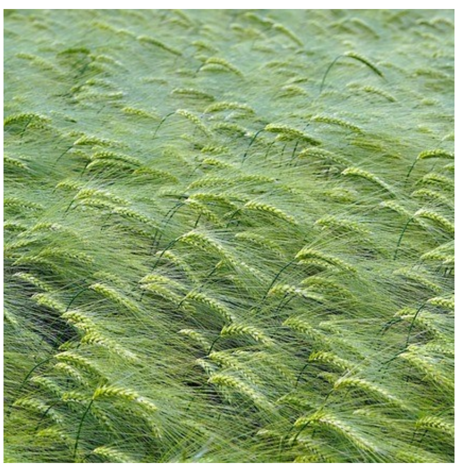
Po tokoch vektorových polí, alebo vektorová analýza

S algebrou sa dá urobiť veľa. Diferenciálny počet však priniesol tiež mnoho. Je užitočné vedieť ho aplikovať nielen na skalárne funkcie, ale aj na všeobecnejšie objekty. Tento text si nekladie ako prvotný cieľ matematickú úplnosť. Ostávame tu s vysvetleniami na intuitívnej úrovni. Po takom osvojení si pojmov je čitateľ pozvaný siahnuť po rigoróznejších pojednaniach, než poskytujú tieto poznámky.

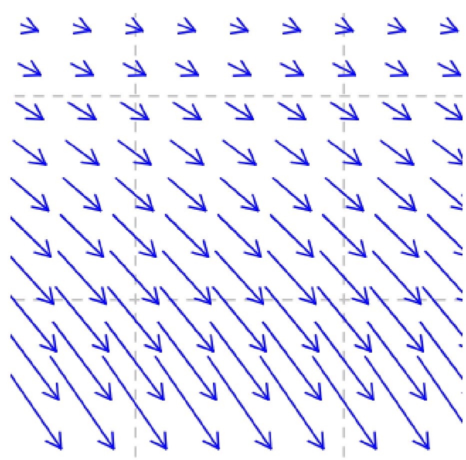
Na začiatok si ujasnime pojem **poľa**. Poznáme už azda čísla, vektory, tenzory… a poznáme funkcie, ktoré jednému objektu priradia nejaký ďalší. Zovšeobecnením a spojením týchto pojmov prichádzame k pojmu skalárnych, vektorových, tenzorových polí. Pole priraďuje nejaký typ objektu každému bodu v priestore, na ktorom je definované.

Obyčajná funkcia jednej premennej je v podstate **skalárne pole** definované na číslenej osi (alebo jej časti). Každému jej bodu priradí číslo (funkčnú hodnotu). Funkcia dvoch premenných nám na rovine (x,y) definuje tiež skalárne pole, lebo každému bodu z roviny (resp jej časti spadajúcej do definičného oboru) priradí práve jedno číslo (Napr. $f(x,y) = x^3 - y^2$ priradí bodu (1,2) číslo -3). A tak ďalej do vyšších rozmerov. Skalárne pole je predpis priradzujúci každému bodu jedno číslo - skalár. Teda funkcia definovaná na nejakom priestore predstavuje skalárne pole.

Vektorové pole priradí každému bodu priestoru vektor. Napríklad pole $\vec{V}$ s komponentami (x, y^2) priradí bodu $(3,2)$ vektor s komponentami $(3,4)$. **Tenzorové pole** (vektor a skalár sú typmi tenzorov) priradí každému bodu tenzor atď.



Obr. 1: Pole obilia



Obr. 2: Pole vektorov

Skalárne pole vyčíslené v nejakom konkrétnom bode je číslo. Vektorové pole vyčíslené v nejakom bode je vektor, tenzorové pole vyčíslené v nejakom bode je jednoducho tenzor, všetko ako poznáme z elementárnej lineárnej algebry. Je veľmi užitočné skúmať, ako sa tieto hodnoty z miesta na miesto menia a ako prudko sa to deje. V prípade skalárneho poľa na 1 rozmernom priestore sa jedná o obyčajnú deriváciu, o využití ktorej asi niet mnoho pochýb; zovšeobecnenie má azda podobnú šancu na úspech.
Dostávame sa tak do ríše vektorovej analýzy.

Nabla

Význačnú úlohu vo vektorovej analýze v euklidovsko svete hrá **nabla operátor**

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \right) \tag{1}$$
$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

Pozrime sa naň ako na "**bázové operátorové vektorové pole**", kde na mieste bázových vektorov v smere jednotlivých osí, teda namiesto $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, máme $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Je to azda nečakaný krok v tomto štádiu, ale ospravedlnený jeho neskoršou užitočnosťou. Určité náznaky motivácie však možno ponúknuť už teraz:

- Bázovosť: vyjadrenie cez derivácie voči súradniciam hovorí o prepojení s bázou, na ktorú sa tie súradnice vzťahujú.
- Operátorovosť: parciálne derivácie zrejme budú pôsobiť (operovať) na niečom (čo závisí od niekoľkých premenných).
- Vektorovosť: značenie sugestívne naznačuje, že počet zložiek zodpovedá rozmerom definičného oboru objektov, na ktoré má operátorové pole pôsobiť. Vektor síce nie je vektorom len svojim počtom zložiek, ale toto dáva nádej, že sa o nejaký môže jednať.
- Poľnosť: parciálne derivácie naznačujú možnosť zmien "z miesta na miesto"

Ako s viaczložkovou vecou sa s nabla operátorom dajú aspoň formálne robiť **analogické operácie ako poznáme z algebry**, teda vyzerá to, že sme na dobrej ceste k rozšíreniu starých známych operácií ako násobenie skalárom, skalárne násobenie (snáď sa tieto už toľko nepletú), vektorový súčin.

Upozornenie k značeniu: v tejto kapitole niekedy voľne zamieňame výrazy *vektorové pole* a *komponenty, ktorými je reprezentované*. Prísne vzaté, ak máme zvolené bázové vektory $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, potom vektorové polia možno písať ako kombinácie týchto bázových vektorov, pričom koeficienty kombinácie sa z miesta na miesto môžu meniť [1]

$$\vec{V} = V^x(x,y,z)\vec{e}_x + V^y(x,y,z)\vec{e}_y + V^z(x,y,z)\vec{e}_z$$

Budeme si to skracovať na

$$\vec{V} = (\, V^x(x,y,z),\, V^y(x,y,z),\, V^z(x,y,z)\,)$$

v duchu zásady, že v didaktike je úzkostlivá dôslednosť niekedy na škodu zrozumiteľnosti. Vektorové pole má svoje komponenty jednoznačne priradené, ak je zafixovaná báza, voči ktorej tie komponenty má. Tu budeme predpokladať, že báza je daná a fixovaná.

