Symetrie - stopy krásy v matematike

Transformácie sú dôležité, a niektoré ich triedy majú osobitne význačné vlastnosti. Napríklad tým, že napriek tomu, že "niečo sa deje", niečo sa nemení, zachováva[1]. Pojem **symetrie** ide ruka v ruke so zdanlivo opozičnými pojmami **transfomácie** a **invariantu**, zmeny a stálosti. Transformácia, prechod od jedného stavu systému k inému stavu, je pre daný systém symetriou, ak sa počas nej nestráca niečo charakteristické, čo tvorí identitu systému. Táto zachovávajúca sa charakteristika je potom vzhľadom na danú transformáciu invariantom. Symetrie sa oddávna spájajú s krásou. Tu sa budeme venovať jej prejavom v matematike, hľadajúc dôkazy že krása nie je "len"na ozdobu.

Transformácie a toky, analógia s tečením

Transformácie možno deliť podľa rôznych kritérií. Ako veľmi dôležité kritérium sa ukazuje spojitosť či diskrétnosť. V oboch prípadoch existuje pojem identickej ("nulovej") transformácie, ktorá "nerobí nič". V diskrétnom prípade však existuje nejaká najmenšia nenulová transformácia, akýsi minimálny krok. V spojitom prípade je možné si ľubovoľnú nenulovú transformáciu predstaviť ako poskladanú z ešte menších - môžeme postupovať po infinitezimálne malých kúskoch. Spojitosť transformácie súvisí so spojitosťou parametra, ktorý ju kvantifikuje. Napríklad pri posunutí predstavuje tento parameter vzdialenosť, pri otočení uhol...

Zdanlivo triviálne pozorovanie, že veľká trasformácia sa dá urobiť ako suma mnohých malých, má nečakane veľký dopad na schodnosť a užitočnosť výpočtov. Ďalšia ukážka pravidla, že hlboké

Obr. 1: Aj cesta dlhá tisíc míľ sa začína prvým krokom. Začiatky spojitých transformácií a nemennosť je ťažšie rozpoznať. Čas ukáže rozdiel.

uvažovanie nad jednoduchými vecami prináša viac ovocia ako povrchné hĺbanie nad komplexnými problémami.

Začnime veľmi jednoducho. Budeme najprv uvažovať o **transformáciách v euklidovskej rovine**. Použime jednoduchú analógiu - predstavme si rovinu ako povrch rieky, a pohyb (tečenie) jednotlivých molekúl bude reprezentovať transformácie bodov v rovine. Samozrejme, takéto podobenstvo má svoje limity - jednak body v euklidovskej rovine sú nekonečne malé a nekonečne nahusto, takže si musíme predstaviť "spojitú vodu"s nekonečne malými čiastočkami (čo by malo byť porovnateľne ľahké alebo ťažké ako pri tej vode). Ďalej voda je do značnej miery nestlačiteľná, ale model nestlačiteľnej vody je použiteľný na intuitívne uchopenie len tých transformácií, ktoré žiadne dva body nemapujú do toho istého obrazu. Postupne si však môžeme rozširovať podobenstvo aj na také prípady, môžeme si predstavovať stlačiteľnú kvapalinu, dokonca kvapalinu, ktorá čarovne vzniká a zaniká.

[1]Bez tohto nakoniec ťažko vôbec uvažovať o svete. Je človek, ktorého vidíme dnes ráno ten istý, ktorého sme videli včera večer? Čas sa zmenil, možno aj ten človek sa zmenil. Ale je niečo, čo ostalo, čo nám umožňuje hovoriť o jeho identite. Rozpoznať, čo sa mení a čo zachováva chce dávku rozumnosti až múdrosti. Tu sa budeme pohybovať na bezpečnej pôde matematických a geometrických transformácií.

Obr. 2: Vodný tok transformuje konštelácie lístia na hladine.

Uveďme si niekoľko prípadov takéhoto tečenia bodov v rovine (zovšeobecnenie do viac rozmerov nie je v princípe problematické, iba náročnejšie na grafické zobrazenie). Nech body (x, y) odtečú do nových bodov $(x(\epsilon), y(\epsilon))$. Máme vlastne **parametrické vyjadrenie krivky - prúdnice** v rovine.

$$(x, y) \longrightarrow (x(\epsilon), y(\epsilon)) \tag{1}$$

$$(x, y) = (x(0), y(0))$$

Parameter transformácie ϵ je analogický času pri naozajstnom tečení. V čase $\epsilon = 0$ sme na štartovacom bode. Dlhší čas zodpovedá väčšiemu ϵ. Hodnota kóduje polohu pozdĺž prúdnice. Súbor všetkých prúdnic tvorí **tok**(a tento tu tvorí transformáciu roviny). Keď hovoríme o toku a prúdniciach (plavebných čiarach), je namieste aj úvaha o **rýchlosti** plavby. Rýchlosť je vektor v smere pohybu, ktorého veľkosť súvisí s mierou zmeny polohy voči zmene parametra. Toto všetko vedie k definícii komponent rýchlosti v nejakom bode (zvoľme tento bod ako štartovací)

$$(V^x,\, V^y) = \left(\frac{dx}{d\epsilon}, \frac{dy}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} \tag{2}$$

Vektor s takýmito komponentami budeme ho volať **generátor toku či transformácie**. Komponenty prúdnic (1) sa dajú získať spätne integrálmi komponent vektora (2), hovoríme im teda **integrálne krivky**.

Označenie "generátor"dáva dobrý zmysel, keď si všimneme **súvis medzi generátorom a infinitezimálnou plavbou** - o maličké ϵ pozdĺž integrálnej krivky. Totiž $x(\epsilon), y(\epsilon)$ možno ako slušné analytické funkcie rozvíjať do Taylorovho radu, a pre malé ϵ je možné zanedbať všetky členy vyššie od lineárnych :

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) \approx \left(x(0) + \frac{dx}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \epsilon \ \ , \ \ y(0) + \frac{dy}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \epsilon \right) = (x + \epsilon V_x \ \ , \ \ y + \epsilon V_y)\bigg|_{\epsilon=0} \tag{3}$$

Pole "rýchlosti"(ak ϵ je interpretované ako čas), dané v každom bode dotyčnicovým vektorom k integrálnej krivke prechádzajúcej daným bodom, naozaj "generuje"vývoj pozdĺž nej: Keď je hodnota parametra/času nulová, sme v pôvodnom bode, a ako máličko (ϵ) neskôr sú súradnice dané ako počiatočné plus lineárny (v parametri ϵ) príspevok súvisiaci s našim vektorom.

Aby sme pole s komponentami (2) uchopili ako matematický objekt, ujasnime si, že identifikácia (2) dáva **súradnice vektorového poľa rýchlosti**, vyčíslené v štartovacom bode. Vzhľadom na akú "bázu"sú dané súradnice? **Čo sú vhodné "bázové vektorové polia"?** Súradnice vektora sú ovplyvnené voľbou súradníc (x,y) v rovine. Skúsme nejaké špeciálne prípady, zodpovedajúce "bázovým tokom":

Tok tečúci pozdĺž x-ovej osi jednotkovou rýchlosťou (efektívne ako parameter môžeme vziať $\epsilon = x$) by mal ako "prúdnice"priamky rovnobežné s x-ovou osou, s parametrickým vyjadrením $(x(x), y(x)) = (x, 0)$ Zároveň všade ako súradnice očakávame $(1, 0)$, čo sedí s $\left(\frac{dx}{dx}, \frac{d0}{dx}\right)$.

Tok tečúci pozdĺž y-ovej osi jednotkovou rýchlosťou (efektívne ako parameter môžeme vziať $\epsilon = y$) by mal ako "prúdnice"priamky rovnobežné s y-ovou osou, s parametrickým vyjadrením $(x(y), y(y)) = (0, y)$ Zároveň všade ako súradnice očakávame $(0, 1)$, čo sedí s $\left(\frac{d0}{dy}, \frac{dy}{dy}\right)$.

Teraz si to dajme dokopy s faktom, že veobecnejšie toky sú charakterizované krivkami, ktoré majú nenulové priemety na os x aj na os y, a môžu predstavovať tečenie nielen jednotkovou rýchlosťou. S týmto na mysli prepíšme (3) sugestívnejšie:

$$
\begin{aligned}
x(\epsilon) &= \left(1 + \epsilon \frac{dx}{d\epsilon}\frac{\partial}{\partial x}\right) x(\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} \\
y(\epsilon) &= \left(1 + \epsilon \frac{dy}{d\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}\right) y(\epsilon)\bigg|_{\epsilon=0}
\end{aligned}
$$

Na mieste bázových vektorov $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ z lineárnej algebry tu stoja operátory parciálnych derivácií podľa daných premenných. Naše vektorové pole teda bude mať vyjadrenie

$$
\begin{aligned}
\vec{V} &= V^x \frac{\partial}{\partial x} + V^y \frac{\partial}{\partial y} \qquad (4) \\
&= \frac{dx}{d\epsilon}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{d\epsilon}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \dot{x}\,\partial_x + \dot{y}\,\partial_y
\end{aligned}
$$

Totálnu deriváciu podľa parametra analogickéhu času budeme často označovať bodkou (tradícia už od Isaaca Newtona). Parciálne derivácie sa často skrátene označujú ∂_x, ∂_y.

