť aj pojem **hustoty pravdepodobnosti**. Táto vynásobená rozmerom príslušného detektora predstavuje pravdepodobnosť záchytu pre oblasť ním kontrolovanú. Vynásobená rozmerom nejakej oblasti (rozmeru dĺžky, plochy, objemu - podľa toho, koľkorozmerný problém uvažujeme) dáva pravdepodobnosť záchytu v danej oblasti.

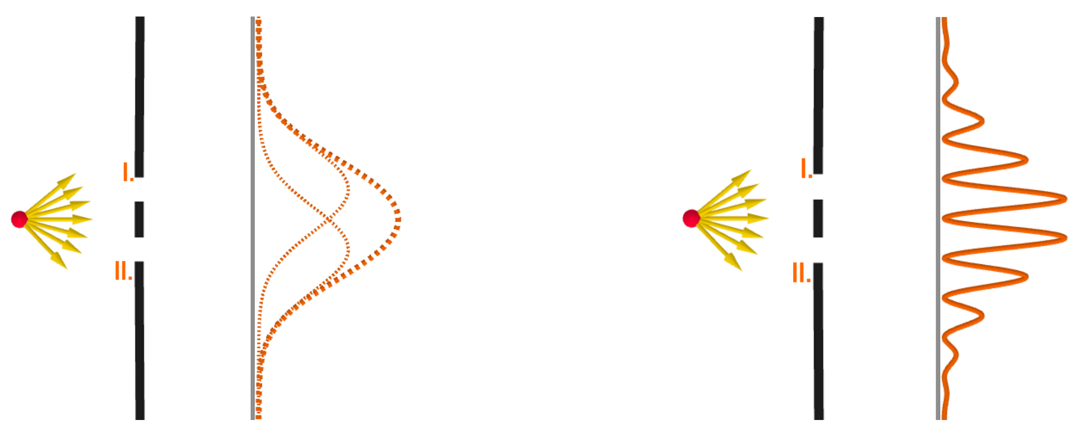
Začnime zaznamenávať elektróny naprv v situácii, keď štrbinu II. uzavrieme. Všetky, čo sa dotali na tienidlo, tak mohli prejsť len štrbinou I. Hneď si všimneme, že všetky záchyty sú rovnako intenzívne - elektrón do detektora buď príde celý, alebo nepríde vôbec. To vyzerá na veľmi *časticový charakter*. Pozrieme sa ešte na početnosť zachytených elektrónov v závislosti od polohy na tienidle, a pravdepodobnosť potom znázorníme pomocou krivky. Nijaké veľké prekvapenie - najviac elektrónov šlo do detektora práve oproti otvorenej štrbine, nejaké sa dostali trochu ďalej.

Zavrieme prvú štrbinu a otvoríme štrbinu II. Zopakujeme všetko ako bolo a dostávame veľmi podobný výsledok, akurát maximum výskytu elelktzrónov je teraz príslušne posunuté oproti stredu druhej štrbiny.



Obr. 25: Experimentálna zostava a priebeh pravdepodobnosti záchytu v závislosti od miesta pri otvorenej buď jednej alebo druhej štrbine.

Teraz otvoríme obe štrbiny. Naivná predstava nám hovorí, že teraz stúpne pravdepodobnosť záchytu všade, kam len elektróny mohli prísť pri otvorenej jednej alebo druhej štrbine. Pribudla predsa možnosť dostať sa tam cez štrbinu, ktorá bola predtým zatvorená. Ak elektrón príde do daného detektora buď po prechode cez jednu alebo druhú, potom celková pravdepodobnosť, že do detektora príde, by mala byť súčet tých dvoch čiastkových. Tak predsa funguje *skladanie pravdepodobností nezávislých udalostí*. Čakáme teda len súčet pravdepodobností. Napodiv však vidíme čosi výrazne iné.



Obr. 26: Naivne očakávaný a naozej pozorovaný priebeh pravdepodobností pri oboch štrbinách otvorených. Prvý dostávame ako súčet štvorcov amplitúd. Druhý dostávame ako štvorec súčtu amplitúd.

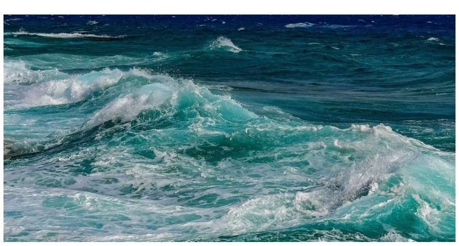
Na niektorých miestach, na ktorých bola pri otvorenej jednej či druhej štrbine nenulová pravdepodobnosť záchytu je teraz nulová. Ako mohli elektróny, ktoré by predtým boli ochotne pristáli na danom mieste po prechode trebárs štrbinou I., vôbec vedieť, že štrbina II. je otvorená? A prečo by to malo mať za následok neprísť do toho miesta cez žiadnu? Pravdepodobnosť záchytu dopadne takto podivne ešte aj keď púšťame mnoho elektrónov po jednom, takže nemôžeme argumentovať tým, že sa azda nejako vzájomne vyrážali z dráhy. Pre naše bežné pochopenie časticového charakteru je toto nezmysel. Ak elektrón prechádza jednou alebo(výlučné) druhou štrbinou, potom prechod jednou alebo druhou sú nezávislé možnosti. Ak sa nejaká udalosť (príchod do istého miesta na tienidle) môže udiať dvomi nezávislými cestami, a každá má svoju pravdepodobnosť, potom pravdepodobnosť, že sa udalosť vôbec stane, je súčet tých jednotlivých pravdepodobností. Osobitne, pravdepodobnosti sú nezáporné čísla, teda ich vzájomná anihilácia neprichádza do úvahy. Pritom existencia jednoznačnej polohy a hybnosti (počas celej histórie pohybu, teda aj v čase prechodu clonou) je jedným z kľúčových predpokladov klasickej mechaniky. Ale taký predpoklad vedie k nezhode s pozorovaním. Predpoklad zrejme *nie je* splnený a elektrón *nemá* v každom okamihu presne priraditeľnú polohu a hybnosť.

Ešte tu poznamenajme, že pri *vlnách* by nás interferenčný obrazec neprekvapil. Pri vlne ψ postupujúcej v čase t pozdĺž osi[25] y, s amplitúdou A, vlnovou dĺžkou λ a periódou T, teda

$$\psi(y,t) = A\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right)}$$

detektor zachytáva energiu, ktorá je úmerná *druhej mocnine amplitúdy vlny*. Klasická vlna samozrejme prechádza oboma štrbinami naraz, nie je lokalizovaná ako klasická častica. Po prechode oboma štrbinami máme akoby dva sekundárne zdroje vlnenia zo štrbín, a takto môže vlna *interferovať sama so sebou*. Sekundárne vlnenia zo štrbín sa skladajú - zosilňujú, zoslabujú, prípadne celkom anihilijú. Detektor zachytáva *štvorec takejto sumy vĺn*, a samozrejme pri deštruktívnej interferencii na mnohých miestach budú nuly tam, kde pri jednej zatvorenej štrbine bola nenulová amplitúda a teda aj jej štvorec. Už-už by sme elektrón prehlásili za vlnu, nebyť skutočnosti, že čokoľvek stvára po ceste, dopadne v celku, do jedného detektora, nie pozdĺž celého tienidla.
To zas klasická vlna nerobí.


Obr. 27: Sme zvyknutí, že vlny dopadá na mnohé miesta a mušľa, kým sa nerozbije, na jedno.

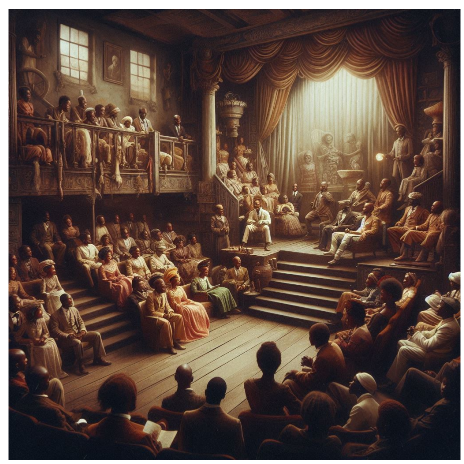



Obr. 28: Sme zvyknutí, že dve vlny sa na mnohých miestach anihilovať, a že mušle také tendencie nemajú.