[1] O rovnakosti či nerovnakosti bázy samotnej na rôznych miestach tu nemusí byť reč, sme v euklidovskej geometrii kde ignorovanie tejto otázky obvykle neprináša problémy, aj keď to azda býva viac vďaka šťastiu než rozumu.

Gradient

Jedná sa o analóg jednoduchej operácie, ktorú vo vektorovej algebre poznáme ako **násobenie vektora skalárom**. Obvykle sa na vec pozeráme tak, že každú zložku vektora vynásobíme tým istým číslom:

$$a\vec{V} = (aV^x, aV^y, aV^z)$$

Dá sa to však vyjadriť aj z druhej strany - že násobíme skalár vektorom, teda všetky zložky nášho vektora necháme pôsobiť na to isté číslo jednoduchým algebraickým násobením:

$$\vec{V}a = (\, V^x a,\ V^y a,\ V^z a\,)$$

Samozrejme je to to isté - ale taká formálna zmena pohľadu na *pôsobenie na skalár* má výhodu v tom, že je potom ľahšie operáciu zovšeobecniť na polia, osobitne na naše operátorové pole $\vec{\nabla}$, ktorého každá zložka pôsobí na skalárne pole (už nie tradičným násobením, ale ako môže):

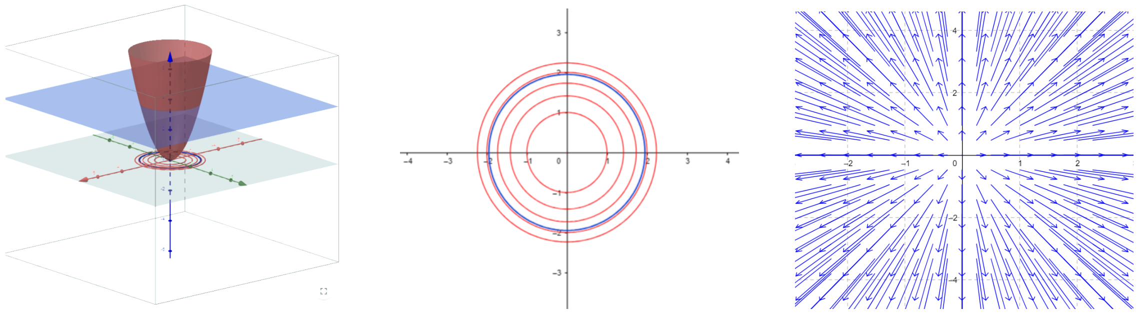
$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\, \partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f\,) \tag{2}$$

Dostávame tak **gradient funkcie, vektorové pole**[2], ktorého zložky nám hovoria, ako sa funkcia mení v smere zodpovedajúcej osi. Je to naozaj rozšírenie jednorozmerného prípadu, keď nám obyčajná derivácia funkcie $f(x)$ podľa jedinej relevantnej premennej x hovorila, ako sa funkčné hodnoty menia pozdĺž osi x, aj keď v 1D nemalo veľa zmyslu hovoriť o smere.

Vo viacerých rozmeroch $\vec{\nabla} f$ má smer, ktorým treba postupovať pre najprudšiu zmenu funkčných hodnôt. Jedná sa o vektorové pole v definičnom obore, teda pre funkciu 2 premenných je 2D, pre funkciu troch premenných 3D…).

Gradient úzko súvisí s pojmom **vrstevnice**, ujasnime si teda ešte aj ten. Vrstevnica je množina bodov na definičnom obore, na ktorých má funkcia f konštantnú hodnotu. Pre funkciu 2 premenných $f(x, y)$ je to vo všeobecnosti krivka v rovine x, y, súbor bodov viazaných podmienkou $(x, y) : f(x, y) = c$. Pre funkciu 3 premenných $f(x, y, z)$ ide o plochu v priestore x, y, z, súbor bodov viazaných podmienkou $(x, y, z) : f(x, y, z) = c$ atď. Názov vrstevnica pochádza z analógie s turistickými mapami. Keďže je ťažké znázorniť nadmorskú výšku, funkciu dvoch premenných, na plochý papier, rieši sa vec tak, že sa zakreslia jej vrstevnice. **Pozdĺž vrstevnice sa funkčná hodnota nemení vôbec. V smere kolmom na vrstevnicu, čo je práve smer gradientu, sa mení najprudšie.**

[2]Poznámka pre nadšencov diferenciálnej geometrie: Slovo vektor má viac významov. V istom kontexte je gradient funkcie kovektor, prvok z duálneho priestoru k objektom, ktoré sa tam nazývajú vektory. Avšak priestor kovektorov je tiež vektorový priestor (v zmysle lineárny), teda v tomto zmysle kovektor *je* vektor. Zložky gradientu nemusia byť vo všeobecnosti iba parciálne derivácie ako sú uvedené v texte, ale v euklidovskom prípade tomu tak je. Nenadšenci diferenciálnej geometrii po prečítaní tejto poznámky nepochybne modifikujú svoj prístup, otázne len je, ktorým smerom.



Obr. 3: Graf funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2$, vrstevnice $x^2 + y^2$ =konšt. a gradient $(2x, 2y)$

Rotácia

Z formálneho hľadiska ide o analóg **vektorového súčinu**. Teda $\vec{\nabla} = (\partial_x,\, \partial_y,\, \partial_z)$ bude pôsobiť na vektorové pole $\vec{V} = (V^x,\, V^y,\, V^z)$ podobne ako pri vektorovom násobení čo sa týka kombinácie zložiek, ale samozrejme jedná sa o operátorové pôsobenie. Výsledkom je opäť **vektorové pole**.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V^x & V^y & V^z \end{vmatrix} \tag{3}$$

teda zložky sú

$$(\, \partial_y V^z - \partial_z V^y,\ \ \partial_z V^x - \partial_x V^z,\ \ \partial_x V^y - \partial_y V^x \,)$$

Už samotný fakt, že hovoríme o vektorovom súčine, naznačuje, že na rozdiel od divergencie a gradientu, pri ktorých rozšírenie do iného počtu rozmerov znamená len pridanie ďalších členov, tu je veľmi význačná trojrozmernosť. Teda $\vec{\nabla}$ treba aplikovať na vektorové pole s troma zložkami. Ak má len jednu alebo dve , dajú sa doplniť dvoma alebo jednou nulou a máme o trojrozmernosť postarané, vo vyššom počte rozmerov sa rotácie treba zriecť.