Zhrnutie: Súvis toku a generujúceho poľa

Tok generujúceho poľa je súbor "prúdnic", parametrizovaných kriviek $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ ktorým hovoríme integrálne krivky. Generujúce pole je v každom mieste dotyčnicové k prúdniciam, jeho komponenty sú $(\dot{x}, \dot{y})$, kde bodka značí deriváciu podľa parametra ϵ.

Nájsť k danému toku (transformácii zadanej ako rodina parametrizovaných kriviek) príslušný generátor vyžaduje len deriváciu zložiek krivky a vyčíslenie v nule. (Poznáme $x(\epsilon), y(\epsilon)$, hľadáme

V^x, V^y)

$$V^x(x,y) = \frac{dx}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \qquad\qquad V^y(x,y) = \frac{dy}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$$

Opačná úloha, teda nájsť tok generovaný zadaným poľom (známe $V^x(x,y), V^y(x,y)$, hľadáme $x(\epsilon), y(\epsilon)$) vyžaduje integráciu zložiek vektorového poľa. Treba riešiť sústavu diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $x(\epsilon), y(\epsilon)$ (s danými počiatočnými podmienkami)

$$\frac{dx}{d\epsilon} = V^x(x,y) \qquad\qquad \frac{dy}{d\epsilon} = V^y(x,y)$$

$$x(0) = x \qquad\qquad y(0) = y$$

Ilustrujme si súvis medzi transformáciou, jej infinitezimálnou verziou a generujúcim tokom na príkladoch niekoľkých transformácií v rovine.

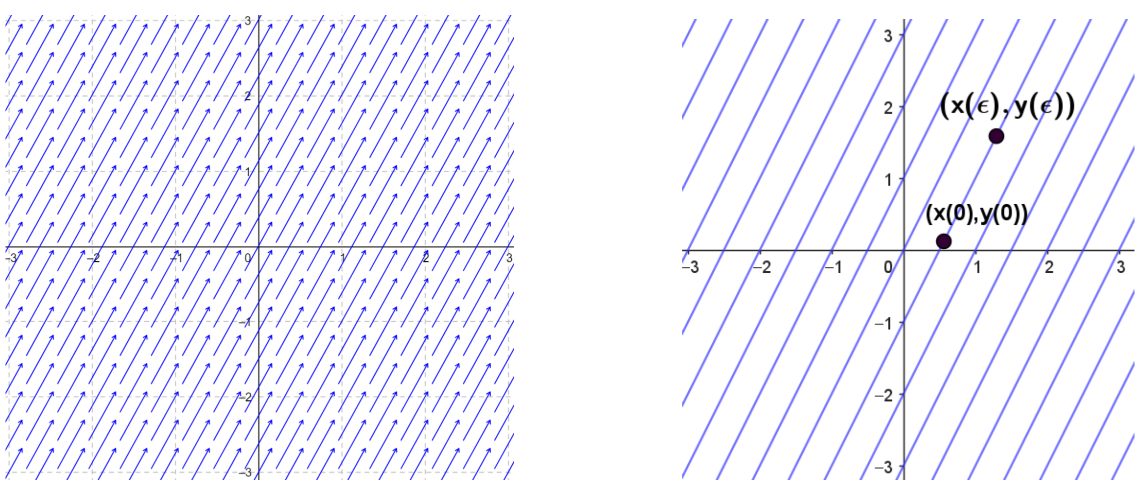
Posunutie v rovine

Ukážme pojmy transformácie, jej infinitezimálnej verzie a generujúceho toku na posunutiach v smere (a,b), kde a,b sú konštanty. Transformácia bodov roviny bude

$$(x,y) \longrightarrow (x+\epsilon a, y+\epsilon b)$$

Jej infinitezimálna verzia (rozvoj pre malé ϵ) vyzerá rovnako, takže koeficienty generujúceho poľa sú (a,b), to isté, čo dostaneme deriváciou $x(\epsilon), y(\epsilon)$ podľa ϵ (v tomto prípade vyčislenie v $\epsilon = 0$ je rovnaké ako všade inde.) Teda generátor posunutí v smere (a,b) je

$$\vec{V} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$



Obr. 3: Pole $a\partial_x + b\partial_y$ (pre $a = 1$, $b = 2$), jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich.

Rotácia v rovine

V tomto prípade tokom je otáčanie a úlohu parametra hrá uhol pootočenia ϵ. Z lineárnej algebry vieme, že pootočenie o uhol ϵ nám transformuje body nasledovne[2]:

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cos\epsilon + y \sin\epsilon, \;\; y \cos\epsilon - x \sin\epsilon)$$

Jedná sa o koncentrické kružnice vypĺňajúce rovinu (pre počiatočné (x, y) v rôznych vzdialenostiach od stredu máme rôzne kružnice).
Ako vyzerá infinitezimálna transformácia (prípad malého ϵ)? Vtedy máme

$$\cos\epsilon \approx 1, \quad \sin\epsilon \approx \epsilon,$$

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x + \epsilon y, \;\; y - \epsilon x)$$

Zložky generátora infinitezimálnej transformácie sú koeficienty pri parametri ϵ, teda $(y, -x)$. Môžeme k nim prísť aj (hoci sa jedná prakticky o tú istú vec) tak, že vezmeme našu integrálnu krivku/prúdnicu a nájdeme jej dotyčnicový vektor v počiatočnom bode, teda poderivujeme ju a potom vyčíslime v $\epsilon = 0$:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon}(x \cos\epsilon + y \sin\epsilon), \frac{d}{d\epsilon}(y \cos\epsilon - x \sin\epsilon) \right) \Bigg|_{\epsilon=0} = (y, -x)$$

Teda ak našou transformáciou je rotácia, prúdnicami sú koncentrické kružnice, a dotyčnicovým poľom (generátorom infinitezimálnych rotácií) je pole

$$\vec{V} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

.

Pre účely precvičenia pojmov a kontroly, vyriešme opačnú úlohu, teda predpokladajme, že poznáme pole a chceme mu nájsť integrálne krivky: Potrebujeme vyriešiť sústavu rovníc s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= y & \qquad \frac{dy}{d\epsilon} &= -x \\ x(0) &= x & \qquad y(0) &= y \end{aligned}$$

Táto nie je veľmi zložitá, je jasné že pôjde o kombináciu $\cos\epsilon$ a $\sin\epsilon$, s koeficientami danými počiatočnými podmienkami. Vidno však, ktoým smerom je výpočet zložitejší.

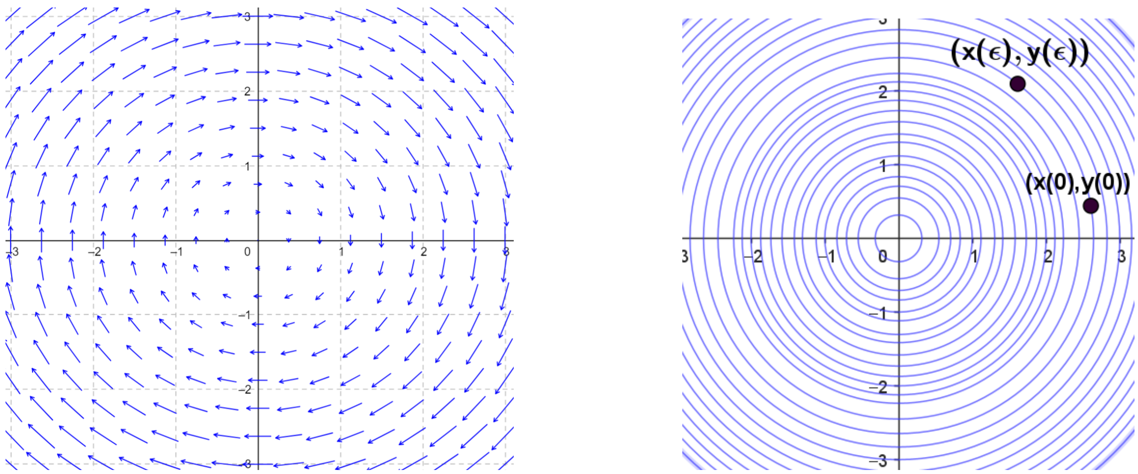
$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x \cos\epsilon + y \sin\epsilon, \;\; y \cos\epsilon - x \sin\epsilon)$$

. Ide o koncentrické kružnice

$$x^2(\epsilon) + y^2(\epsilon)) = x^2(0) + y^2(0)$$

Tu $x^2(0) + y^2(0)$ je kvadrát polomeru danej kružnice; $(x(0), y(0))$ predstavuje "štartovací bod"pre danú prúdnicu

[2]Poznámka k značeniu: Zavádzanie vlnovky sa tu môže zdať zbytočné, keďže "posunuté"body rozpoznávame podľa nenulového parametra uvedeného ako ich argument (napr. pôvodný, netransformovaný bod má x-ovú súradnicu $x(0) = x$, transformovaný $x(\epsilon) = \tilde{x}$). Neskôr sa však takáto indikácia transformácie môže zísť, osobitne keď zátvorka s argumentom bude veľmi zavadzať, takže zvyknime si na viacero značení už vopred.