[25] Trochu netradične je teraz vodorovná os y, aby sme si pre polohy na zvislom tienidle rezervovali tradičnejšie x

Ešte môžeme urobiť jeden chabý pokus. Púšťame elektróny po jednom, a pri štrbiny umiestnime dve lampičky. Chceme sa pozrieť, kade elektrón ide. Predstava je taká, že pri prechode štrbinou I. sa odrazí od elektrónu svetlo z prvej lampičky, pri prechode štrbinou II. svetlo z druhej. Prípadne môžeme dať štrbiny (a teda aj lampičky) ďalej od seba, aby sa ich dosah prekrýval čo najmenej, použiť v každej lampičke svetlo trochu inej farby atď. Rozlišovacia schopnosť je lepšia pre krátke vlnové dĺžky, takže ak ich zvolíme priveľké, jednak nemusíme rozoznať jednu štrbinu od druhej, a svetlo ešte aj môže elektrón obísť, v zmysle nerozptýliť sa na ňom. *Ak však svietime svetlom dosť malých vlnových dĺžok na to, aby sme nič neprehliadli, interferenčný vzor sa stratí a elektróny idú buď jednou alebo druhou štrbinou.*

Naše pozorovanie bolo *interakciou*, prisilnou na to, aby sme z neho mohli robiť závery o situácii bez nášho zásahu. Svetlo tiež nesie hybnosť, a to s kratšími vlnovými dĺžkami ju má väčšiu. Pri rozptyle na elektróne dosť veľkú na to, aby ho mohlo odkopnúť z hypotetickej dráhy, na ktorej sme ho tak nasilu chceli špehovať. Svietili sme svetlom s dostatočnou hybnosťou na to, aby sme elektrón príliš ovplyvnili. *Ak skúsime svetlo dlhších a dlhších vlnových dĺžok, interferenčný vzorec sa objaví, práve keď bude vlnová dĺžka pridlhá na spoľahlivú detekciu elektrónov.* Jednoducho v kvantovom divadle sa buď nedá pozerať, alebo sa treba pridať k hercom a priznať sa k vlastnej role.

Obr. 29: Klasické divadlo rozlišuje javisko a hľadisko. V kvantovom je hranica otázna.

Experimentálne máme **neurčitosť polohy** Δx pri prechode clonou (približne vzdialenosť medzi štrbinami) a **neurčitosť hybnosti** Δp, ktorá je spôsobená interakciou so svetlom z lampy zviazané nasledovne:

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{42}$$

teda cez redukovanú **Planckovu konštantu** $\hbar \approx 1.05 \times 10^{-34} J.s.$ Toto je momentálne jedna z fundamentálnych konštánt ktorej hodnota nie je predpovedaná žiadnou teóriou, je jednoducho zistená experimentálne a teórie ju používajú ako daný parameter.

5.2 Od klasického ku kvantovému popisu

Klasický popis je v ruinách (ruiny sú však skvelý zdroj stavebného materiálu). **Stav** systému, základná matemetická entita reprezentujúca systém, bývala zadaná ako **bod vo fázovom priestore**, priestore **polôh a hybností**. **Časový vývoj** stavu bol reprezentovaný **krivkou vo fázovom priestore**, teda spojitou postupnosťou jeho konkrétnych bodov, parametrizovanou časom. Fyzikálne **veličiny** boli **funkciami na fázovom priestore**, teda jednalo sa o funkcie polohy a hybnosti[26]. Teraz sme narazili na to, že bod vo fázovom priestore, teda určitá poloha a hybnosť v danom okamihu, je niečo čo **nevieme systému priradiť** - ba že už aj *samotný predpoklad, že to možno urobiť, vedie ku sporu* s experimentom (viď úvaha o skladaní pravdepodobností). Nuž a tým padá základný predpoklad na predpovede o systéme na základe klasických pohybových rovníc, ktoré sú v podstate receptom, kam ísť vo fázovom priestore v nasledujúcom kroku, za predpokladu, že vieme, kde sme v ňom teraz.

Vo fyzike sa však revolúcie nedejú zavrhnutím všetkého starého. Treba pozbierať čo fungovalo. Elektróny dopadali štýlom *celý alebo nič*. Časticovosť teda nie je celkom prázdny pojem. Ani detekcia niekde a niekedy nie je celkom prázdny pojem. Netreba sa zatiaľ lúčiť s časopriestorom. *Skladanie bolo ako u klasických vĺn*. Vlnovosť teda nie je celkom prázdny pojem. Skladanie amplitúd (treba premyslieť čoho) zrejme bude hrať veľkú rolu. Tieto črty potrebujeme spojiť v **novom matematickom modeli**, ktorý by mohol reprezentovať systém s takýmito vlastnosťami. Všimnime si, že sme sa nezriekli pojmu *stav systému* (ťažko povedať čo by potom ostalo popisovať), akurát ho ideme reprezentovať niečím iným.

5.3 Stav systému v kvantovej mechanike

Hustota pravdepodobnosti sa v experimente pri oboch štrbinách otvorených správala ako energia klasickej vlny. Tá je úmerná **štvorcu amplitúdy**. Je teda namieste predpokladať, že tak ako odmocnina z energie vlny je entita sama osebe, možno aj **odmocnina z hustoty pravdepodobnosti** je entita sama osebe. Nazvime ju **amplitúda pravdepodobnosti**. Hustota pravdepodobnosti bola očividne funkciou miesta na tienidle, a keby sme elektróny počítali priebežne (a osobitne keby sme elektróny pušťali v nejakom špeciálnom časovom vzore), iste by sa prejavil aj na aktuálnom počte zachytených elektrónov v rozličných časoch. Ak hustota pravdepodobnosti je funkciou priestoru a času, potom je namieste to čakať aj pre amplitúdu pravdepodobnosti. Dajme tejto veličine nejaké označenie. V literatúre je veľmi rozšírené $\Psi(x,y,z,t)$. Amplitúde pravdepodobnosti sa často hovorí **vlnová funkcia** [27]. Predstavuje **stav systému** v kvantovej mechanike[28]. Fyzikálny význam je nasledovný:

$$\int_V |\Psi(x,y,z,t)|^2\,dx\,dy\,dz = \text{pravdepodobnosť záchytu v objeme } V \text{ v čase } t \qquad (43)$$

Amplitúda pravdepodobnosti môže byť **komplexná**. Nemeriame priamo ju, ale až jej veľkosť. Môžeme ju písať ako súčin veľkosti Ψ a fázového faktora $\mathrm{e}^{i\phi}$, ako je často zvykom v komplexnej matematike

$$\Psi = |\Psi|\,\mathrm{e}^{i\phi}$$

[26] kinetická, potenciálna energia, moment hybnosti,... ale ešte aj elektrický prúd predsa súvisí s tým, kde sú elektróny s akou hybnosťou, tlak sa dá chápať ako funkcia hybností mnohých narážajúcich molekúl atď

[27] názov, ktorý azda niektorých matematikov vedie ku škrípaniu zubami, ale museli už prehltnúť horšie, viď "delta funkcia".

[28] Všimnime si, že sme ju zaviedli ako funkciu času a súradníc x,y,z, teda sme akoby uprednostnili konfiguračnú časť fázového priestoru pri dedení z klasickej fyziky. Jedná sa o tzv. x-reprezentáciu, $\Psi_{\vec r}$. Nie je jedinou voľbou. Môžeme si zvoliť hybnostnú, p-reprezentáciu $\tilde\Psi_{\vec p}$, a uvažovať stavy ako funkcie $\tilde\Psi(p_x,p_y,p_z,t)$ Jedná sa o inú reprezentáciu toho istého, a $\tilde\Psi_{\vec p}$,$\Psi_{\vec r}$ tvoria fourierovskú dvojicu, jedna je fourierovským obrazom druhej.

Pod štvorcom sa tu myslí "komplexný kvadrát", teda súčin Ψ a združenej[29] $\Psi^\dagger$

$$|\Psi|^2 = \Psi\,\Psi^*$$

Už v klasickej mechnike a elektromagnetizme sa pri popise skladajúcich sa vektorových veličín či vĺn osvedčili komplexné čísla ako skvelá výpočtová skratka. V kvantovej mechanike je ich význam zdá sa fundamentálnejší[30], potrebujeme buď komplexné čísla alebo nejakú im analogickú štruktúru, aby sme dostávali súhlas predpovedí teórie a experimentov.

Je tu aj istá zvláštnosť - stavu nezodpovedá jedna hodnota $\Psi(x,t)$, lebo ak zmeníme fázu, ktorej komplexný kvadrát je rovný 1, nezmení sa hodnota $|\Psi|^2$. Akurát treba dať pozor, ak skladáme viacero amplitúd, aby sme (ak už fázy posúvame) posunuli všetky konzistentne (lebo fáza síce nehrá rolu pri konečnom umocňovaní konečnej amplitúdy, ale pri priebežnom skladaní je kľúčová.)