Rotácia vyjadruje **mieru vírivosti, cirkulačného charakteru** vektorového poľa, a tiež **zmysel** otáčania (proti smeru alebo v smere hodinových ručičiek) a **smer** osi, okolo ktorej otáčanie zisťujeme. Ako takýto intuitívny popis súvisí s algoritmiom výpočtu zložiek rotácie (3) si ukážeme onedlho.

Špeciálny význam 3D

Ujasnime si však ešte trochu pohľad na rotácie. Bežne sa o rotáciách vyjadrujeme ako o *otočeniach okolo nejakej osi*, ale práve tak by sme mohli hovoriť o *otočeniach v rovine kolmej na túto os*. *Práve tak* však len v 3D, **kde ku každej osi jednoznačne prislúcha práve jedna rovina** na ňu kolmá. Vo iných rozmeroch sa už o otočeniach *okolo osi* jednoznačne hovoriť nedá. V 1D je ťažko o rotácii vôbec hovoriť v zaužívanom zmysle, keďže tam je rotáciou zrkadlenie okolo nejakého bodu, diskrétna, nespojitá operácia (v zmysle nemožnosti pootočiť objekt infinitezimálne málo). V 2D nám os otáčania ani nespadá do daného priestoru (vyčnieva kolmo na uvažovaný svet). V 4 a viac rozmeroch ku každej rovine otáčania prislúcha viac nezávislých kolmých osí. Jedine v 3D platí, že máme práve toľko navzájom kolmých osí (tento počet sa zhoduje s dimenziou priestoru) ako rovín. Počet nezávislých osí je počet "bázových"translácií, počet nezávislách rovín je počet "bázových"rotácií. Ťažko vôbec odhadnúť, akú hĺbku tento fakt v našom svete má [3]. Každopádne

[3]Pre nadšencov špeciálnej relativity: Okrem iného súvisí s tým , že potom je počet boostov zhodný s počtom rotácií a štruktúra, ktorá tak vzniká, je pribohatá na poznámku pod čiarou.

rotačná a translačná symetria sa objavuje naprieč fyzikou odkedy táto vôbec vznikla, na veľmi očividných aj veľmi abstraktných úrovniach.

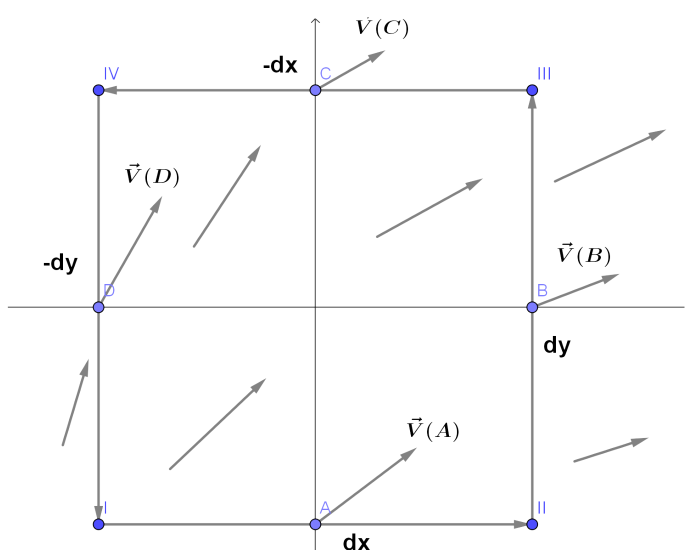
Ešte ujasnime, prečo je vo všeobecnosti veľmi prirodzené chápať rotácie ako operáciu *v nejakej rovine*. Jednoducho to vidno v popise transformácie, ktorá rotáciu sprevádza. Napr. pri operácii, ktorej hovoríme *otočenie okolo osi z*, sa nám miešajú x-ové a y-ové súradnice objektov, kým z-ová sa len vezie.

$$\tilde{x} = x\cos\phi - y\sin\phi$$
$$\tilde{x} = y\cos\phi + x\sin\phi$$

0.0.1 Miera cirkulácie

Vráťme sa však k rotácii ako *miere cirkulácie* vektorového poľa. Že sa bude jednať o rotovanie v nejakej ploche, je zrejmé z komentára o vektorovom súčine. Keďže v nabla operátore vystupujú derivácie, bude sa zrejme jednať o niečo citlivé na infinitezimálnych vzdialenostiach - vhodné merať vírovosť na veľmi malej plôške. Čo je veľmi pozitívna vec, keď si človek uvedomí, že kúsok ľubovoľnej hladkej plochy, ak je dostatočne malý, možno považovať za kúsok roviny. S plochými vecami sa dobre počíta. Takáto plôška disponuje nejakou ohraničujúcou krivkou, a miera vírivosti poľa bude vlatne mierou toho, nakoľko sa prúdnica poľa *ovíja* súhlasne s ohraničujúcou krivkou (znamienko orientácie krivky je vecou konvencie). Miera takéhoto súhlasu toku poľa a obiehania dokola po krivke sa ľahko nájde pre vhodne zvolenú krivku.

Ukážme si to na situácii, keď je plochou malý obdĺžnik s vrcholmi I, II, III, IV v rovine (x,y), hraničnou krivkou c je štvorica jeho strán dĺžky dx, dy, kladný smer obiehania vezmeme proti smeru hodinových ručičiek. Povedzme, že máme dané nejaké vektorové pole $\vec{V}$ so zložkami $V^x(x, y), V^y(x, y)$, teda vektor v každom bode, teda aj v každom bode našej obiehajúcej krivky.