Obr. 4: Pole $y\partial_x - x\partial_y$, jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich

Hyperbolická rotácia v rovine

Nájdime integrálne krivky pre vektorové pole

$$\vec{V} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

.
Toto sa od predchádzajúceho líši len znamienkom pri y-ovej zložke, ale ako uvidíme, integrálne krivky vyzerajú výrazne inak. Hľadáme funkcie $(x(\epsilon), y(\epsilon))$, pre ktoré platí

$$\frac{dx}{d\epsilon} = y \qquad\qquad \frac{dy}{d\epsilon} = x$$
$$x(0) = x \qquad\qquad y(0) = y$$

Vidno, že sa jedná o kombinácie hyperbolických funkcií $\cosh\epsilon$ a $\sinh\epsilon$, s koeficientami danými počiatočnými podmienkami, teda

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x\cosh\epsilon + y\sinh\epsilon,\ \ y\cosh\epsilon + x\sinh\epsilon)$$

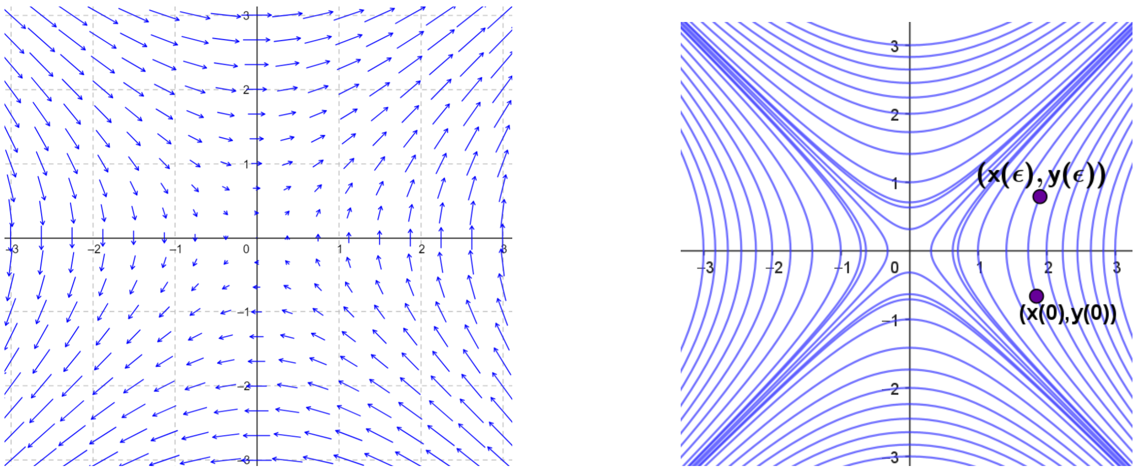
. Jedná sa o hyperboly

$$x^2(\epsilon) - y^2(\epsilon) = x^2(0) - y^2(0)$$

Tu $(x(0), y(0))$ predstavuje štartovací bod danej prúdnice.
Teraz je možné urobiť skúšku správnosti, teda derivovať naše nájdené integrálne krivky (prípadne rozvinúť $x(\epsilon), y(\epsilon)$ okolo hodnoty $\epsilon = 0$ po lineárny člen v $\epsilon = 0$) a prísť spätne ku generátoru (vektorovému poľu zo zadania). Takéto riešenie úloh z viacerých strán sa implicitne doporučuje, až pokým sa súvis medzi inegrálnou krivkou, transformáciou, jej infinitezimálnou verziou a generátorom nestane vecou rutiny.

Transformácia obrazcov

Uviedli sme si niekoľko príkladov na transformácie bodov v rovine. Ponúka sa otázka, **ako sa transformujú množiny bodov, teda nejaké geometrické obrazce** v rovine. Pri našich doterajších úvahách nemalo veľa zmyslu hovoriť o deformácii či nedeformácii obrazcov, veď bod ostal bodom, len posunutým pozdĺž prúdnice. Je to analogické situácii, keď do rieky hodíme list. Posunie sa, nezdeformuje. Čo ak by sme však do rieky hodili niekoľko listov - ako by sa menila ich



Obr. 5: Pole $y\partial_x + x\partial_y$, jeho prúdnice, čiže integrálne krivky, a bod odplavený pozdĺž jednej z nich

konštelácia? Alebo vezmime ešte spojitejší obrazec, trebárs stužku či povrázok, ktorý by mal pri prvom kontakte s hladinou nejaký zadaný tvar. Vo všeobecnosti sa povrázok pri plavbe nielen posunie, ale vplyvom rôzneho toku na rôznych častiach povrázka sa tento aj všelijako poskrúca.

Obr. 6: Transformácia spojitého útvaru pri plavbe

Čo sa stane so spojitou krivkou pri transformácii tokom nejakého vektorového poľa? Ostane v jednom kuse ako stužka, len zmenená tvarom? Ak uvažujeme hladké vektorové pole (jeho integrálne krivky sú hladké), potom vplyvom jeho toku sa pôvodne susedné body zobrazia do znova susedných, aj keď globálna konštelácia ("tvar") bude vo všeobecnosti iná. Veľkou výnimkou sú tu krivky dané prúdnicami samotného poľa, teda jeho integrálne krivky. Keďže pole tečie z definície pozdĺž nich, nijako nemení ich tvar.

Vo viacerých rozmeroch si môžeme predstaviť nielen transformácie na povrchu rieky, ale aj pod hladinou, teda efektívne trojrozmerný tok. Môžeme uvažovať o deformácii bodov, kriviek, plôch ponorených do toku. A tak ďalej - matematický formalizmus nám umožňuje ísť smelo aj tam, kde vizualizácie nemáme. Keďže však vizualizácia pomáha nabrať intuíciu, začnime najprv opäť s tokmi - transformáciami v rovine a uvažujme, ako sa deformujú krivky, keď ich necháme odplavovať pozdĺž inegrálnych kriviek nejakého poľa.

Tok, jeho prúdnice a ich generátor sme už matematicky namodelovali v predchádzajúcich odsekoch; teraz si ešte uvedomme, ako budeme modelovať množiny bodov, ktorých deformácie vplyvom toku budeme skúmať. Vezmime ako taký geometrický objekt nejakú krivku. Krivka v rovine sa dá implicitne zadať ako

$$F(x,y)=0$$

Napríklad: rovné čiary, kružnice a krivky zodpovedajúce grafom explicitných funkcií $y=f(x)$ majú implicitné vyjadrenia:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= ax+by+c=0 && \text{priamka} \\ F(x,y) &= (x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0 && \text{kružnica} \\ F(x,y) &= y-f(x)=0 && \text{graf funkcie } y=f(x) \end{aligned}$$

Poďme sa pozrieť čo sa stane "s povrázkom hodeným do rieky", resp. s krivkou danou grafom funkcie. Najprv pripomeňme, čo sa stane s bodmi, a potom vyjadrime zmenu funkčného predpisu tak, aby zodpovedal novému tvaru krivky.

$$(x,\,y)\longrightarrow(x(\epsilon),\,y(\epsilon))=(\tilde{x},\,\tilde{y})$$

$$F(x,y)=0\longrightarrow\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y})=F(x(\tilde{x},\tilde{y}),y(\tilde{x},\tilde{y}))=0$$

Pod hrozivo dlhým výrazom sa skrýva jednoduchá myšlienka: aby sme našli novú krivku, vezmeme predpis starej, staré premenné (x,y zodpovedajúce $\epsilon=0$) v nej však vyjadríme pomocou nových ($\tilde{x}$, $\tilde{y}$ zodpovedajúce $\epsilon\neq0$). Potrebujeme teda inverznú transformáciu

$$\tilde{x},\tilde{y}\longrightarrow x(\tilde{x},\,\tilde{y}),y(\tilde{x},\,\tilde{y})$$

V prípade, že namiesto implicitne zadaných kriviek potrebujeme transformovať grafy explicitne zadaných funkcií, je potrebné[3] ešte vyjadriť $\tilde{y}(\tilde{x})$.

Ujasnime si teraz veci na príkladoch.