Ak $|\Psi|^2$ predstavuje hustotu pravdepodobnosti, potom musí spĺňať istú **normalizačnú podmienku**. Elektrón nemusí mať určitú polohu, ale ak raz existuje ako náš systém, celková pravdpodobnosť niekde ho nájsť v oblasti jemu dostupnej musí byť rovná jednej. V tomto je kvantová mechanika nemenej určitá ako klasická. Je zaujímavé, že práve táto *určitosť kvantovej mechaniky* je častokrát (z výpočtového hľadiska) dôvodom kvantovania hodnôt merateľných veličín. Dôsledok určitosti je tak asociovaný s teóriou, ktorá je asociovaná s neurčitosťou.

$$\int_{V_{\text{total}}} |\Psi|^2\,dV = 1 \tag{44}$$

Zdôraznili sme tu integráciu cez celú dostupnú oblasť V_{total}, obvykle sa bude myslieť implicitne. Nie vždy sa jedná o trojrozmerný integrál, ale čítaním kontextu možno predísť zmätkom.

Upozornime tu ešte ja širšiu interpretáciu: To, čo vidíme v (44) je istý druh **skalárneho súčinu**. Normovateľné vlnové funkcie (lepšie povedané **lúče** vlnových funkcií, kde pod lúčom sa mieni celá trieda $\Psi e^{i\alpha}$, danej funkcie a jej fázových posunutí) tvoria lineárny vektorový priestor vybavený skalárnym súčinom (**Hilbertov priestor**), ktorý nám umožňuje počítať nielen **veľkosti**, ale aj **prekryvy**.
Skalárny súčin $\langle\Psi_1,\,\Psi_2\rangle$ dvoch rôznych stavov Ψ_1, Ψ_2 je

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int_V \Psi_1\,\Psi_2^\dagger\,dV \tag{45}$$

Ak je taký súčin nulový, prekryv stavov je nulový a hovoríme, že sú dané stavy kolmé. Hilbertov priestor je štandardne nekonečnerozmerný, preto netreba nasilu vizualizovať, ale **analógia s vektormi z lineárnej algebry** nie je na škodu (pokiaľ sa neťahá aj kam nesiaha.)

Zhrňme túto časť prechodu od klasického ku kvantovému popisu:

Stav systému klasicky: bod vo fázovom priestore $(\vec{r},\vec{p})$
Stav systému kvantovo: vlnová funkcia $\Psi(\vec{r},t)$

5.4 Fyzikálne veličiny v kvantovej mechanike

Keď už bod vo fázovom priestore nereprezentuje stav systému, potom treba premyslieť aj reprezentáciu **fyzikálnych veličín**. Už to nemôžu byť funkcie na fázovom priestore. Ale mali by to bať

[29] Všeobecnejšie hermitovsky združenej (transponuj a komplexne združ), preto značka † namiesto *. Pri jednoduchých modeloch nie je čo transponovať a hviezdička označujúca komplexné združenie by stačila. Pri reálnej Ψ je aj hviezdička navyše - ale neškodí.

[30] Minimálne niektoré časti matematického formalizmu sa síce dajú prispôsobiť aj iným asociatívnym podielovým algebrám nad reálnymi číslami (sem patria reálne, komplexné a kvaterniónové čísla), ale je potom potrebné k nim dodať istú matematickú štruktúru. S komplexnými číslami sa počíta najľahšie, aj keď je to možno silou tradície a s tým spojených nájdených nástrojov.

matematické entity operujúce na stavoch. Nejaké **operátory** $\hat{\mathcal{O}}$ na vlnových funkciách Ψ. Naše stavy sú komplexné, operátory zodpovedajúce veličinám tiež nebudú mať komplexnosť zakázanú, s jednou výnimkou: **merateľné veci musia byť reprezentované reálnymi vecami**. Imaginárnu energiu, moment hybnosti či polohu by bolo ťažko interpretovať. Merateľnou vecou je **hodnota fyzikálnej veličiny**, napríklad energia je toľko a toľko joulov. Je to reálny údaj. Povedzme, že veličiny sú reprezentované operátormi na vlnových funkciách. Ako z operátora dostať číslo, osobitne číslo v súvislosti so stavom, na ktorom operuje? Tu sa veľmi ponúka myšlienka **vlastných stavov** a **vlastných čísel**. A hneď je naporúdzi aj skupina **hermitovských** operátorov, ktoré, pri všetkej svojej komplexnosti, majú výlučne reálne vlastné čísla. Podobne ako vlnové funkcie sú analógmi vektorov z lineárnej algebry, sú operátory analógmi matíc (matice tiež mali svoje rodiny vlastných vektorov a čísel), a hermitovské operátory sú **analógmi symetrických matíc s reálnymi vlastnými číslami**. Sú tiež symetrické v nasledovnom zmysle:

$$\begin{gathered}\langle \hat{\mathcal{O}}\Psi_1|\Psi_2\rangle = \langle \Psi_1|\hat{\mathcal{O}}\Psi_2\rangle \\ \int_V (\hat{\mathcal{O}}\Psi_1)\,\Psi_2^\dagger\,dV = \int_V \Psi_1\,(\hat{\mathcal{O}}\Psi_2)^\dagger\,dV\end{gathered} \tag{46}$$

Skrátene [31]

$$\hat{\mathcal{O}}^\dagger = \hat{\mathcal{O}} \tag{47}$$

Hermitovské operátory majú aj tú krásnu vlastnosť, že ich vlastné stavy[32] Φ_n, ktorým priradzujú reálne vlastné hodnoty λ_n

$$\hat{\mathcal{O}}\Phi_n = \lambda_n\Phi_n \tag{48}$$

tvoria často **úplný systém** v Hilbertovom priestore, ktorý je pre daný problém relevantný. Môžeme ich prenásobením vhodným faktorom normovať, prípadne pre degenerované spektrum vlastných hodnôt (viac stavov prislúcha tej istej) nájsť ortogonálne kombinácie príslušných vlastných stavov a použiť celý systém ako **ortonormálnu bázu**

$$\langle \Phi_n|\Phi_m\rangle = \int_V \Phi_n\Phi_m^\dagger = \delta_{nm} \tag{49}$$

Všetky ostatné stavy možno vyjadriť ako ich **komplexnú lineárnu kombináciu**[33]

$$\Psi = \sum_n c_n\Phi_n \tag{50}$$

Veľkosti koeficientov $|c_n|$ predstavujú mieru zastúpenia daného bázového stavu Φ_n v stave Ψ, prekryv daný skalárnym súčinom

$$\langle \Psi|\Phi_n\rangle = \sum_m c_m\langle \Phi_m,\Phi_n\rangle = \sum_m c_m\delta_{mn} = c_n \tag{51}$$

Pre normovaný stav $|\Psi_i| = 1$ platí, že súčet kvadrátov koeficientov sa sčítava na 1:

$$1 = \langle \Psi|\Psi\rangle = \sum_m\sum_n c_m c_n^\dagger\langle \Phi_m|\Phi_n\rangle = \sum_m\sum_n c_m c_n^\dagger\delta_{mn} = \sum_m |c_m|^2 \tag{52}$$

[31] Z matematického hľadiska sme tu na zaplakanie neporiadni, k definícii patrí ešte požiadavka na hustú definíciu a správny prekryv definičných oborov $\hat{\mathcal{O}}^\dagger$, $\hat{\mathcal{O}}$.
[32] Teraz budeme číslovať vlastné stavy indexom n evokujúcim diskrétnosť, ale zatiaľ ju nasilu nepredpokladajme.
[33] V prípade spojitého spektra treba integrovať namiesto sumovania

Teraz si to dajme dokopy s interpretáciou hermitovského operátora ako fyzikálnej veličiny. Vlastné stavy takého operátora zrejme predsatvujú stavy systému, ktorým daný operátor jednoznačne priradí reálne číslo. Hovoríme im **čisté stavy**. Má teda zmysel uvažovať o tejto hodnote ako o hodnote danej veličiny v danom stave. Ak tento operátor pustíme na nie vlastný stav, ale stav daný ako lineárne kombinácia vlastných stavov (**zmiešaný stav**), hermitovský operátor dodá čosí takéto[34]:

$$\hat{O}\Psi = \hat{O}\sum_n c_n\Phi_n = \sum_n c_n\hat{O}\Phi_n = \sum_n c_n\lambda_n\psi_n \tag{53}$$

Teda nedostali sme tu jedno vlastné reálne číslo zo spektra, ale ich komplexnú kombináciu. Žiaden merací prístroj nám neukáže imaginárny násobok nejakého počtu joulov, metrov a pod. Ale spomeňme si, že koeficient c_n vyjadruje prekryv stavu Ψ s vlastným stavom Φ_n. Tiež že suma štvorcov koeficientov dáva jednotku ako pravdepodobnosť. Že ak by niektorý z koeficientov sám mal veľkosť 1, potom by ostatné boli nevyhnutne nulové a operátor by jednoznačne priradil príslušné vlastné číslo ako hodnotu veličiny, ktorú operátor predstavuje. Toto všetko nám napovedá nasledovné:

Pri meraní nejakej veličiny $\mathcal{O}$ môžeme nájsť **len hodnoty zo spektra vlastných čísel** operátora $\hat{\mathcal{O}}$, ktorý danú veličinu reprezentuje. Ak meriame veličinu $\mathcal{O}$ na vlastnom stave jej prislúchajúceho operátora, napríklad Φ_n, potom môžeme nameriať len hodnotu k nemu príslušnej vlastnej hodnoty λ_n. Ak prevádzame meranie na všeobecnom stave Ψ, zmiešanom z vlastných, potom stále môžeme namerať len jednu z vlastných hodnôt operátora. Pravdepodobnosť, že nameriame práve konkrétnu n-tú hodnotu je daná kvadrátom veľkosti koeficientu, s ktorým n-ta vlastná funkcia vystupovala v rozvoji Ψ.

$$\Psi = \sum_n c_n\Phi_n \rightarrow \text{pravdepodobnosť namerať hodnotu } \lambda_m \text{ je } |c_m|^2 \tag{54}$$

Zmieňme sa tu ešte o možnosti spojitého spektra. V takom prípade treba integrovať namiesto sumovania. Nespočítateľná báza má svoje matematické háčiky, ktorým sa tu nejdeme venovať.

Zhrňme túto časť prechodu od klasického ku kvantovému popisu:

Fyzikálna veličina klasicky: funkcia f na stavoch (bodoch fázového priestoru) $(\vec{r}, \vec{p})$
Fyzikálna veličina kvantovo: operátor $\hat{\mathcal{O}}$ na stavoch (vlnových funkciách) $\Psi(\vec{r}, t)$

5.5 Existujú nezmyselné otázky

Toto je zaujímavá situácia. Jednak pokiaľ má operátor diskrétne spektrum, potom môžeme namerať len diskrétne hodnoty veličiny, ktorú reprezentuje. A aby nebolo prekvapení málo: Nie každému stavu prislúcha jednoznačná hodnota danej veličiny! Neznamená to, že sa nedá merať - ale že ak máme niekoľko identicky pripravených stavov, meranie na nich môže dopadnúť rôzne. Deterministická predikčnosť klasickej mechaniky (kde znalosť stavu implikovala aj znalosť všetkých relevantných hodnôt fyzikálnych veličín v tom stave) tu končí. Fyzika sa doteraz spoliehala na pravidlo rovnaké začiatky vedú k rovnakým koncom (ak sa prevádzajú so systémom rovnaké veci), tu to neplatí. Upozornime však na jednu vec. Nameranie danej veličiny v nejakom stave predstavuje nevratný zásah do systému. Hovoríme tomu kolaps vlnovej funkcie. Ak meranie dopadlo hodnotou λ_n, potom systém už *je* v čistom stave Φ_n. Ďalšie meranie tej istej veličiny už dopadne rovnako. Nenameriame teda na tom istom zmiešanom stave viac hodnôt (lebo meraním ho zmeníme, a ďalšie meranie už nerobíme na tom, čo bolo). Dostaneme však vo všeobecnosti viac hodnôt na mnohých kópiách toho istého stavu. Pred meraním stav nemá konkrétnu hodnotu danej veličiny. V istom zmysle ju má, len ak je čistým stavom operátora, ktorý danú veličinu reprezentuje.

[34] Zase sme pohnali matematickú korektnosť kamsi ďaleko. Nekomentujeme tu podrobne predpoklady za ktorých možno vymeniť azda nekonečnú sumu a operátor, ani nekomentujeme problémy keď je báza nespočítateľná.

Tu sa dostávame k ďalšej zaujímavosti. Ešte sme si žiaden operátor neuviedli, ale z lineárnej algebry vieme, že vlastné vektory jednej matice nemusia byť vlastnými vektormi inej. Aby tomu tak bolo, musia matice komutovať. Podobne vlastné funkcie jedného operátora nemusia byť vlastnými funkciami iného. Aby tomu tak bolo, musia tie operátory komutovať. To ale znamená, že stav, v ktorom máme istú trebárs hybnosť, bude mať neurčitú polohu, ak operátory polohy a hybnosti nekomutujú. Ak by sa nám polohu podarilo hypoteticky presne zmerať, dostali by sme ho do čistého stavu polohy, ale to už by bol iný ako pôvodný stav, teda informácia o hodnote hybnosti by sa nieže "skryla", ale otázka na ňu by v tomto novom stave už ani nemala zmysel. Nemalo by význam spýtať sa aká je pred meraním hybnosti. A po ňom by zas šlo o iný stav...

Obr. 30: Ak by sme sa pri pohľade na pieskovec ešte nedotknutý dlátom sochára pýtali, či je jeho dielo podarené, aj záporná aj kladná odpoveď by bola typu " ani len zle", kým neexistuje socha, ktorej krásu by bolo možné posúdiť. Analógia je slabá, ale to sa pri klasickom komentári kvantových javov dá očakávať.

Skutočnosť, že niektoré otázky nemajú význam, možno nie je taká nezvyčajná alebo ťažko prijateľná. Otázka, či sa má pozorovateľná veličina spájať so *systémom ako takým* alebo s *meraním na tomto systéme*, mohla byť nastolená už na úrovni klasickej mechaniky. Aj tam by človek po chvíli poctivého uvažovania uznal, že hovoriť o určitej hodnote pozorovateľnej veličiny bez vzťahu k pozorovaniu je dosť nevedecký koncept. Preto je zmysluplnosť otázok typu *Aká je hodnota pozorovateľnej veličiny X, ak ju nepozorujeme?* dosť pochybná už v klasickej fyzike. Akurát že tam nám nuansy unikajú vďaka tomu, že klasická fyzika nepoužíva v tomto smere taký jemný hrebeň ako kvantová teória. Tá môže byť neintuitívna v mnohých ohľadoch, ale v niektorých je pri troche veľmi obyčajného uvažovania logickejšia.

5.6 Konkrétna reprezentácia: hybnosť, poloha, energia

Doteraz sme hovorili veľmi všeobecne. Fyzikálnym veličinám majú prislúchať nejaké hermitovské operátory pôsobiace na vlnových funkciách. Ale hermitovských operátorov je veľa. Ako z nich vyberať? Tu nám opäť prichádza na pomoc zásada revolúcií vo fyzike nevyhadzovať čo bolo dobré na staršej teórii. Nedá sa poprieť, že energia, poloha, hybnosť, moment hybnosti atď z klasickej fyziky fungujú v istom priblížení veľmi efektívne. Pokúsime sa preto zachovať spojitosť s klasickou fyzikou všade, kde táto funguje, bez zanedbania toho, čo nás naučil trebárs dvojštrbinový experiment, kde táto teória zlyhala. Spomínaný experiment nám napríklad hovorí, že hybnosť a poloha sú spojené nejakou vzájomnou neurčitosťou. Čím viac okrešeme interval hybnosti, tým viac nám narastie interval polohy. To napovedá, že operátory polohy a hybnosti nebudú komutovať pri pôsobení na vlnové funkcie. Šlo by to napríklad takýmto priradením (v jednorozmernom prípade):

$$\textbf{Poloha} \;\leftrightarrow\; \hat{x} : \Psi \to \hat{x}\Psi := x\Psi(x,t) \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

$$\textbf{Hybnosť} \;\leftrightarrow\; \hat{p} : \Psi \to \hat{p}\Psi := -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)$$

Prečo takto? Argumentov je dosť, ale treba rozumieť, že keď sa vytvára nová teória, nedá sa odvodiť zo starej (nebola by *nová*), nanajvýš sa ňou dá inšpirovať. Vhodnosť inšpirácie je potom rozhodnutá experimentálne. Fyzika sa nerobí v zrkadlovej miestnosti, treba sa pozerať von oknom a konfrontovať s realitou.