Obr. 4: Veľkosť rotácie je mierou cirkulácie poľa

Ak je náš štvoruholník dosť malý a pole dosť hladké (žiadne divoké zmeny medzi susednými bodmi), potom pole má v blízkych bodoch blízke hodnoty. Nedopustíme sa priveľkej chyby, ak budeme predpokladať, že pozdĺž jednej strany obdĺžnika má všade hodnotu ako v strede tejto strany Teda vezmeme hodnoty poľa $\vec{V}$ v "reprezentatívnych bodoch - stredoch strán A,B,C,D". Priemet nášho poľa do obiehanej krivky je vecou jednoduchého skalárneho súčinu a posčítavania príspevkov zo všetkých 4 strán obdĺžnika. Ak si ešte uvedomíme, že stredy protiľahlých strán sú od seba vzdialené len o infinitezimálne dx, dy, máme k dispozícii Taylorov rozvoj komponent $V^x(x,y), V^y(x,y)$. V ďalšom píšeme skrátene A namiesto (x_A, y_A) atď.

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{V}.d\vec{r} &= V^x(A)dx + V^y(B)dy - V^x(C)dx - V^y(D)dy \\ &= V^x(A)dx + V^y(B)dy - V^x(A+dy)dx - V^y(B-dx)dy \\ &= V^x dx + V^y dy - (V^x dx + \partial_y V^x dy\, dx) - (V^y dy - \partial_x V^y dx\, dy) \\ &= -\partial_y V^x dy\, dx + \partial_x V^y dx\, dy \\ &= (\partial_x V^y - \partial_y V^x) dx\, dy \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{V})_z dx\, dy \end{aligned} \tag{4}$$

Ako vidíme, výpočet cirkulovania v rovine x,y nám dal z-ovú zložku rotácie ako bola uvedená v algoritme (3) prenásobenú veľkosťou obiehanej plôšky.

Pre plochy väčšie ako infinitezimálne platí veľmi priamočiare zovšeobecnenie v podobe Stokesovej vety. (Veľká plôška sa dá podeliť na malé, zdieľajúce svoje vnútorné hranice. Príspevky od týchto zdieľaných hraníc sa však vyrušia kvôli orientácii, a ostane len cirkulácia po vonkajšej krivke.)

$$\oint_{c=\partial S} \vec{V}.d\vec{r} = \int\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} dS \tag{5}$$

Tu ∂_S znamená hranicu[4] plochy S, teda uzavretú krivku c.

Toto je integrálne chápanie rotácie: **Integrál z rotácie poľa cez nejakú plochu je cirkulácia tohto poľa pozdĺž hranice spomínanej plochy**, čo je uzavretá krivka. Špeciálne teda integrál z rotácie cez uzavretú plochu musí byť nulový, keďže taká plocha nemá hranicu.

0.0.2 Gradient necirkuluje

Ukážme si príklad poľa $\vec{W} = (y, -x, 0)$ s nenulovou rotáciou v každom bode a poľa $\vec{U} = (2x, 2y, 1)$, ktoré má všade rotáciu nulovú. Všimnime si, že pole $\vec{W}$ nie je gradientom nijakej funkcie - neexistuje taká, ktorá by spĺňala $\vec{\nabla} f = \vec{W}$. To by znamenalo $\partial_x f = y \cap \partial_y f = -x$, čo nie je možné súčasne splniť. Naproti tomu pole $\vec{U}$ je gradientom funkcie $x^2 + y^2 + z$. Nie je to len náhoda. Rotácia gradientu je identicky nulová:

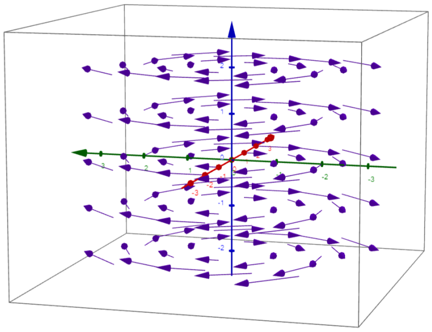
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = \vec{0} \tag{6}$$

pretože parciálne derivácie komutujú

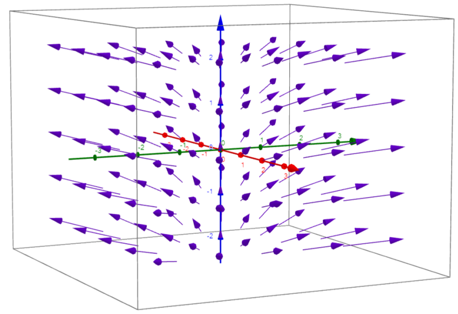
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{e}_x(\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f) + \vec{e}_y(\partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f) + \vec{e}_z(\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) = 0$$

V niektorých prípadoch je to vcelku názorné. Predstavme si potok na horách - steká ako môže dole, v línii gradientu (prísne vzaté s opačnou orientáciou), teda kolmo na vrstevnice. Nebude nás vodiť v kruhu.

[4]Značenie pripomínajúce deriváciu má svoju motiváciu v teórii diferenciálnych foriem, kde jeho použitie vyzerá omnoho prirodzenejšie ako tu.



Obr. 5: Negradientové pole
$\vec{W} = (y, -x, 0)$
$\vec{\nabla} \times \vec{W} = (0, 0, -2)$



Obr. 6: Gradientové pole
$\vec{U} = (2x, 2y, 1)$
$\vec{\nabla} \times \vec{U} = (0, 0, 0)$

Obr. 7: Kolmo na vrstevnice sa netočíme dokola. Nielen kvôli smädu sa stratení pútnici držia potoka.

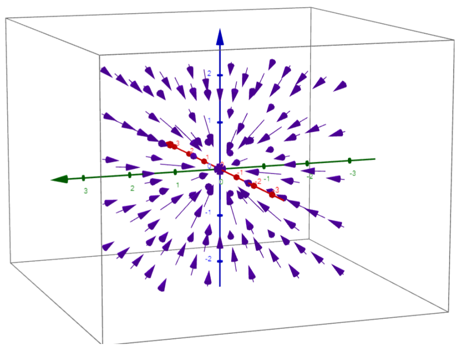
Divergencia

Výpočtovo ide o analóg **skalárneho súčinu** operátora $\vec{\nabla}$ s komponentami ∂_x, ∂_y, ∂_z a vektorového poľa $\vec{V}$ s komponentami (ktoré sú vo všeobecnosti funkciami všetkých premenných) V^x, V^y, V^z. Ako sa patrí na skalárny súčin, výsledkom je **skalárne pole**.