Príklad transformácie obrazcov - rotácia priamky

Vezmime na začiatok veľmi jednoduchú krivku - priamku.
Je daná implicitne ako $F(x,y)=y-ax-b=0$ alebo explicitne ako graf funkcie $y=f(x)=ax+b$. Ako pole vezmime rotácie, teda pole $\vec{V}=y\partial_x-x\partial_y$, ktorého tok zodpovedá nám už známej transformácii

$$(x,y)\longrightarrow(\tilde{x},\tilde{y})=(x\cos\epsilon\,+\,y\sin\epsilon,\;\;y\cos\epsilon\,-\,x\sin\epsilon)$$

Teraz budeme potrebovať inverznú transformáciu, ktorá sa nájde veľmi jednoduchou úvahou (otočením rotačnej matice): Ak $\tilde{x},\tilde{y}$ sme dostali z x,y otočením o uhol ϵ, potom x,y dostaneme späť otočením $\tilde{x},\tilde{y}$ o uhol $-\epsilon$:

$$(\tilde{x},\tilde{y})\longrightarrow(x,y)=(\tilde{x}\cos\epsilon\,-\,\tilde{y}\sin\epsilon,\;\;\tilde{y}\cos\epsilon\,+\,\tilde{x}\sin\epsilon)$$

Nájdime transformáciu implicitne zadanej krivky $F(x,y)=y-ax-b=0$, resp. transformáciu grafu funkcie $y=f(x)=ax+b$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) &= F(x(\tilde{x},\tilde{y}),y(\tilde{x},\tilde{y})) && =0 \\ &= y(\tilde{x},\tilde{y})-a\,x(\tilde{x},\tilde{y})\,-\,b && =0 \\ &= \tilde{y}\cos\epsilon\,+\,\tilde{x}\sin\epsilon-a(\tilde{x}\cos\epsilon\,-\,\tilde{y}\sin\epsilon)\,-\,b && =0 \\ &= \tilde{y}(\cos\epsilon\,+\,a\sin\epsilon)\,-\,\tilde{x}(a\cos\epsilon\,-\,\sin\epsilon)\,-b && =0 \end{aligned}$$

[3] Teraz je azda čas oceniť vlnovku namiesto zátvorky s argumentom ϵ. Stačí pokus prepísať výraz vyššie pomocou $x(\epsilon),y(\epsilon),x(0),y(0)$ a naznačiť v ňom korektne čo sa vyjadruje pomocou čoho - a je jasnejšie, načo sú dobré viaceré typy značenia.

Explicitný tvar získame jednoduchým vyjadrením $\tilde{y}$ z implicitnej rovnice, čo v tomto prípade ide jednoznačne pre uhly ktoré spĺňajú $(\cos\epsilon + a\sin\epsilon) \neq 0$. (To by zodpovedalo zvislým krivkám ktoré nepredstavujú graf funkcie $y(x)$.)

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) = \frac{a\cos\epsilon - \sin\epsilon}{\cos\epsilon + a\sin\epsilon}\,\tilde{x} + \frac{b}{\cos\epsilon + a\sin\epsilon}$$

$$= \tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}$$

Ako sa dalo čakať, zrotovaná priamka je znova priamka. Ale pozor, "priamosť"síce ostala invariantom (nezmenenou vecou), ale dostali sme inú funkciu (a ako jej graf inú priamku) ako predtým -parametre sú príslušne pozmenené

Príklad transformácie obrazcov - rotácia kružnice

Skúsme ešte pretransformovať rotáciou, konkrétne takou ktorá zodpovedá toku poľa $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$ (teda tok z predošlého príkladu), krivku danú kružnicou s polomerom 1 centrovanou v strede $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tilde{x},\tilde{y}) &= F(x(\tilde{x},\tilde{y}), y(\tilde{x},\tilde{y})) && = 0 \\
&= x^2(\tilde{x},\tilde{y}) + y^2(\tilde{x},\tilde{y}) - 1 && = 0 \\
&= (\tilde{x}\cos\epsilon - \tilde{y}\sin\epsilon)^2 + (\tilde{y}\cos\epsilon + \tilde{x}\sin\epsilon)^2 - 1 && = 0 \\
&= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1 && = 0
\end{aligned}$$

Tu na rozdiel od rotovania priamok vidíme, že nielenže tok nášho poľa prevedie kružnicu na kružnicu (teda že "kruhovosť"je invariantom tejto transformácie), ale že sa nezmenili ani len parametre kružnice - samotná implicitná funkcia a jej graf sú invariantmi! Dôvodom je, že koncentrické kružnice centrované v strede súradnej sústavy sú práve integrálnymi krivkami nášho poľa, ktoré generuje rotácie okolo počiatku. **Pole z definície zachováva svoje integrálne krivky, svoj vlastný tok.**

Rotácie a translácie v euklidovskej rovine majú svoju význačnú črtu - zachovanie tvaru objektov ako ho chápeme v euklidovskom zmysle - pretože zachovávajú vzájomné vzdialenosti bodov v rovine. Čitateľ si môže explicitne vyskúšať, že vzdialenosť dvoch bodov sa nezmení, keď ju vyčíslime pred transformáciou ($\epsilon = 0$) a po ich odplavení o ten istý nenulový ϵ.

Príklad transformácie obrazcov - neizotropné škálovanie a jeho vplyv na kružnicu

Pozrime sa, čo robí škálovacia transformácia s kružnicou centrovanou v strede s polomerom 1.(Pre všeobecnejšie kružnice je akurát trochu dlhší výpočet, ale pre čitateľa by nemal byť principiálny problém spočítať transformáciu aj pre také prípady v rámci cvičenia.) Neizotropné škálovanie je generované poľom $\vec{V} = \alpha x\partial_x + \beta y\partial_y$, pričom α, β sú konštanty. Zodpovedajúcu transformáciu (parametrické vyjadrenie integrálnych kriviek, po ktorých nám ödtekajú body") získame integrovaním komponent ako obvykle:

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \alpha x \qquad\qquad \frac{dy}{d\epsilon} = \beta y$$

$$x(0) = x \qquad\qquad y(0) = y$$

Máme teda

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\mathrm{e}^{\alpha\epsilon} x, \mathrm{e}^{\beta\epsilon} y)$$

Pozrime čo takýto tok urobí s krivkou $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Potrebná inverzná transformácia je tu veľmi jednoduchá

$$(x, y) = (\mathrm{e}^{-\alpha\epsilon} \tilde{x}, \mathrm{e}^{-\beta\epsilon} \tilde{y})$$

a môžeme dosádzať do rovnice pre kružnicu:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= F(x(\tilde{x}, \tilde{y}), y(\tilde{x}, \tilde{y})) && = 0 \\ &= x^2(\tilde{x}, \tilde{y}) + y^2(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1 && = 0 \\ &= \frac{\tilde{x}^2}{\mathrm{e}^{2\alpha\epsilon}} + \frac{\tilde{y}^2}{\mathrm{e}^{2\beta\epsilon}} - 1 && = 0 \end{aligned}$$

Kružnica sa tokom neizotropne škálovacieho poľa deformovala na elipsu.

Invarianty transformácie, podmienka invariantnosti

Spomeňme si na krivky, ktoré sú poľom zachovávané priam z definície - integrálne krivky tohto poľa. Príkladom boli kružnice so stredom v počiatku $F(x, y) = x^2 + y^2 - c = 0$ a dotyčnicové pole, ktoré ich nemenilo $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$. Ako sformulovať matematicky túto zásadu (**pole nedeformuje svoje vlastné prúdnice**) a ako do nej zakomponovať, čo pole robí s inými krivkami, bez podrobného rozpisovania parametrizovaného toku?
Najprv pozrime ako sa vo všeobecnosti funkcia dvoch premenných $f(x, y)$ mení pozdĺž toku poľa $\vec{V} = V^x(x, y)\partial_x + V^y(x, y)\partial_y$. Skúmajme infinitezimálne zmeny. Myšlienka je jednoduchá - porovnať hodnoty funkcie v počiatočnom bode (x, y) a v bode $(x(\epsilon), y(\epsilon))$, infinitezimálne odplavenom pozdĺž prúdnice. Pre takéto blízke body však možno použiť Taylorov rozvoj, podľa ktorého, spolu s našou definíciou zložiek poľa V^x, V^y, platí

$$\begin{aligned} x(\epsilon) &\approx x(0) + \left.\frac{dx}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \epsilon = && x + \epsilon V^x \\ y(\epsilon)) &\approx y(0) + \left.\frac{dy}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \epsilon = && y + \epsilon V^y \end{aligned}$$

Hodnoty našej funkcie $f(x, y)$ sa na dvoch miestach o ϵ vzdialených pozdĺž integrálnej krivky poľa $\vec{V}$ líšia nasledovne:

$$\begin{aligned} f(x(\epsilon), y(\epsilon)) - f(x, y) &\approx f(x + \epsilon V^x,\ y + \epsilon V^y) - f(x,\ y) \\ &\approx f(x, y) + \epsilon V^x \partial_x f + \epsilon V^y \partial_y f - f(x, y) \\ &\approx \epsilon \left(V^x \partial_x + V^y \partial_y\right) f \\ &\approx \vec{V}.\vec{\nabla} f \end{aligned}$$

Skalárny súčin medzi komponentami poľa a gradientom funcie má názorný význam: Funkcia (jej hodnoty) sa najviac mení v smere svojho gradientu (z definície). Miera zmeny funkcie pozdĺž toku poľa je daná tým, do akej miery leží jej gradient v smere tohto toku, čo meria práve uvedený skalárny súčin. Ak je nulový, pole tečie pozdĺž "vrstevníc"našej funkcie, teda jeho integrálne krivky sú zaroveň krivkami konštantného f. Súčin $\vec{v}.\vec{\nabla} f$ sa v literatúre často skrátene označuje ako $\vec{V} f$ alebo $\vec{V}(f)$ a myslí sa tým "pole pôsobiace na funkciu".

Kritérium infinitezimálnej invariantnosti

Invariantnosť funkcie $f(x, y)$ voči toku poľa $\vec{V}$ vyžaduje, aby prúdnice poľa tiekli pozdĺž vrstevníc funkcie, teda aby gradient funkcie bol kolmý na pole.

$$\vec{V}.\vec{\nabla} f \ = \ \vec{V}(f) = 0 \tag{5}$$

Ak toto platí pre všetky (x, y) z definičného oboru funkcie f, potom pole zachováva všetky vrstevnice tejto funkcie, teda všetky krivky dané predpisom $f(x, y) = c$.