Jednou z motivácií definovať operátor polohy ako obyčajné násobenie súradnicou je jednoduchosť. Takto definovaný operátor má svoje asociácie s argumentom vlnovej funkcie $\Psi(x,t)$, ktorý je interpretovaný ako súradnica konfiguračného priestoru. Prečo potom aj operátor hybnosti nedefinovať ako násobenie hybnosťou? Tu by sme narazili na požiadavku pre tieto operátory, aby nekomutovali. Teda hľadáme nejaký operátor, ktorý nekomutuje s x, pričom hodnota komutátora operátorov by mala byť úmerná Planckovej konštante, tak napovedá dvoštrbinový experiment[35] Naša voľba tu dáva naozaj konštantu, dokonca úmernú Planckovej[36]:

$$[\hat{x},\hat{p}]\Psi = \hat{x}(\hat{p}\Psi) - \hat{p}(\hat{x}\Psi) = x\left(-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = i\hbar\Psi \tag{57}$$

Operátory hybnosti a polohy sú dôležité, nakoniec v klasickej mechanike im asociované veličiny x, p tvorili súradnice fázového priestoru klasických stavov. Ostatné veličiny boli funkciami týchto, a stojí za to sa po tejto analógii pustiť aj v kvantovom prípade. Napríklad kinetická energia častice s hmotnosťou m bola v klasickom prípade daná ako $E_k = \frac{p^2}{2m}$. Potenciálna bola funkciou polohy $U(x)$. Potom v kvantovej verzii môžeme vyskúšať možnosť

$$\textbf{Kinetická energia} \;\leftrightarrow\; \hat{E}_k : \Psi \to \hat{E}_k\Psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi$$

$$\textbf{Potenciálna energia} \;\leftrightarrow\; \hat{U} : \Psi \to \hat{U}\Psi = U(\hat{x})\Psi = U(x)\Psi$$

Operátor celkovej energie má svoje špeciálne meno, **hamiltonián**, a veľmi osobitné postavenie

$$\textbf{Celková energia} \;\leftrightarrow\; \hat{H} : \Psi \to \hat{H}\Psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x})\right)\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\Psi \tag{58}$$

Upozornime tu, že vo viacerých rozmeroch by bol hamiltonián daný ako

$$\hat{H}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x)\right)\Psi \tag{59}$$

[35] Ďalší argument je z teórie symetrie a zákonov zachovania, ktorá nám hovorí, že translačná invariantnosť v nejakom smere súvisí so zachovaním hybnosti v tom smere, a že operátor hybnosti je generátorom translácií. Generátor translácií v nejakej premennej je úmerný derivácii podľa tej premennej. V súvislosti s týmto je odporúčané konzultovať texty o tom pojednávajúce.

[36] Imaginárna jednotka nás nemusí znepokojovať. Operátory nemusia byť reálne, dôležité je , aby tie, ktoré zodpovedajú nejakej merateľnej veličine, mali reálne vlastné hodnoty. Imaginárne jednotky v definícii operátorov môžu práve zachrániť splnenie tejto požiadavky.

Laplacián je geometricky veľmi kľúčový operátor. Niekedy sa hovorí o relativite ako krásnej geometrickej teórii a o kvantovej mechnanike ako o niečom neveľmi ladiacom. Nejaké problémy tam sú, ale kvantová mechanika má očividne s geometriou mnoho dočinenia.

Samozrejme, je namieste otázka či takáto konštrukcia operátorov bude fungovať vždy. Naozaj stačí len vziať klasické vyjadrenie fyzikálnej veličiny ako funkcie polohy a hybnosti, a v ňom zameniť klasickú polohu a hybnosť za naše operátory (56), (57)? Apriori nemáme právo predpokladať, že takýto jednoduchý recept bude fungovať, ale oplatí sa ho vyskúšat v rámci Occamovej britvy, a upraviť, ak sa potom predpovede nezhodnú s experimentom. Napodiv (alebo očakávane?) jednoduchý recept veľmi často funguje. Nie celkom vždy, a je to do istej miery očakávateľné aj preto, že kým x, p klasicky komutujú, ich kvantové verzie $\hat{x}, \hat{p}$ nie. Ak nejaká klasická veličina obsahuje člen úmerný súčinu xp, je to zároveň člen úmerný súčinu px. Ale v kvantovom prípade $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$. Niekedy sa vec dá ošetriť veľmi jednoducho: prepíšeme klasický výraz tak, aby bol explicitne symetrický na permutáciu, a kvantový urobíme podľa toho vzoru

$$px = \frac{px + xp}{2} \quad \longleftrightarrow \frac{\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p}}{2}$$

5.7 Časový vývoj

Už máme kvantovú verziu reprezentácie stavu systému ako vlnovej funkcie (amplitúdy pravdepodobnosti), a reprezentáciu niekoľkých veličín ako operátorov na vlnových funkciách. Ako budeme reprezentovať **časový vývoj**?

V tomto prípade sa veľmi oplatí poznať hamiltonovský formalizmus v klasickej mechanike. Zdôraznime, že sa nejedná o inú teóriu, ale o iný, stále klasický, formalizmus. Veľmi stručne ho tu predstavme aspoň nakoľko bude potrebné pre ďalšie účely. Pozrime sa, čo vlastne klasická mechanika robí. Zo znalosti stavu systému teraz nám pohybové rovnice poskytujú predpoveď pre stav neskôr (alebo aj spätne). Časový vývoj systému predstavuje postupnosť (parametrizovanú časom) jednotlivých stavov. **Pohybové zákony** nám umožňujú zrekonštruovať túto postupnosť zo znalosti jedného jej člena. Ako sme už spomínali, stav systému v klasickom prípade je pre veľmi jednoduchý systém (ako hmotný bod hmotnosti m v jednom rozmere) daný jeho polohou x a hybnosťou $p = m\dot{x}$ (tradične bodka značí časovú deriváciu).
Newtonov druhý zákon pre toto teleso

$$m\ddot{x} = F \tag{60}$$

je diferenciálna rovnica druhého rádu. F je externá sila pôsobiaca na teleso, nezávislou premennou je čas t (parameter vývoja), závislou je súradnica polohy telesa $x(t)$. Takáto rovnica druhého rádu vyžaduje dve počiatočné podmienky - hodnotu neznámej funkcie a jej prvej derivácie v nejakom konkrétnom (obvykle počiatočnom) čase. Inými slovami stav v nejakom čase.

Prepíšme rovnicu (60) do tvaru, v ktorom vystupujú kľučové pojmy (**stav, energia, vývoj**) tak explicitne ako sa dá. Hybnosť súvisí s časovou deriváciou polohy, zmena hybnosti súvisí so silou

$$\dot{p} = F \tag{61}$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

Vidíme tu neoficiálny zákon zachovania formálnej zložitosti - máme dve rovnice prvého rádu (61) namiesto jednej rovnice druhého rádu (60).

Ak je sila konzervatívna, môžeme ju vyjadriť ako záporne vzatý gradient potenciálnej energie U. Ale keďže kinetická energia závisí od hybnosti, nie od polohy, môže byť beztrestne vsunutá do "pozičného gradientu":

$$F = -\partial_x U = -\partial_x (U + E_k) = -\partial_x E$$

Týmto prepisom sily ako záporným gradientom energie máme polovicu (61) vyjadrenú s energiou na pravej strane. Aby sme podobnú vec dosiahli aj pre druhú polovicu, všimnime si, že pravá strana môže byť prepísaná ako derivácia kinetickej energie ($E_k = p^2/2m$) podľa hybnosti. Tentoraz využijeme skutočnosť, že potenciál nezávisí na hybosti v prípadoch ktoré tu uvažujeme, a teda môžeme do derivácie bezpečne popri kinetickej energii prepašovať aj potenciálnu:

$$\frac{p}{m} = \partial_p E_k = \partial_p (E_k + E_p) = \partial_p E$$

. A ešte všetko dokopy:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x E \\ \partial_p E \end{pmatrix} \tag{62}$$

Teda **časová zmemu stavu** súvisí s energiou[37], resp. so vzťahom energie a stavových veličín (x, p).

Ako teraz nájsť kvantovomechanickú verziu zákonov pre časový vývoj? Ako už bolo spomenuté, keby sa dali odvodiť z klasického prípadu, bola by kvantová mechnanika len špeciálnym prípadom klasickej. Je čas múdro hádať kým nepríde zhoda s experimentami.
Skúsme sa však inšpirovať klasickým prípadom (62): Časový vývoj stavu bude zrejme čosi úmerné časovej derivácii vlnovej funkcie, $\partial_t \Psi$. Vzťah energie a stavu môže byť čosi úmerné $\hat{H}\Psi$. Analógia klasickej verzie teda môže byť $\hat{H}\Psi = k\partial_t \Psi$. Konštanta úmernosti by mala byť volená tak, aby bola zhoda predpovedí s experimentom, aby bol operátor časového vývoja hermitovský v zmysle (47), čo súvisí s komplexnou jednotkou, a vhodne uhádnuť zvyšok pomáha aj pohľad na Planckovu konštantu v definícii hamiltoniánu a požiadavka rozmerovej konzistentnosti.

$$i\hbar\, \partial_t \Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t) \tag{63}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\Psi(x,t)$$

Pre viacrozmerný prípad je rozšírenie triviálne (na napísanie, nie nevyhnutne doriešenie)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r},t) \tag{64}$$

To je známa **Schrödingerova rovnica** pre časový vývoj stavu (amplitúdy pravdepodobnosti) v x-reprezentácii. Je to parciálna diferenciálna rovnica, prvého rádu v časovej derivácii a minimálne druhého v priestorovej, keďže kinetická časť hamiltoniánu zahŕňa laplacián. Treba ešte v závislosti od konkrétneho prípadu doplniť **počiatočnú podmienku** a **okrajové podmienky**. Náročnosť nájdenia riešenia závisí do veľkej miery od konkrétneho tvaru potenciálu $U(\vec{r})$. Ukážeme si neskôr jednoduchý príklad kde je riešenie ľahké a zároveň na ňom vidno aj trochu toho slávneho kvantovania.