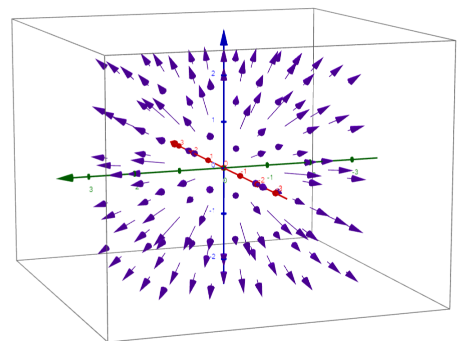
$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \partial_x V^x + \partial_y V^y + \partial_z V^z \tag{7}$$

Zovšeobecnenie do iného počtu rozmerov spočíva len v očividnej úprave počtu členov sčítaných v (7). Pozrime však, čo tento výraz intuitívne predstavuje, aké je interpretácia. **Divergencia** vektorového poľa je "lokálny"pojem, vďaka zastúpeniu derivácií je citlivá na zložky vektorového poľa v danom bode a jeho infinitezimálnom okolí. Predstavuje zdrojovosť poľa v danom bode.

Vektorové pole vytvára akýsi **tok**. Pokiaľ do nejakej oblasti vymedzenej nejakou hranicou - napríklad trojrozmerného objemu ohraničeného uzavretou plochou - priteká dnu práve toľko čo odteká von, potom daná oblasť je len **tranzitná** - nič tam nepribúda, nič sa nestráca. Divergencia by tam mala byť nulová. Príkladom je pole rýchlosti nestlačiteľnej kvapaliny alebo magnetické pole, ktorého siločiary predstavujú uzavreté krivky bez zdrojov a prepadlísk. Pokiaľ do nejakej oblasti viac priteká ako odteká, predstavuje táto oblasť **prepadlisko** a divergencia by tam mala byť záporná. Príkladom je tok elektrického poľa cez uzavretú plochu okolo záporného elektrického náboja - siločiary idú všetky dnu. Pokiaľ je bilancia opačná, z oblasti viac vychádza ako do nej vchádza, je oblasť **zdrojová** a divergencia je tam kladná. Príkladom je elektrické pole tečúce cez uzavretú plochu okolo kladného náboja - všetky siločiary idú von[5].



Obr. 8: pole budené záporným nábojom v počiatku

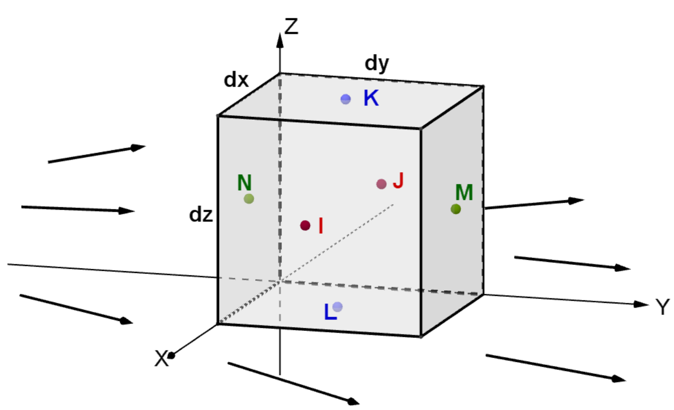


Obr. 9: pole budené kladným nábojom v počiatku

0.0.3 Miera zdrojovosti

Ako súvisí tok cez hranicu nejakej oblasti s divergenciou počítanou ako (7)? Ukážme si to na príklade jednoduchej oblasti v tvare kvádra, ktorej plášť bude predstavovať hranicu. Kváder má jeden z vrcholov v počiatku súradnej sústavy a hrany rovnobežné s osami.

Označme si stredy strán nasledovne:
N je stred strany v rovine xz, M je stred protiľahlej strany, vzdialenej o dy.
L je stred strany v rovine xy, K je stred protiľahlej strany, vzdialenej o dz.
J je stred strany v rovine yz, I je stred protiľahlej strany, vzdialenej o dx.



Obr. 10: Tok poľa $\vec{V}$ cez uzavretú plochu ohraničujúcu malý objem

Nechajme cez kváder pretekať nejaké vektorové pole s komponentami V^x, V^y, V^z (všetky môžu

[5] Samozrejme orientácia siločiar dnu či von pre záporný či kladný náboj je vec konvencie, akurát musia byť tieto voľby opačné.

závisieť od x, y, z, obrázok je len ilustračný). Pokiaľ je kváder veľmi malý, môžeme približne predpokladať, že pole na ktoromkoľvek mieste danej steny sa veľmi neodlišuje od hodnoty, ktorú má v strede tej steny. Tok poľa nejakou plochou počítame ako skalárny súčin tohto poľa a vektora priradeného danému elementu plochy (je to vektor rovnobežný s normálou na plochu, veľký ako daná plocha, a orientovaný konvenčne "smerom von"z uzavretého objemu). **Tok cez celú uzavretú plochu** je potom jednoducho **plošný integrál** cez ňu. V našom prípade, s uvážením, že steny kvádra majú veľmi jednoduché normály (vždy v smere osi komplementárnej k rovine s ktorou sú rovnobežné) a veľkosť (napríklad $dx\,dz$) atď., a že protiľahlé steny sú od seba vzdialené buď o dx, alebo dy, alebo dz, a teda že je možné urobiť Taylorov rozvoj komponent poľa v bodoch takto blízko pri sebe, máme:

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{V}.d\vec{S} &= [-V^y(N) + V^y(M)]dx\,dz + [-V^z(L) + V^z(K)]dx\,dy + [-V^x(J) + V^x(I)]dy\,dz \\ &= [-V^y(N) + V^y(N+dy)]dx\,dz + [-V^z(L) + V^z(L+dz)]dx\,dy \\ &\quad + [-V^x(J) + V^x(J+dx)]dy\,dz \\ &= \partial_y V^y dy\,dx\,dz + \partial_z V^z dz\,dx\,dy + \partial_x V^x dx\,dy\,dz \\ &= (\partial_x V^x + \partial_y V^y + \partial_z V^z)dx\,dy\,dz \\ &= \vec{\nabla}.\vec{V} dV\end{aligned} \tag{8}$$

Úvaha v (8) sa dá zovšeobecniť aj pre väčšie a zložitejšie oblasti, lebo tie sa dajú nasekať na menšie, podobné nášmu malému kvádriku. Tok cez zdieľané vnútorné hranice sa vyruší (čo ide z kvádrika von, ide do susedného dnu) a ostane len tok cez vonkajší obal. Potom dostávame **súvis divergencie poľa preintegrovanej cez objem a toku cez plochu ohraničujúcu tento objem**, v podobe **Gaussovej vety**:

$$\oiint_{S=\partial_V} \vec{V}.d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{V} dV \tag{9}$$

kde ∂_V označuje hranicu[6] objemu V, teda uzavretú plochu S.