Podmienka zachovať každú vrstevnicu je silnejšia ako požiadavka zachovať len niektorú. Často sa stretáme s požiadavkou trebárs zachovať nejakú množinu bodov danú predpisom $F = 0$, čo predstavuje zachovanie jednej konkrétnej ("nulovej") vrstevnice funkcie F. Ak nájdeme pole, ktoré spĺňa $\vec(V) F = 0$ len na množine bodov spĺňajúcich $F = 0$, potom ešte treba skontrolovať, či na tejto množine platí, že $vecnabla F \neq 0$. Ak hej, našli sme pole zachovávajúce nulovú vrstevnicu funkcie F; ak je však na tejto vrstevnici gradient nulový, hocijaké pole bude spĺňať $\vec{v} F = 0$, nielen tie, ktoré túto vsrtevnicu zachovávajú. Ako však bolo uvedené vyššie, ak pole spĺňa silnejšiu podmienku $\vec{V}(F) = 0$ všade, netreba gradient kontrolovať.

Rotácie v rovine okolo počiatku a ich inetgrálne krivky

Ešte raz, dopodrobna kritérium invariantnosti preskúmajme na príklade poľa $\vec{V} = y\partial_x - x\partial_y$ a kružníc centrovaných v počiatku. $F(x, y) = x^2 + y^2 - C = 0$ (tu x, y berieme ako premenné, C je pre danú kružnicu konštanta). Každá z týchto kružníc sa dá zapísať parametricky ako

$$(\, x(\epsilon),\, y(\epsilon)\,) = (\ (x\cos\epsilon \,+\, y\sin\epsilon),\ \ (y\cos\epsilon \,-\, x\sin\epsilon)\ )$$

kde x, y sú pre danú kružnicu "štartovacími bodmi". Pre malé ϵ môžeme písať $\cos\epsilon \approx 1$ a $\cos\epsilon \approx \epsilon$, teda

$$(\, x(\epsilon),\, y(\epsilon)\,) = (\ x + y\epsilon,\ \ y - x\epsilon\ )$$

Funkcie sa pozdĺž toku takéhoto poľa menia nasledovne:

$$\begin{aligned} f(x(\epsilon), y(\epsilon)) - f(x, y) &\approx f(x + y\epsilon\ y - x\epsilon \\ &\approx f(x, y) \,+\, \epsilon y\partial_x f \,-\, \epsilon x\partial_y f \,-\, f(x, y) \\ &\approx \epsilon\,(y\partial_x f \,-\, x\partial_y f) \end{aligned}$$

Teda funkcia spĺňajúca $(y\partial_x f - x\partial_y f)$ je invariantná voči toku nášho poľa. Príkladom takejto funkcie je napríklad $f(x, y) = x^2 + y^2$. Naozaj,

$$\vec{V} f = \vec{V}(x^2 + y^2) = (y\partial_x - x\partial_y)(x^2 + y^2) = 2yx - 2xy = 0$$

Túto konkrétnu funkciu si všimnime podrobnejšie - jej "vrstevnice", teda krivky na ktorých je konštantná, $f(x,y)=x^2+y^2=c$, sú práve integrálne krivky nášho poľa, dané v neparametrickej forme ako $F(x,y)=x^2+y^2-c=0$.

Invariantná funkcia vs invariantná niektorá jej vrstevnica

Keď hľadáme transformácie, treba mať ujasnené, čoho transformácie vlastne hľadáme, čo má ostať ako celok nezmenené a čo sa môže meniť. To samozrejme závisí od toho, čo naše premenné a výrazy z nich poskladané predstavujú.

Môžeme hľadať transformácie v rovine x,y, ktoré zachovávajú hodnoty funkcie
$z=f(x,y)=x^2+y^2$. V takom prípade samozrejme generátor transformácie navrhneme v tvare $V^x(x,y)\partial_x+V^y(x,y)\partial_y$ a hľadáme funcie V^x,V^y premenných x,y tak, aby platilo
$(V^x\partial_x+V^y\partial_y)f=0$.
Ak ich triviálne rozšírime do 3D ako $V^x(x,y)\partial_x+V^y(x,y)\partial_y+0\partial_z$, môžeme povedať, že zachovávajú celý graf funkcie dvoch premenných $z=f(x,y)=x^2+y^2$ alebo prinajmenšom nulovú vrstevnicu funkcie troch premenných $F(x,y,z)$, teda plochu $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$.

Alebo nás možno zaujímajú transformácie v priestore x,y,z, voči ktorým je funkcia troch premenných $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$ invariantná (teda by zachovávali jej graf v 4D, aj keď tam už ťažko vizualizovať), v takom prípade navrhneme generátor transformácie v tvare
$V^x(x,y,z)\partial_x+V^y(x,y,z)\partial_y,+V^z(x,y,z)\partial_z$ a hľadáme funkcie V^x,V^y,V^z premenných x,y,z, tak, aby platilo $(V^x\partial_x+V^y\partial_y+V^z\partial_z)F=0$. Príslušná transformácia bude mať integrálne krivky (v 3D priestore) pozdĺž "vrstevníc"funkcie $F(x,y,z)$, teda na nich bude mať F konštantnú hodnotu.

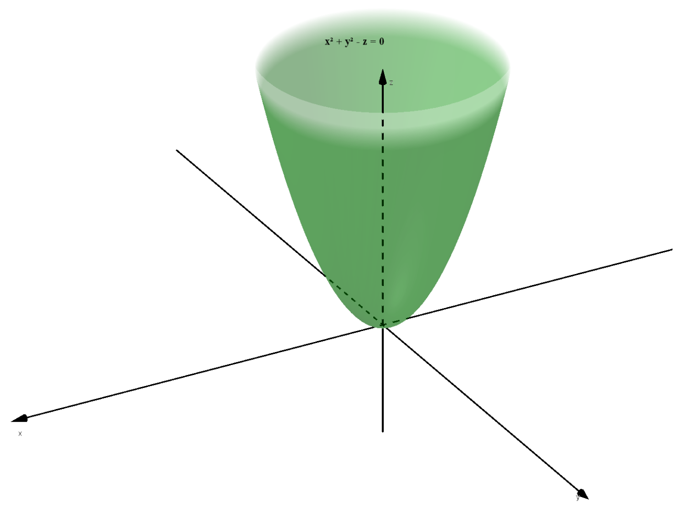
Ak nám stačí nájsť transformácie v priestore x,y,z, ktoré zachovávajú jednu konkrétnu vrstevnicu funkcie F, napríklad $F=0$ (túto vrstevnicu si vieme vizualizovať, ale nezabúdajme, že nepredstavuje hodnoty funkcie F, ale len body z jej definičného oboru, na ktorých má F nulovú hodnotu.), dostávame vo všeobecnosti širšiu triedu možností ako keď požadujeme zachovanie všetkých vrsteníc funkcie F. V takom to prípade (ak použijeme vo výpočte podmienku $F=0$), treba ešte skontrolovať, či na množine bodov, kde platí, je splnené $\vec{\nabla}F\neq 0$. Ak je gradient nulový, potom "kritérium invariantnosti"$(V^x\partial_x+V^y\partial_y+V^z\partial_z)F\Big|_{F=0}=0$ spĺňajú všetky vektorové polia, nielen generátory symetrií, a teda toto kritérium nie je použiteľné.

Transformácie v 3D a symetrie algebraických rovníc

V 3D priestore je transformácií samozrejme viac ako v 2D a dajú sa uvažovať bohatšie štruktúry, o ktorých v 2D nemohla byť reč. Parametrizované krivky/ prúdnice majú tri zložky a ich generátory samozrejme tiež. Poďme si ukázať na jednoduchom príklade, ako možno využiť naše infinitezimálne kritérium invariantnosti. Majme množinu bodov v trojrozmernom priestore viazanú požiadavkou

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \tag{6}$$

Z algebraického hľadiska ide v (6) o rovnicu pre tri premenné, z geometrického o dvojrozmernú plochu v trojrozmernom priestore. Ak nájdeme vektorové polia, ktoré tečú "pozdĺž"plochy (6), z algebraického hľadiska získame generátory transformácií, ktoré nám z jedného riešenia urobia (vo všeobecnosti) iné. Pod "riešením"tu možno rozumieť viac vecí. Jednak body, ktorých súradnice spĺňajú podmienku (6). Ale trebárs aj krivky, ktoré ležia v ploche danej podmienkou (6). Druhá varianta je osobitne vhodná ako príprava na neskorší podnik, totiž hľadanie riešení diferenciálnych rovníc (riešením takých býva vo všeobecnosti funkcia (teda z geometrického hľadiska napríklad krivka), nie len číslo).
Nájdime polia, ktoré tečú pozdĺž povrchu daného rovnicou (6). Získame tým generátory transformácií, ktoré zachovávajú plochu ako takú, aj keď body v rámci nej môžu "presúvať". (Ak už



Obr. 7: graf funkcie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, alebo súbor bodov,na ktorých je funkcia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ nulová

máme generátor, jeho integráciou môžeme získať príslušný tok/transformáciu.) Vo všeobecnosti pole v 3D má tvar

$$\vec{V} = V^x(x, y, z)\partial_x + V^y(x, y, z)\partial_y + V^z(x, y, z)\partial_z$$

Hľadáme jeho komponenty V^x, V^y, V^z ktoré vo všeobecnosti môžu závisieť od všetkých dostupných premenných x, y, z. Podľa infinitezimálneho kritéria invariantnosti máme požiadavky

$$0 = \vec{V}.\vec{\nabla}F\Big|_{F=0} \tag{7}$$

$$0 \neq \vec{\nabla}F\Big|_{F=0}$$

Platí $\vec{\nabla}F = (2x, 2y, -1)$, teda gradient funkcie F nie je nulový nikde, ani na jej nulovej vrstevnici. Teda na to, aby pole $\vec{V}$ bolo symetriou plochy (6), stačí aby jeho komponenty V^x, V^y, V^z (vo všeobecnosti funkcie x, y, z) spĺňali

$$(V^x\partial_x + V^y\partial_y + V^z\partial_z)(x^2 + y^2 - z)\Big|_{F=0} = (2x\,V^x + 2y\,V^y\partial_y - V^z)\Big|_{x^2+y^2-z=0} = 0$$

Takýchto polí je viac.