Najprv však komentár k časovej závislosti. Uvažujme, ako súvisí vlnová funkcia v nejakom čase t s jej podobou v čase o ϵ neskôr:

$$\Psi(x, t+\epsilon) \approx \Psi(x,t) + \epsilon \partial_t \Psi(x,t) = (1 - i\hbar\epsilon\hat{H})\Psi(x,t)$$

[37] V klasickej mechanike v lagrangeovskom a hamiltonovskom formalizme energia súvisí s generátorom posunutí v čase, a tie sa reprezentujú deriváciami podľa času. Zákon zachovania energie súvisí práve so symetriou systémov voči posunutiam v čase.

Hamiltoniánu sa preto hovorí **generátor časového vývoja**, keďže je úmerný časovej derivácii, a táto diktuje prvý krok v Taylorovom rozvoji. Operátor takto súvisiaci s **časovým vývojom**, s predmetom, ktorý fyzika skúmala azda vo všetkých svojich etapách, bude mať **kľúčový význam**, a s ním samozrejme aj veci čo s ním súvisia, napríklad **vlastné čísla a vlastné funkcie**. Tieto tvoria úplný systém a často sa volia ako báza. Okrem ich významného postavenia aj pre svoju jednoduchosť. Vlastné čísla hamiltoniánu teraz budeme volať sugestívne E namiesto λ. Ak je spektrum diskrétne, bude aj rodina vlastných fukcií diskrétna, vtedy sa často označujú aj spodným indexom.

Pre **vlastné stavy hamiltoniánu** $\Phi(\vec{r},t)$ platí

$$i\hbar\,\partial_t\Phi(\vec{r},t) = \hat{H}\Phi(\vec{r},t) \;=\; E\,\Phi(\vec{r},t) \tag{65}$$

To sú vlastne dve rovnice

$$i\hbar\,\partial_t\Phi(\vec{r},t) = E\,\Phi(\vec{r},t)$$

$$\hat{H}\,\Phi(\vec{r},t) = E\,\Phi(\vec{r},t)$$

Časová závislosť jednotlivých vlastných stavov hamiltoniánu (samozrejme zmiešané stavy na tom môžu byť inak, keďže kombinácia jednoduchých vecí môže nabrať zložitejší charakter)je veľmi jednoduchá - exponenciálna funkcia $\exp\left(-iEt/\hbar\right)$. Vlastný stav hamiltoniánu $\Phi(\vec{r},t)$ sa teda dá napísať ako súčin časovej exponenty a funkcie priestoru $\phi(\vec{r})$, ktorá je riešením **bezčasovej Schrödingerovej rovnice**

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \tag{66}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = Be^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(\vec{r}) \tag{67}$$

B je konštanta, vo všeobecnosti komplexná. Jej veľkosť súvisí s normovaním. Voľnosť prípadnej fázy $e^{i\alpha}$ súvisí s tým, že stav je daný ako lúč, množina vlnových funkcií líšiacich sa len fázou. Niekedy sa vynecháva prívlastok "bezčasová", treba si však uvedomiť že sa jedná len o skratkovité vyjadrovanie. Podobne ako v klasickej mechanike, aj v kvantovej riešime časový vývoj stavu, a podobne ako tam, je tento vývoj fundamentálne spätý s energiou. Bezčasová Schrödingerova rovnica je medzikrok vo výpočte, a kým časová platí pre všetky stavy ktoré môžu nastať (akurát pri zmiešaných nemožno apriori očakávať takú jednoduchú časovú závislosť ako pri čistých), bezčasová platí len pre čisté, vlastné stavy hamiltoniánu. Bezčasová rovnica má však s časovou závislosťou čistých stavov veľmi mnoho. Totiž *riešením bezčasovej Schrödingerovej rovnice dostávame konkrétne povolené hodnoty energie, ktoré potom dosádzame do exponenty popisujúcej časovú závislosť* čistého stavu.

Všeobecný, zmiešaný stav $\Psi(\vec{r},t)$ sa potom dá napísať ako **lineárna kombinácia viacerých vlastných stavov hamiltoniánu** $\Phi(\vec{r},t)$. Ak je spektrum diskrétne, je diskrétna aj rodina vlastných funkcií a treba sumovať.

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n\,\Phi_n(\vec{r},t) = \sum_n c_n\,e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\,\phi_n(\vec{r}) \tag{68}$$

V prípadoch, keď je spektrum hamiltoniánu spojité, treba namiesto sumy vziať integrál.

$$\Psi(\vec{r},t) = \int_E dE\,\mathcal{C}(E)\,\Phi_E(\vec{r},t) = \int_E dE\,\mathcal{C}(E)\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\,\phi_E(\vec{r}) \tag{69}$$

V takomto prípade hrajú spojito rozložené hodnoty váhy $\mathcal{C}(E)$ úlohu analogickú ako koeficienty c_n z diskrétnej verzie.

Zhrňme túto časť prechodu od klasického ku kvantovému popisu:

Časový vývoj systému klasicky:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x E \\ \partial_p E \end{pmatrix}$$

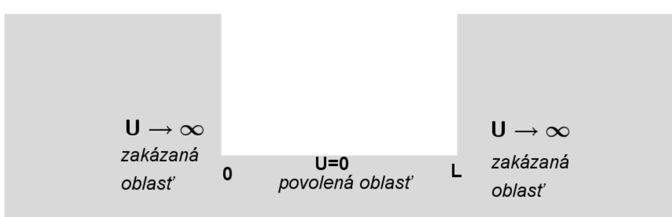
Časový vývoj systému kvantovo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$$

Teda takto sa rieši časový vývoj stavov v kvantovej mechanike. Upozornime tu však, že Schrödingerova rovnica predpovedá časový vývoj pre nerušený systém, a predpovedá ho určito - s dodaním počiatočnej a okrajových podmienok máme jednoznačné riešenie pre amplitúdu, až na možnú komplexnú fázu. Akurát že ak prevedieme na systéme meranie, Schrödingerova rovnica už s ním prinesený kolaps vlnovej funkcie nepopisuje. Ale pre útekom nám ešte zanechá pravdepodobnosti pre výsledok. Ako sa deje kolaps je dosť nejasné na to, aby sme fyziku nepovažovali za čo i len blízku hotovej.

5.8 Tóny z hlbiny

Všetko vyššie napísané bolo zatiaľ formulované všeobecne, a pri takej prezentácii často hrozí, že sa zo zreteľa stratí, čo je vlastne známe, čo neznáme, a v akom poradí treba výpočty prevádzať. Ukážme si teda notoricky známy príklad kvantového systému, elektrónu v potenciálovej jame. Ako to súvisí s hudbou by mohlo byť jasnejšie o chvíľu. Elektrón je, ako sme videli na dvojštrbinovom experimente, akási entita javiaca vlnové a časticové vlastnosti. Tendencia vyhľadávať preferenčne oblasti s nižšou potenciálnou energiou platí aj v kvantovej mechanike[38]. Pod potenciálovou jamou sa myslí oblasť, kde je potenciál nízky (najjednoduchšie bude dať tam jeho nulovú hladinu) oproti situácii v okolí. Ako náš prvý príklad vezmime predpoklad, že v okolí je potenciál dosť veľký na to, aby sme ho efektívne mohli považovať za nekonečný. Teda že elektrón je naisto v ohraničenej oblasti, kde je potenciál nulový.



Obr. 31: Jednorozmerná nekonečne hlboká potenciálová jama. Steny si treba predstaviť do nekonečnej výšky. Elektrón je viazaný na jednorozmernú úsečku, plošný obrázok používame, aby sme naznačili aj hodnoty funkcií na osi.