Toto je integrálne chápanie divergencie: **Interál divergencie poľa cez nejaký objem je celkový tok poľa hranicou tohto objemu (čo je uzavretá plocha)**.

0.0.4 Cirkulácia bez zdrojov

Spomeňme ešte zaujímavý prípad polí s identicky nulovou divergenciou. Sú to polia, ktoré sú samy rotáciami nejakých polí.

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \partial_x(\partial_y V^z - \partial_z V^y) + \partial_y(\partial_z V^x - \partial_x V^z) + \partial_z(\partial_x V^y - \partial_y V^x) = 0$$

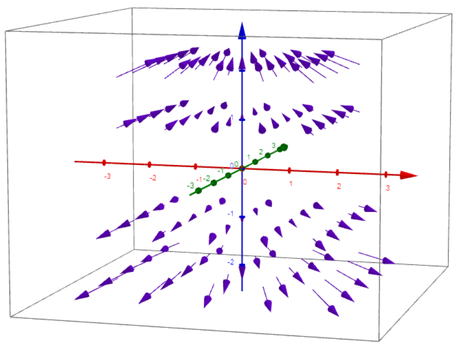
Intuitívne pochopenie faktu, že divergencia rotácie je identicky nulová, je azda ľahšie v integrálnej verzii.Potrebujeme Gaussovu vetu (9), Stokesovu vetu (5) a fakt,že uzavretá plocha nemá hranicu:

Objemový integrál z divergencie poľa $\vec{\nabla}.\vec{R}$ nám hovorí, aký je tok poľa $\vec{R}$ hranicou objemu, teda uzavretou plochou. Ale ak $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$, potom ten plošný integrál je mierou cirkulácie poľa $\vec{U}$ po hranici tejto plochy. Uzavretá plocha však nemá hranicu (hranica hranice je nula).

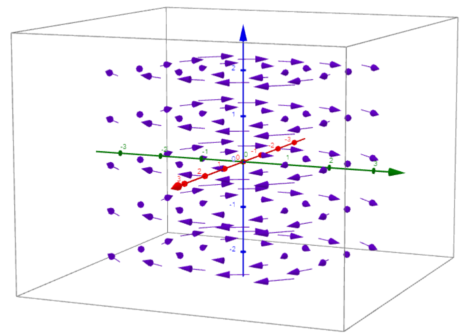
$$\iiint_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{U})\,dV = \oiint_{S=\partial_V} (\vec{\nabla} \times \vec{U}).d\vec{S} = \oint_{c=\partial S=\partial\partial_V} \vec{U}.d\vec{r} = 0$$

Vyskúšajme si komkrétny príklad: $\vec{U} = (-xz, -yz, z)$: toto má divergenciu nenulovú všade okrem bodov rovín $z = \pm 0,5$. Jeho rotácia $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$ so zložkami $(y, -x, 0)$, má všade divergenciu nulovú.

[6] Podobnosť s deriváciou v symbole hranice je ospravedlnená teóriou diferenciálnych foriem.

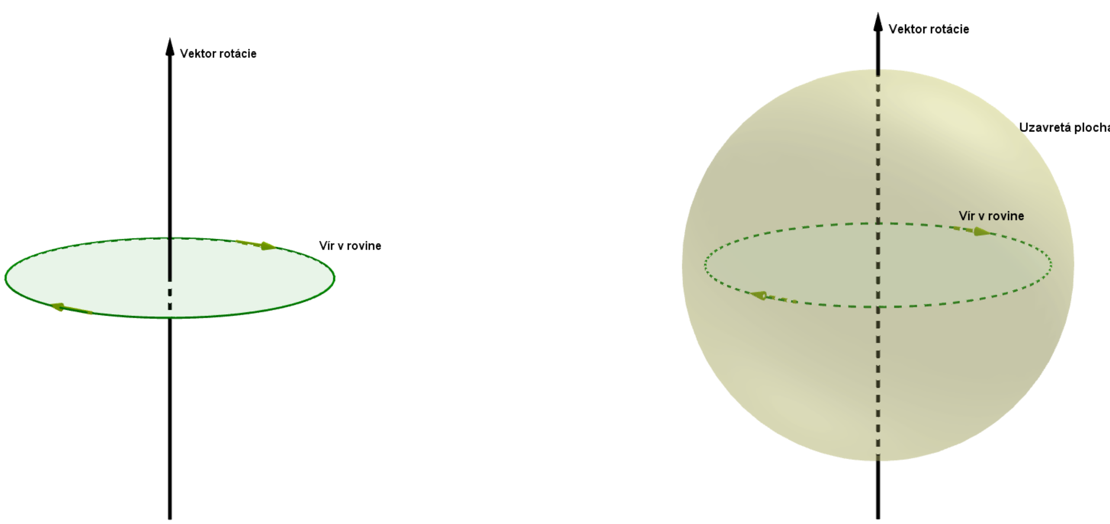


Obr. 11:
$\vec{U} = (-xz, -yz, z)$
$\vec{\nabla}.\vec{U} = 1 - 2z$



Obr. 12:
$\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{U} = (y, -x, 0)$
$\vec{\nabla}.\vec{R} = 0$

Veľmi jednoduchá vizualizácia faktu, že divergencia rotácie je nulová, je založená na predstave jednoduchého víru v rovine, vektora rotácie kolmého na ňu a uzavretej plochy obopínajúcej vír.



Obr. 13: Vír v rovine. Rotácia je vektor kolmý na túto rovinu. Pri jeho vizualizácii nezabudnime znázorniť os otáčania na obe strany roviny, v ktorej je vír - vynechať jednu je obdobou vynechania polovice slučky. Potom akákoľvek uzavretá plocha obsahujúca náš vír je vektorom rotácie prepichnutá rovnako dnu ako aj von. Inými slovami, koľko rotácie ide dnu, toľko ide von, teda divergencia rotácie je nulová.