Jednou z možností je $V^x = y, V^y = -x, V^z = 0$, teda naše staré známe pole generujúce rotácie v okolo osi z, $y\partial_x - x\partial_y$. Tok tohto poľa (transformáciu ním generovanú) sme už videli veľakrát, teraz akurát pribudla úpremenná z, ktorú si pole nevšíma a nemení.

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos\epsilon\, + y\sin\epsilon\\ \tilde{y} &= y\cos\epsilon\, - x\sin\epsilon\\ \tilde{z} &= z\end{aligned}$$

Inverzná transformácia (ktorú potrebujeme pri transformovaní kriviek) je

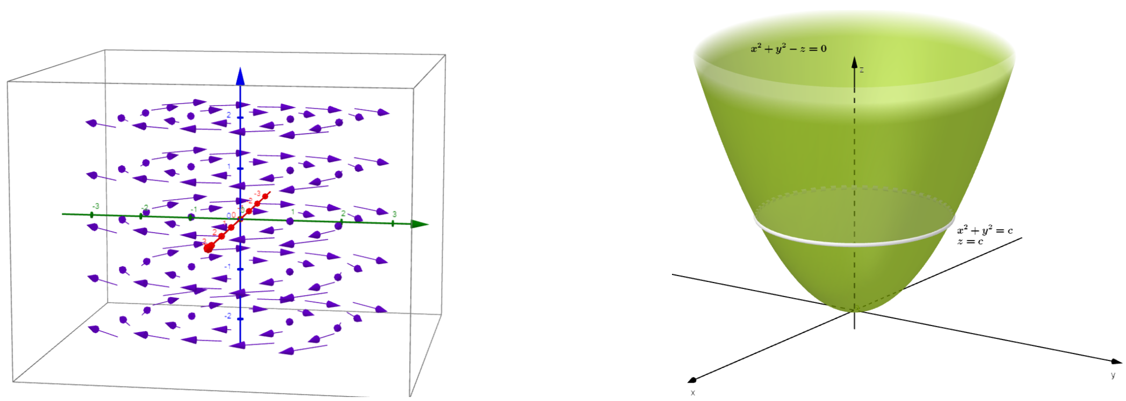
$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\epsilon\; - \;\tilde{y}\sin\epsilon \\ y &= \tilde{y}\cos\epsilon\; + \;\tilde{x}\sin\epsilon \\ z &= \tilde{z} \end{aligned}$$

Nie je ťažké sa presvedčiť, že toto pole nám z riešení vytvára riešenia v zmysle, že ak bod (x, y, z) patrí do plochy (6) (teda spĺňa rovnicu ktorou je daná), potom aj $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ do nej patrí.

Skúsme teraz transformáciu "rovnobežky"na paraboloide, teda krivky

$$x^2 + y^2 = c,\; z = c$$

ktorá patrí do našej plochy (všetky body v nej spĺňajú príslušnú rovnicu). Toto je práve prípad, keď naše pole z tejto krivky nevyrobí nič nové, keďže je to práve jeho integrálna krivka ktorú necháva invariantnú.



Obr. 8: Voči toku generovanému tokom poľa $y\partial_x - x\partial_y + 0\partial_z$ sú krivky $x^2 + y^2 = c,\; z = c$ invariantné

Avšak aj "poludník"na paraboide, napr. krivka daná ako

$$x = 0, \qquad z = y^2$$

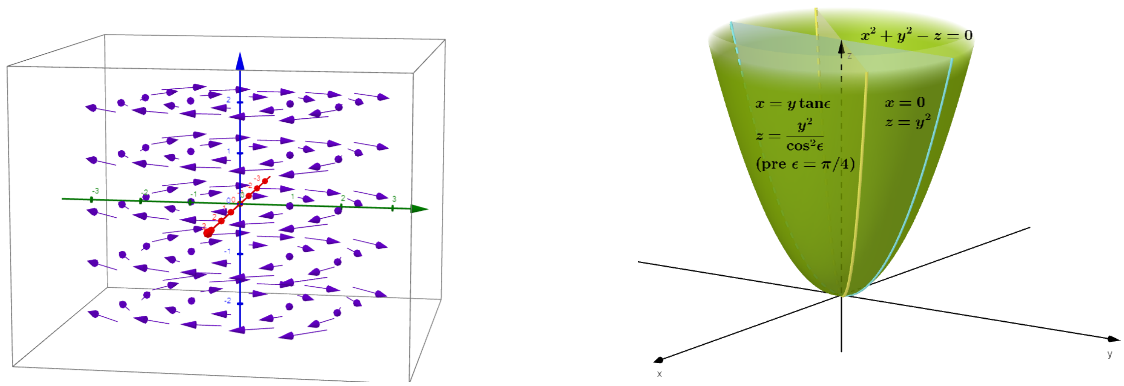
leží v ploche (6). Pozrime sa ako sa pretransformuje táto, a či pretransformovaná krivka ostane v ploche (6) tiež. Novú krivku dostaneme ako obvykle: Vezmeme predpis starej, teda $x = 0,\; z = y^2$, a za premenné dosadíme ich vlnovkové vyjadrenia z inverznej transformácie. Nová krivka bude mať vyjadrenie

$$\tilde{x} = \tilde{y}\tan(\epsilon) \qquad \tilde{z} = \frac{\tilde{y}^2}{\cos^2\epsilon}$$

Spĺňajú jej body predpis $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = 0$? Hej, pretože na krivke platí

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = (\tilde{y}\tan\epsilon)^2 + \tilde{y}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{\cos^2\epsilon} = 0$$

Samozrejme tu vyberáme veľmi názorné krivky aj polia, ale treba si uvedomiť, že takýto model nachádzania nových riešení pomocou známych by mal fungovať aj vo viacerých rozmeroch (pre funkcie viac premenných), kde metóda "pozriem a vidím"nefunguje, a takýto algoritmický postup (nájdi pole ktoré rešpektuje zadanú podmienku, nechaj jeho tokom odtiecť nejaké jednoduché



Obr. 9: Transformácia krivky $z = y^2,\ x = 0$ tokom poľa $y\partial_x - x\partial_y + 0\partial_z$.

riešenie, pozri sa či nedostávaš nejaké nové) sa môže veľmi zísť. Nehovoriac o situácii s diferenciálnymi rovnicami.

Vyskúšajme ešte aspoň jedno vektorové pole zachovávajúce tvar (6), teda spĺňajúce (7). Napríklad pole $0\partial_x + \partial_y + 2y\partial_z$ patrí do takej kategórie. Nájdime jeho integrálne krivky a pozrime sa, čo robí trebárs s koncentrickými kružnicami po obvode paraboloidu, s ktorými rotácie okolo osi z nerobili nič badateľné (prísne vzaté presúvali ich body, ale v rámci tej istej krivky). Hľadáme funkcie $x(\epsilon), y(\epsilon), z(\epsilon)$, pre ktoré platí

$$\frac{dx}{d\epsilon} = 0 \qquad \frac{dy}{d\epsilon} = 1 \qquad \frac{dz}{d\epsilon} = 2y$$

$$x(0) = x \qquad y(0) = y \qquad z(0) = z$$

Riešením sú integrálne krivky

$$\tilde{x} = x(\epsilon) = x \qquad \tilde{y} = y(\epsilon) = y + \epsilon \qquad \tilde{z} = z(\epsilon) = z + 2y\epsilon + \epsilon^2$$

Pozrime sa, čo robí takýto tok s "rovnobežkami", teda krivkami $x^2 + y^2 = c,\ z = c$,kde c je konštanta pre danú krivku. Ako obvykle, potrebujeme v zadaní krivky, ktorek´j transformáciu skúmame, vyjadriť staré premenné x, y, z pomocou nových $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Preto je potrebná inverzná transformácia, teda

$$x = \tilde{x} \qquad y = \tilde{y} - \epsilon \qquad z = \tilde{z} - 2\tilde{y}\epsilon + \epsilon^2$$