[38]Len okrajovo tu spomeňme, že ani v klasickej ani kvantovej teórii nejde len o energetickú agendu, ale o akúsi rovnováhu medzi snahou minimalizovať energiu a maximalizovať entropiu. V tomto jednoduchom systéme si vystačíme s úvahou o energii.

Pre hamiltonián máme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

kde m je hmotnosť elektrónu a potenciálna energia je skokovitá funkcia

$$\begin{aligned} U(x) = &\ 0 & x \in (0,\, L) \\ U(x) \to &\ \infty & x \in (-\infty,\, 0\rangle \cup \langle L,\, \infty) \end{aligned}$$

Efektívne je elektrón viazaný na úsečku. Náš model je extrémne idealizovaný, z reálnych objektov sa mu blížia niektoré dlhé molekuly s elektrónmi slabo viazanými na konkrétne jadro, ale s pohybom obmedzeným na molekulu.

Pre všetky možné stavy elektrónu $\Psi(x,t)$ má platiť Schrödingerova rovnica

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t)$$

Nájdime však bázu. Pre čisté stavy $\Phi(x,t)$, vlastné funkcie hamiltoniánu, má platiť

$$i\hbar\,\partial_t\Phi(x,t) = \hat{H}\,\Phi(x,t) = E\,\Phi(x,t)$$

teda postupne

$$\hat{H}\,\Phi(x,t) = E\,\Phi(x,t)$$

$$i\hbar\,\partial_t\Phi(x,t) = E\,\Phi(x,t)$$

Časová závislosť sa navrhne jednoducho

$$\Phi(x,t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}(t-t_0)}\phi(x)$$

kde t_0 závisí od počiatočných podmienok. Tu ho pre jednoduchosť vezmeme nulové. Nevieme ešte, aké E_n patrí do exponentu. To však získame dosadením do priestorovej časti a jej doriešením:

$$\hat{H}\left(e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(x)\right) = Ee^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\left(\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}\phi(x)\right) = E\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}\phi(x)$$
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\phi(x) = E\phi(x)$$

Teraz je čas uvážiť konkrétnu podobu potenciálu a interpretáciu vlnovej funkcie. Ak je potenciál na intervaloch $x \in (-\infty,\, 0\rangle \cup \langle L,\, \infty)$ nekonečný, elektrón tam naisto nebude. Amplitúda pravdepodobnosti tam bude nulová v každom čase, teda jej priestorová časť spĺňa

$$\phi(x) = 0 \qquad\qquad x \in (-\infty,\, 0\rangle \cup \langle L,\, \infty)$$

Na zvyšnom intervale $x \in (0,\, L)$ je potenciál nulový, a bezčasová Schrödingerova rovnica pre priestorovú časť vlastných stavov je veľmi jednoduchá:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi(x)$$

s všeobecným riešením

$$\phi(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x\right)$$

Pozrime, koľko nám tu ostalo neznámych parametrov: konštanty A, B a vlastné číslo E. Koľko rovníc máme k dispozícii na ich nájdenie? Máme tu jednak normovaciu podmienku na amplitúdu pravdepodbnosti (pravdepodobnosť nájsť elektrón na intervale $(0,\,L)$ je rovná jednej), a dve okrajové podmienky pre nulovú hodnotu vlnovej funkcie $\Phi(x,t)$ na okrajoch povoleného intervalu v každom čase (a to tu vie zabezpečiť len jej priestorová časť $\phi(x)$).

Podmienka $\phi(0) = 0$ nám zakáže kosínusovú časť

$$0 = \phi(0) \qquad\qquad \rightarrow \quad A = 0$$

a podmienka $\phi(L) = 0$ nám obmedzí možnosti na argument sínusu

$$0 = \phi(L) = B\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,L\right) \qquad\qquad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,L = n\pi$$

pre nejaké celé číslo n. Nula je zakázaná, lebo taká voľba by viedla k identicky nulovej amplitúde pravdepodobnosti v celej jame, čo je v protiklade s predpokladom, že tam nejaký elektrón naisto je. Našu podmienku možno splniť mnohými, avšak len veľmi špeciálnymi hodnotami energie, diskrétne rozloženými. Označme ich ako

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,n^2$$

Im prislúchajúce vlastné stavy hamiltoniánu budú

$$\Phi_n(x,t) = B_n\sin\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}\,x\right)\,e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

Pre jamu nejakej fixnej šírky máme povolené len tie hodnoty energie, ktoré sú úmerné prevrátenému štvorcu tejto šírky. Najnižšia je

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Ostatné sú jej násobkami. Nie sú ekvidištančné; vyššie sú jej n^2- násobkom, teda máme postupnosť

$$E_1,\;\; 4E_1,\;\; 9E_1,\;\; 16E_1,\;\; 25E_1,\;\; ...$$

Ešte nájdime konštanty B_n z normovacej podmienky. Akýkoľvek prípustný stav, čisté nevynímajúc, má spĺňať interpretáciu ako amplitúda pravdepodobnosti a z toho plynúce dôsledky. Komplexný kvadrát preintegrovaný cez celý dostupný interval je rovný jednej, čo nám dá potrebnú podmienku pre konštantu B_n. Pri výpočte sa zíde skutočnosť, že

$$\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{L}$$

$$1 = \langle \Phi_n | \Phi_n \rangle = \int_0^L dx\, \Phi_n \Phi_n^\dagger$$

$$= \int_0^L dx\, B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\; B_n^\dagger \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{+i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

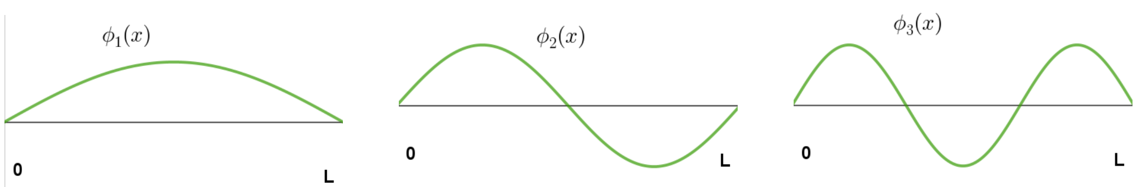
$$= |B_n|^2 \int_0^L dx\, \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = |B_n|^2\, \frac{L}{2}$$

Toto je obmedzemie na veľkosť B_n, nie na prípadanú komplexnú fázu $e^{i\alpha}$. V tomto prípade normovacia konštanta je pre všetky n rovnako veľká. Môžeme pre jednoduchosť voliť

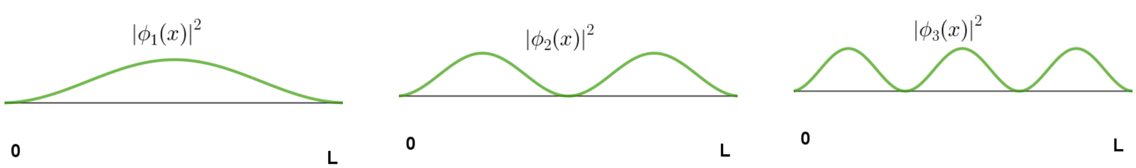
$$B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Teda sme dostali takéto vlastné stavy hamiltoniánu pre elektrón na úsečke, bázu na vyjadrenie všetkých ostatných:

$$\Phi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}\, x\right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}(t-t_0)}$$



Obr. 32: Priestorová časť amplitúd pravdepodobnosti pre prvé tri stavy s ostrou hodnotou energie



Obr. 33: Hustoty pravdepodobnosti pre prvé tri stavy s ostrou hodnotou energie

Čistý stav elektrónu na úsečke veľmi pripomína momentku klasickej struny chvejúcej sa v čistom tóne. Aj v prípade elektrónu ide o momentku, lebo je znázornená len priestorová časť. Podobne ako sa struna chveje s nejakou frekvenciou, jednou z povolených dĺžkou struny, aj elektrónová amplitúda prekmitáva s frekvenciou $E_n/\hbar$, pričom táto tiež nadobúda len jednu z hodnôt povolených rozmerom priestoru, na ktorý je viazaná.

5.9 Čítať medzi rovnicami

Pozbierajme záverom nejaké úvahy, ktoré je ľahko zabudnúť pri slepom počítaní. Toto bola len malá exkurzia do kvantovej mechaniky. Nepreskúmali sme problém merania, ani relativistické rozšírenia takého hračkárskeho modelu ako bol prezentovaný a mnoho iného. Ale aj po málo krokoch sa dá robiť aspoň lokálne posúdenie vývoja.