Laplacián

Tento operátor sa vyskytuje v matematickej fyzike tak často, že dostal meno. Môže operovať na skalárnych aj vektorových či vyšších tenzorových poliach (jednoducho po zložkách, teda laplacián skalárneho/vektorového poľa je skalárne/vektorové pole). Pri pôsobení na skalárne pole f sa z hľadiska výpočtových algoritmov jedná o **divergenciu gradientu**, teda sumu druhých parciálnych derivácií (bez miešaných)

$$\Delta f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f$$

Už zastúpenie **druhých derivácií** z neho robí prominentný operátor vo fyzike, kde majú druhé derivácie zastúpenie dosť bohaté na to, aby človeku trochu zovšedneli a hrozí, že sa prestane pýtať čo im dáva taký význam. Je ešte stále otázne, či sme to už naplno pochopili.

0.0.5 Stredná krivosť alebo miera nerovnomernosti

Intuitívny význam laplaciánu môžeme vyjadriť nasledovne: Δf v nejakom bode je úmerné rozdielu funkčnej hodnoty v danom bode od priemeru funkčných hodnôt v susedných bodoch. Ide teda o **mieru odchýlky od lokálneho priemeru** (strednú krivosť). Ukážeme si to v 1 rozmere, kde je laplacián jednoducho druhá derivácia. Zovšeobecnenie na viac rozmerov je len otázka viacerých členov a parciálnych derivácií namiesto obyčajných.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} - \frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon}}{\epsilon} \tag{10}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon) - 2f(x)}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2}{\epsilon^2} \left(\frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)}{2} - f(x) \right)$$

Funkcie, ktoré majú v nejakom bode nulový laplacián, majú v blízkom okolí takého bodu "v priemere vyrovnaný"graf, pretože funkcia tam musí mať rovnomerne rozložené hodnoty - o koľko na jednu stranu menej, o toľko na druhú stranu viac (špeciálny prípad: na oboch stranách rovnako). V 1 rozmere to môže splniť len funkcia, ktorej grafom je priamka alebo jej časť. V 2 a viacerých rozmeroch je už situácia pestrejšia.

Vo viacerých rozmeroch už nulovosť laplaciánu môže nastať aj u funkcií, ktorých grafy nie sú rovné ako rovina (tieto samozrejme laplacián nulový majú), ale sú v "priemere vyrovnané". Funkcie spĺňajúce $\Delta f = 0$ sa volajú **harmonické** funkcie.

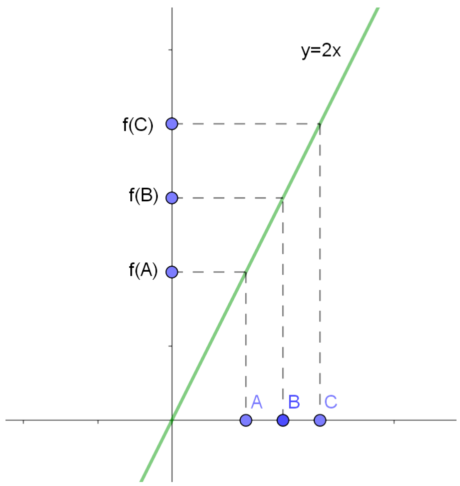
0.0.6 Vlastné funkcie

Harmonické funkcie sú vlastne osobitým prípadom **vlastných funkcií laplaciánu**, na ktoré laplacián pôsobí veľmi jednoducho - preškáluje ich príslušnou vlastnou hodnotou λ, teda

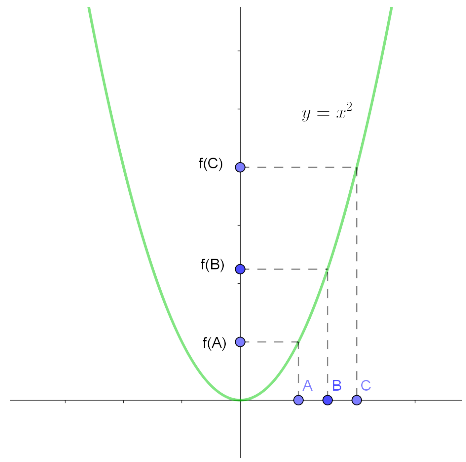
$$\Delta f = \lambda f \tag{11}$$

Vlastné funkcie laplaciánu majú "strednú krivosť", mieru toho, ako sa rozloženie funkčných hodnôt líši od "priemerne rovnomerného", úmernú svojej vlastnej hodnote. Harmonické funkcie, zodpovedajúce nulovej vlastnej hodnote, teda sú majú funkčné hodnoty "v priemere rovnomerne rozložené"všade.

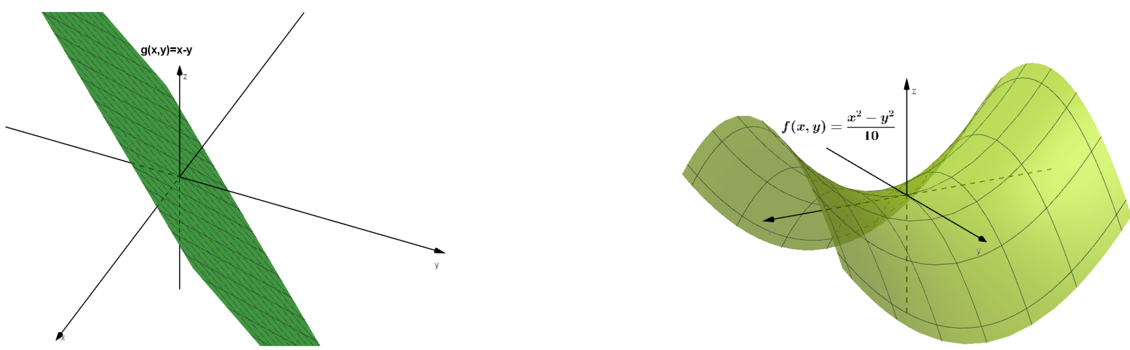
Napríklad funkcie sínus alebo kosínus, vlastné funkcie druhej derivácie (laplaciánu v 1D), sú v takomto zmysle najviac zakrivené vo svojich minimách a maximách.