Krivka daná rovnicami

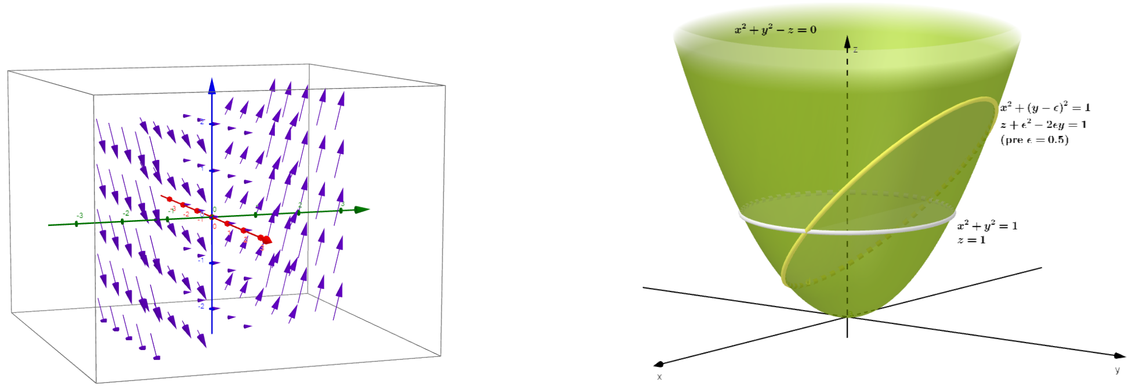
$$x^2 + y^2 = c \qquad z = c$$

sa transformuje, odplaví na tvar

$$\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \epsilon)^2 = c \qquad \tilde{z} - 2\tilde{y}\epsilon + \epsilon^2 = c$$

Nie je ťažké overiť, že body takejto krivky spĺňajú rovnicu $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z} = 0$, teda že patria do paraboloidu.

Dá sa nájsť ešte množstvo vecí ktoré si čitateľ môže na tomto príklade vyskúšať. Napríklad pohľadať ďalšie symetrie, ich generátory a toky, vyskúšať transformáciu ďalších kriviek na našom paraboloide atď.



Obr. 10: Transformácia krivky $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ tokom poľa $0\partial_x + \partial_y + 2y\partial_z$.

Transformácie v jetovom prietore

Doteraz sme si ilustrovali symetrie objektov popísaných algebraickými rovnicami, a ukázali sme si, ako sa pomocou symetrických transformácií (tých, ktoré daný objekt nechajú ako celok nezmenený, aj keď azda premiešajú jeho body) dajú z riešení rovnice nájsť ďalšie riešenia. Keďže sme používali najmä príklady, kde sa jednalo o jednoduché algebraické rovnice a malý počet rozmerov, *sila metódy bola ilustrovaná tam, kde ju vyriešenie úlohy až tak nepotrebovalo.* Z didaktického hľadiska je však azda lepšie zoznámiť sa s novou metódou tam, kde jej s predstavenie môžu doprevádzať staré známe pojmy a predstavy. V tomto duchu budeme ešte chvíľu pokračovať - aby v čase, keď sa dostaneme k trochu abstraktnejším problémom, už bolo aj ovládanie symetrických generátorov, ich tokov a vplyvu na rozličné objekty vecou rutiny.

Transformácia bodov vs transformácia grafu funkcie

Už sme sa zaoberali **transformáciou bodov** roviny a tým **indukovanou transformáciou kriviek** ležiacich v tejto rovine. Tieto krivky často mohli zodpovedať **grafom funkcií**[4]. Onedlho sa budeme zaoberať otázkou, aká transformácia sa **indukuje na deriváciách týchto funkcií**. Rozšírenie transformácií na derivácie funkcií nám pomáha **rozšíriť geometrické metódy z algebraických rovníc aj na diferenciálne**. Aby sme to mohli urobiť hladkým nadviazaním na algebraickú časť, zhrňme si ešte raz základy z transformácií funkcií indukovaných transformáciami na priestore závislej a nezávislej premennej.

Spomeňme si, ako postupujeme, ak máme **zadanú transformáciu bodov v rovine**

$$(x,\, y) \longrightarrow (x(\epsilon),\, y(\epsilon)) = (\tilde{x},\, \tilde{y}) \tag{8}$$

a chceme nájsť **generátor tejto transformácie**. Najprv si ujasníme, kde pôsobí: na premenných x, y. Teda čakáme niečo v tvare [5]

$$\vec{V} = \xi(x,y)\partial_x \,+\, \phi(x,y)\partial_y \tag{9}$$

[4] Nie každá krivka je grafom explicitnej funkcie, ale môžeme mať implicitné zadanie, alebo natočiť osi tak, aby daná časť krivky mohla zodpovedať grafu jednoznačnej funkcie.

[5] Zriekli sme sa tu označenia komponent ako V^x, V^y. To síce malo veľkú výhodu v tom, že jasne naznačovalo, o ktorú komponentu sa jedná, ale s ohľadom na to, čo bude časom nasledovať (derivovanie podľa viacerých premenných s ďalšími indexmi…) je hádam ospravedlniteľná snaha zbaviť sa aspoň tých indexov, pri ktorých sa to dá urobiť takto lacno

Jeho komponenty ξ, ϕ môžu vo všeobecnosti závisieť od všetkých dostupných premenných (x, y) a získame ich deriváciou zložiek krivky $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ podľa parametra a vyčíslení v $\epsilon = 0$:

$$(\xi,\, \phi) = \left(\frac{dx(\epsilon)}{d\epsilon}, \frac{dy(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} \tag{10}$$

Spomeňme si ešte ako postupujeme, ak máme **zadanú transformáciu funkcie**

$$(x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) \tag{11}$$

a chceme nájsť **generátor tejto transformácie**. Vieme **spätne zrekonštruovať generátor transformácie bodov na priestore nezávislej a závislej premennej, ktorá urobila uvedenú premenu grafu funkcie** (11)? Stále sa jedná o transformáciu premenných x, y, teda čakáme niečo v tvare $\vec{V} = \xi(x,y)\partial_x + \phi(x,y)\partial_y$, kde komponenty ξ, ϕ získame deriváciou zložiek krivky $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ podľa parametra a vyčíslení v $\epsilon = 0$.

Teraz však y na transformovanom grafe funkcie (z ktorého ideme získať informácie o komponentách generátora) nie je nezávislá premenná! Teda očakávame, že komponenta ϕ bude vyjadrená cez kombináciu komponenty ξ a miery toho, ako závislá premenná y súvisí s nezávislou x. Nezabudnime teda, čo tu vyžaduje úplná derivácia podľa ϵ, totiž že $\tilde{y}$ závisí od ϵ jednak "priamo"(túto závislosť budeme v ďalšom skrátene označovať Q) a jednak cez $\tilde{x}$ (deriváciu y podľa x budeme označovať skrátene y_x)[6]. Potom y-ová zložka hľadaného vektorového poľa, teda úplná derivácia závislej premennej podľa parametra transformácie, vyčíslená v jeho nulovej hodnote $\epsilon = 0$, bude

$$\phi = \left(\frac{dy}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{dx}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = Q + y_x \xi$$

S týmto ujasnením, generátor transformácie (11) má komponenty

$$(\, \xi,\ \phi \,) = \left(\frac{dx(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{dy(\epsilon)}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = (\, \xi,\ Q + y_x \xi \,) \tag{12}$$

Upozornime tu ešte na veličinu, ktorú sme skrátene nazvali Q a ktorá bude hrať veľkú rolu aj v ďalšom

$$Q(x, y) = \left(\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = \phi(x, y) - y_x \xi(x, y) \tag{13}$$

Budeme ju volať **charakteristikou poľa** $\vec{V}$. Kóduje priame pôsobenie poľa na zložky zodpovedajúce závislým premenným (tu: priama transformácia y tokom poľa, teda odplavenie o ϵ). Pole s nulovou charakteristikou netečie v smere závislých premenných (tu y), teda nepôsobí na ne explicitne. Samozrejme to neznamená, že grafy funkcií nijako nezdeformuje, keďže aj závislé premenné závisia od transformácie cez svoje argumenty.

Diferenciálne rovnice - geometrický pohľad

Geometrický pohľad sa dá uplatniť aj pri diferenciálnych rovniciach, ktoré sa dajú predstaviť ako (nad)plochy v priestore nezávislých premenných, závislých premenných, a derivácií závislých premenných. Rozmer zodpovedajúci "deriváciám závislých premenných"je trochu menej zažitý, ale zas taký veľký skok v abstrakcii to nie je. Takýto priestor

[6] Aby sme potom nehľadali vlnovky kde ich už netreba, nezabudnime, že (popri tom, že sú to len označenia tam, kde potrebujeme rozlíšiť veci pred a po transformácii) pre $\epsilon \to 0$ máme $\tilde{x} \to x$, $\tilde{y} \to y$.

rozšírený o položky zodpovedajúce všetkým potrebným deriváciám podľa všetkých relevantných nezávislých premenných, až po najvyšší relevantný n-tý rád budeme volať **n-tý jetový priestor** a označovať $J^{(n)}$. Matematici k nemu majú veľa čo povedať korektnejšie ako je uvedené tu. Pôvodný priestor závislých a nezávislých premenných sa dá chápať ako nultý jetový priestor $J^{(0)}$, keďže najvyššia derivácia je tu nultá. Platí prirodzene

$$J^{(n)} \supset J^{(n-1)} \supset ... \supset J^{(0)}$$

V prípade obyčajnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, kde x je nezávislá premenná, y je funkcia a y_x jej derivácia, máme touto rovnicou zadanú plochu v trojrozmernom priestore s osami x, y, y_x. Je to zároveň jediný typ rovnice, kde máme k dispozícii plnú vizualizáciu. Totiž už obyčajná diferenciálna rovnica druhého rádu v spomenutých premenných bude vyžadovať štvorrozmerný priestor s osami x, y, y_x, y_{xx}. Parciálne diferenciálne rovnice sú na tom čo sa počtu rozmerov týka ešte zložitejšie. To nás však nemá prečo odradiť. Nakresliť štvrtú nezávislú os nevieme, ale pridať k trom zložkám nejakého objektu (krivky, vektorového poľa...) ďalšie a ďalšie je len otázka väčšej spotreby času a papiera.