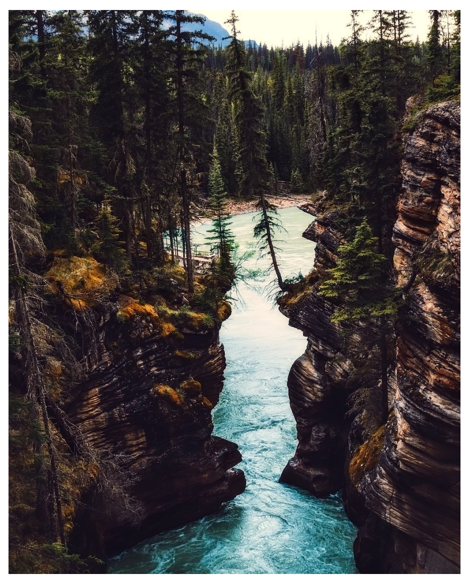
O *vlnovo časticovom dualizme* sa už povedalo toľko, že samotná notorickosť niekedy môže budiť dojem porozumenia. Bolo by omylom domnievať sa, že sa jedná o otázku týkajúcu sa až kvantovej fyziky. O vlnových aj časticových (korpuskulárnych) vlastnostiach svetla sa sporili fyzici už za Newtona, pričom obe stránky mali argumenty v prospech svojho názoru. Špeciálna relativita tiež vykazuje veľmi silné črty tohto dualizmu. To, že vo význačných - inerciálnych - vzťažných sústavách rýchlosť svetla nezávisí od pohybu jeho zdroja, poukazuje na vlnový chrakter svetla. Rýchlosť šírenia vĺn na hladine jazera alebo zvukových vĺn vo vzduchu má takúto vlastnosť. Rýchlosť signálu je daná parametrami prostredia, ktoré ho nesie. Na druhej strane, to, že rýchlosť svetla vnímajú ako izotropnú všetci inerciálni pozorovatelia, poukazuje na balistickú, časticovú teóriu. Ak človek na hladko sa pohybujúcom vlaku hodí od seba na dve opačné strany (jednu v smere pohybu vlaku, druhú proti smeru) dve loptičky rovnako veľkou silou, budú sa v sústave spojenej s vlakom pohybovať rovnako veľkou rýchlosťou. A špeciálna relativita túto vlastnosť pripisuje aj svetlu. Teda časticovo vlnová povaha svetla bola dávnou otázkou. Azda trochu novšou bola časticovo vlnová povaha aj hmotných objektov ako elektróny. Nakoniec však možno to bolo treba očakávať - ak podľa relativity synchronizovanie hodiniek na rôznych miestach môžeme robiť buď hmotnými objektmi (ako loptičky spomenuté vyššie) alebo svetelnými signálmi, poukazuje to na podobné previazanie s časopriestorom ako u svetla, tak u hmotných častíc. Vlnovosť a časticovosť sú tiež v podstate pojmy nemysliteľné bez časopriestoru, a teda nie je taký absurdný predpoklad, že sa elektróny a svetlo budú podobať aj v tomto.

Obr. 34: Častica aj vlna sú len modely. Modely sú použiteľné až kým takými neprestanú byť.

Je dobré ujasniť si v súvislosti s akými javmi sú užitočné, a možno ďalej používať bežný jazyk, hovoriaci o morských vlnách ako vlnách a malých kúskoch hmoty ako o časticiach. Ale jedná sa len o užitočný efektívny model. Morské vlny sú plné častíc, ktoré by pod drobnohľadom javili vlnové vlastnosti na ďalšej úrovni. Slogany typu "podľa kvantovej mechaniky sa častica môže vyskytovať na dvoch miestach naraz"sú, zjemnene povedané, trochu nešťastné. Ich "šokujúcosť"je v tom, že používajú pojem ("častica") ako ho ľudia majú zafixovaný z klasickej mechaniky, a predstavia ho v situácii, ktorá je v tej klasickej mechanike nemysliteľná. Experimenty vedúce ku kvantovej mechanike však nehovoria o tom, čo robí klasická častica, ale že klasická častica neexistuje. Respektíve ak hej, nie je to nič z toho, čo bežne označujeme ako "časticu". S vlnami je to podobne. Ani svetlo nie je " elektromagnetické vlnenie "v klasickom zmysle.

Asociácia kvantovej mechaniky s *neurčitosťou* môže niekedy narobiť veľa škody, ak sa nerozumie poriadne. Podobne ako relativita netvrdí, že všetko je relatívne (naopak), ani kvantová mechanika netvrdí, že všetko je viac či menej neurčité (naopak). Neurčitosť ako taká nebola poprvýkrát prinesená kvantovou mechanikou. Fourierova transformácia bola známa sto rokov pred ňou, a táto viaže dve veličiny vzťahom neurčitosti veľmi podobným tomu Heisenbergovmu. Zenove staroveké úvahy o probléme existencie či neexistencie pohybu v jednom okamihu (keď je poloha určená presne) možno chápať v súvislosti so zmysluplnosťou či nezmysluplnosťou pojmu okamih, teda možnosti spojitého delenia časového intervalu na menšie donekonečna - a tiež v súvislosti s nekompatibilitou súčasného poznania hybnostia a polohy, teda "heisenbergovskou"neurčitosťou. Opäť, poučením kvantovej mechaniky je, že niektoré pojmy (ako napríklad stav a hodnota konkrétnej veličiny) nemožno k sebe slepo priraďovať. Neurčité môžu byť niektoré veci z tých, ktoré sme za také nepovažovali. Ale sú veci, ktoré kvantová mechanika berie ako *isté*. Napríklad pravdepodobnosť musí byť normovaná. Práve požiadavka tejto istoty (ktorá okrem iného naznačuje, že niektoré veci jednoducho nemiznú) vedie ku kvantovaniu energie v mnohých systémoch - požiadavka istoty, nie neurčitosti. Schrödingerova rovnica tiež nie je neistá v zmysle nedeterministická. Stav systému sa podľa nej vyvíja veľmi jednoznačne. Zo stavu teraz rovnica povie stav neskôr. Akurát že ten stav má pravdepodobnostný charakter, prejavujúci sa v situácii, keď Schrödingerova rovnica priebeh prestane popisovať - pri meraní. Netvárme sa však, že determinizmus nedostal s príchodom kvantovej mechaniky ťažkú ranu. Problém merania, kolapsu vlnovej funkcie, je stále ešte otvorená vec (ako nakoniec mnoho vecí vo fyzike), ale nevyzerá pravdepodobné, že by ešte bolo treba sa obávať determinizmu v zmysle, akým bol niekedy prezentovaný.

Kvantová fyzika sa často tiež spomína v súvislosti s diskrétnymi, *nespojitými spektrami*. Nakoniec má to aj v mene. Na jav kvantovania a absurdity kontinua v niektorých prípadoch však narážali ľudia už dávno. Bezzvyškové zreagovanie chemických látok, ak ich množstvá boli v pomere vhodných celých čísel, bola nápoveda k atomárnej teórii, čo možno považovať za kvantovanie hmoty. Toto bolo na stole dávno pred dvadsiatymi rokmi dvadsiateho storočia. Výšky harmonických tónov na strune ako celočíselné násobky základnej výšky boli známe hádam tak dlho ako strunové nástroje, čo možno považovať za kvantovanie hudby. Prekvapenie kvantovej mechaniky však bolo v tom, že kvantované boli aj veci, o ktorých to málokto čakal.



Obr. 35: Hudbe pomáha kvantovanie jej krokov, na cestách je niekedy nevyhnutné. Priepasť sa neprekoná na mnoho malých skokov.

Možno aj úspech diferenciálneho počtu viedol ľudí k mienke, že "príroda nemá rada skoky". Nezdá sa však, že by k nim mala zrovna odpor. Poučenie z kvantovej mechaniky okrem iného je, že priepasti môžu byť tam, kde si namýšľame spojité prechody. Možno ich je viac ako si myslíme, alebo je to ešte celé inak.

Použité alebo doporučené zdroje

Isaac Newton: *Matematické princípy prírodnej filozofie*, Spektrum STU, Bratislava, 2023
anglické preklady voľne dostupné na https://archive.org/details/newtonsprincipi04newtgoog

R.P. Feynmann, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynmann lectures on physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
dostupné aj online https://www.feynmanlectures.caltech.edu

David Tong: *Lecture notes on theoretical physics*
https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/teaching.html

Kevin Brown: *Physics in Space and Time, Reflections on Relativity, Dynamics from Newton to Dirac*
https://www.mathpages.com/home/index.htm

Matthias Blau: *Lecture notes on general relativity*
http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html

P.W.Anderson: *More is different*, Science, New Series, Vol. 177, No. 4047. pp. 393-396., 1972
https://cse-robotics.engr.tamu.edu/dshell/cs689/papers/anderson72more_is_different.pdf

F.J.Dyson: *Why is Maxwell's theory so hard to understand?*
https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/dyson.pdf