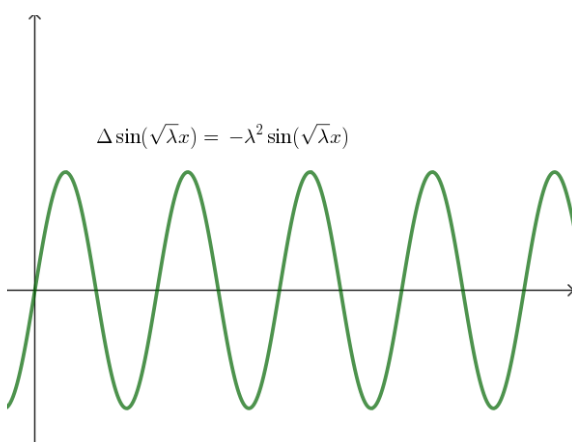
Obr. 14: Funkčná hodnota v bode je priemerom hodnôt v susedných bodoch, teda $\frac{d^2f}{dx^2} = 0$



Obr. 15: Funkčná hodnota v bode sa líši od priemeru hodnôt v susedných bodoch, teda $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$



Obr. 16: Obe funkcie majú funkčné hodnoty rozložené rovnomerne v zmysle nulového laplaciánu.



Obr. 17: Odchýlka funkčných hodnôt od priemeru susedov je pre funkciu $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ priamo úmerná funkčnej hodnote v danom bode, s konštantou úmernosti $-\lambda^2$.

Keďže laplacián sa vyskytuje v mnohých lineárnych rovniciach popisujúcich dôležité javy (vedenie tepla, tepelná rovnováha, šírenie vĺn...), majú jeho vlastné funkcie osobitný význam. Osobitne preto, že často tvoria pre daný problém tzv. úplný systém, čo zhruba znamená, že všetky relevantné funkcie (osobitne hľadané riešenia rovnice) sa dajú napísať ako ich lineárne kombinácie. Známa **Fourierova trasformácia** je príkladom systematického využívania vlastných funkcií laplaciánu v kartézskych súradniciach, na pravouhlých doménach. Niektoré špeciálne funkcie (napr. Besselove) súvisia s problémom vlastných hodnôt laplaciánu v cylindrických či sférických súradniciach (nemusia byť priamo jeho vlastnými funkciami). Keďže vyjadrenie laplaciánu v iných ako kartézskych súradniciach vyzerá relatívne zložito, je namieste otázka, prečo vôbec nejakú rovnicu písať v iných súradniciach a rozkladať veci do zložitejších funkcií namiesto fourierovských sínusov a kosínusov. Odpoveď je jednoduchá - laplacián nie je jediná vec čo, sa v rovniciach vyskytuje, plus ešte je tu tvar domény a okrajové podmienky, ktoré majú na tvar riešenia porovnateľný dopad ako rovnica samotná. Ak iné prvky v rovnici alebo okrajové podmienky vykazujú inú ako translačnú symetriu (táto volá po kartézskych súradniciach), býva často výhodné voliť súradnice, ktoré ju rešpektujú. Osobitne je to výhodné pre sféricky alebo cylindricky symetrické situácie, keďže tie vykazuje aj laplacián, a teda príslušná zámena súradníc jeho kvality rešpektuje tiež.

0.0.7 Symetrie laplaciánu

Pod symetriou rozumieme nasledovné: Je to invariantnosť voči nejakej transformácii. Tu budeme spomínať dvojrozmerný priestor, samozrejme vec sa dá zovšeobecniť. Teda urobíme transformáciu premenných

$$x, y \longrightarrow \tilde{x}(x,y), \tilde{y}(x,y)$$

a máme nové vlnovkové premenné vyjadrené pomocou starých bezvlnovkových. Podľa situácie si niekedy potrebujeme ešte explicitne vyjadriť aj inverznú transformáciu, teda staré premenné pomocou nových, $x(\tilde{x},\tilde{y}), y(\tilde{x},\tilde{y})$. Potom prepíšeme náš skúmaný objekt (operátor, rovnicu atď) do nových súradníc. Ak sa tým nezmení jeho tvar (okrem pridania vlnoviek na symboly), je ten objekt voči danej transformácii invariantný.

Ukážme si to na translácii zodpovedajúcej posunutiu o konštantné (a, b): to je operácia, ktorá nám prevedie $x, y \longrightarrow \tilde{x}(x,y), \tilde{y}(x,y)$ nasledovne:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(x,y) &= x + a \\ \tilde{y}(x,y) &= y + b \end{aligned}$$

Keby sme na niečo potrebovali (v tomto prípade nebude treba) inverznú transformáciu (vyjadrenie starých súradníc pomocou nových), je

$$\begin{aligned} x(\tilde{x},\tilde{y}) &= \tilde{x} - a \\ y(\tilde{x},\tilde{y}) &= \tilde{y} - b \end{aligned}$$

Nabla operátor je voči transláciám invariantný, lebo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial (x+a)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (y+b)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial (x+a)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (y+b)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{aligned}$$

Teda nabla operátor si v nových, posunutých súradniciach zachoval tvar ako predtým

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)$$

Laplacián potom samozrejme tiež zachová formu, je tiež translačne invariantný, alebo symetrický voči traslåciám:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$$

Podobne možno ukázať, aj keď s trochu väčšou spotrebou času a papiera, že laplacián si zachová formu pri pootočení súradníc. V troch rozmeroch je invariantný voči transláciám podĺž všetkých osí a rotáciám vo všetkých súradných rovinách (a voči ich kombináciám).

Symetrie laplaciánu vyjadrujú veľmi hlboké fakty o geometrii daného priestoru. To, že v euklidovskom priestore je symetrický vzhľadom na translácie a rotácie, súvisí s tým, že uhly a dĺžky, ako sú definované v euklidovskej geometrii, sú invariantné voči takýmto transformáciám. Intuitívne to možno očakávať na základe interpretácie laplaciánu funkcie ako miery odchýlky funkčnej hodnoty v danom bode od priemeru hodnôt u susedov. Myslia sa samozrejme všetci rovnako vzdialení susedia. A pojem "rovnako vzdialení"vyžaduje mať jasno v tom, ako sa v danom priestore počítajú vzdialenosti - teda o geometrii toho priestoru.

This project No. 2259/02/01 has received funding from the European Union´s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 945478.