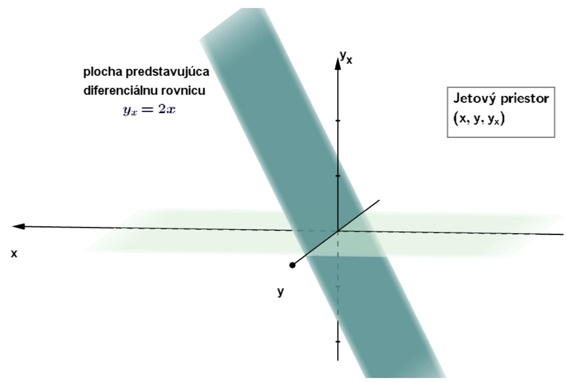
Ešte sa opýtajme, načo by to mohlo byť dobré. Prečo takto otvárať nový rozmer, uvažovať "vyššie"priestory $J^{(n)}$, keď nakoniec aj tak chceme riešenia diferenciálnych rovníc v prozaickom svete "dole", v priestore závislých a nezávislých premenných $J^{(0)}$? Lebo aj niektoré veci čo sú "dole"je ľahšie nájsť z nadhľadu. Diferenciálna rovnica sama o sebe nepredstavuje nejaký geometrický útvar v priestore $J^{(0)}$. Ale predstavuje ho vo "vyššom"priestore $J^{(n)}$. A akonáhle máme nejaký matematický objekt (v tomto prípade diferenciálnu rovnicu), reprezentovaný ako hladký geometrický objekt (v tomto prípade ako nejakú (nad)plochu v $J^{(n)}$), môžeme sa pýtať na jej symetrie - na transformácie, ktoré ju ako celok zachovávajú - a nasadiť celú mašinériu, ktorá je tak k dispozícii. Riešeniam rovnice (resp. grafom riešení) zodpovedajú nejaké útvary v priestore závislých a nezávislých premenných $J^{(0)}$ (pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu sú to krivky), a týmto zodpovedajú nejaké objekty premietnuté do vyššieho jetového priestoru $J^{(n)}$. Je tu nádej, že vektorové polia zachovávajúce plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici potom budú mapovať taký objekt (vo svete "hore") zodpovedajúci riešeniu na objekt (vo svete "dole") zodpovedajúci (vo všeobecnosti inému) riešeniu. Čo by ešte neznamenalo priveľa, keby nebola aj nádej, že aspoň niektoré vektorové polia z jetového priestoru majú svoje projekcie do vektorových polí v priestore závislých a nezávislých premenných. Nájsť vektorové polia, ktoré zachovávajú nadplochu v jetovom priestore, a vedieť ich spustiť na "dolný svet"znamená nájsť generátory transformácií mapujúcich riešenia na riešenia. To sa len tak nezahadzuje.

Čo treba urobiť:

- reprezentovať diferenciálnu rovnicu pomocou zodpovedajúcej algebraickej ako (nad)plochu v jetovom priestore $J^{(n)}$
- predĺžiť grafy funkcií z $J^{(0)}$ na vhodné grafy na $J^{(n)}$
- predĺžiť vektorové polia na $J^{(0)}$ na vhodné vektorové polia $J^{(n)}$
- využiť na $J^{(n)}$ celú geometrickú mašinériu, po akej situácia volá
- "spustiť"celú získanú korisť do $J^{(0)}$

Diferenciálna rovnica ako (nad)plocha v jetovom priestore $J^{(n)}$

Reprezentovať diferenciálnu rovnicu ako (nad)plochu v jetovom priestore $J^{(n)}$ jednoducho znamená, že derivácie závislej premennej si predstavíme ako ďalšie premenné v priestore s príslušným rozšírením. Ako bolo povedané, vizualizácia sa dá urobiť len pre obyčajné diferenciálne rovnice (jedna závislá a jedna nezávislá premenná) prvého rádu (len jeden typ derivácie), výpočtová metóda funguje aj pre parciálne diferenciálne rovnice mnohých rádov, dokoncy pre ich systémy.

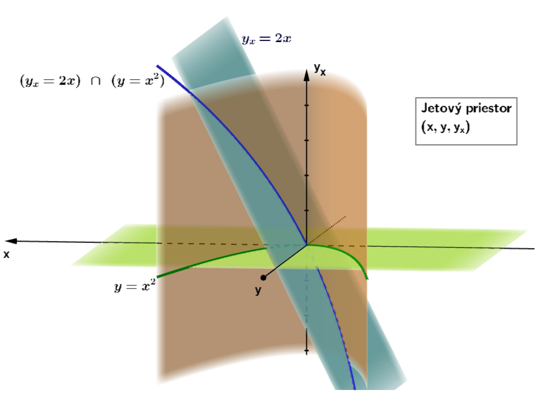


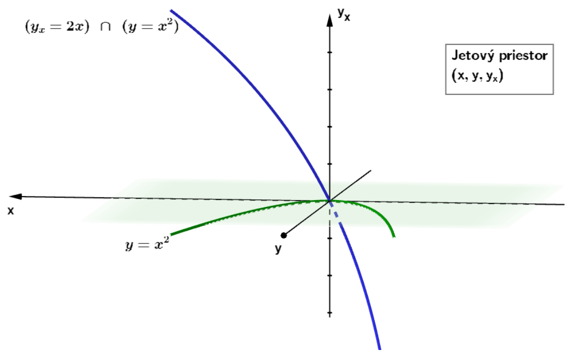
Obr. 11: Rovnica $y_x = 2x$ ako geometrický objekt v jetovom priestore.

Predĺženie grafu funkcie v $J^{(0)}$ do jetového priestoru $J^{(n)}$

Rozšíriť graf funkcie (útvar v priestore závislých a nezávislých premenných) do jetového priestoru $J^{(n)}$ znamená jednoducho pridať zložky zodpovedajúce príslušným deriváciám - všetkých rádov až po n-tý. Tomuto rozšíreniu funkcie f sa niekedy hovorí n-té **predĺženie**. Budeme ho označovať $\mathrm{pr}^n f$. V tomto zmysle nulté predĺženie je pôvodná funkcia $\mathrm{pr}^0 f = f$.

Rozmer n-tého jetového priestoru závisí od počtu možných derivácií rádu n a menej, teda je závislý od počtu nezávislých premenných. Napríklad graf funkcie $y = f(x)$ má vo svete "dole"zložky $(x, f(x))$, a v 3 rozmernom jetovom priestore $J^{(1)}$ bude mať zložky $(x, f(x), f_x(x))$. Ak je priestor nezávislých premenných rovina x, y, závislá premenná je $z = h(x, y)$, a máme dočinenia s parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu, potom potrebujeme rozšírenie do 5 rozmerného priestoru $J^(1)$. Graf predĺženej funkcie $\mathrm{pr}^1 h$ tam má zložky $(x, y, h(x, y), h_x(x, y), h_y(x, y))$. Ak máme dočinenia s funkciou jednej premennej, ale vyššími deriváciami, napríklad s druhou, bude potrebné rozšírenie $(x, f(x), f_x(x), f_{xx}(x))$, teda druhé predĺženie do 4 rozmerného $J^(2)$.





Obr. 12: Rozšírenie (”zdvihnutie”) grafu funkcie $y = x^2$ do jetového priestoru.

Predĺženie vektorového poľa do jetového priestoru

Poznáme už vektorové polia $\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y$ a ich toky tečúce na $J^{(0)}$, kde transformujú body (a teda aj grafy funkcií) v rovine x, y. **Ako vyzerajú polia predĺžené do jetového priestoru $J^{(1)}$, nazvime ich pr$^1\vec{V}$, ktorých toky transformujú body v priestore $J^{(1)}$ so súradnicami x, y, y_x?**

Na to, aby sme niečo našli, je často dobre ujasniť si, aké máme na to požiadavky. Vektorové polia, ako ich máme definované, sa dajú chápať ako operátory na funkciách (parciálne derivácie stojace na mieste bázových vektorov veľmi pomáhajú takémuto náhľadu). Na našom $J^{(1)}$ zrejme tečú toky vektorových polí typu $W^x\partial_x + W^y\partial_y + W^{y_x}\partial_{y_x}$, kde zložky W^x, W^y, W^{y_x} môžu vo všeobecnosti závisieť od všetkých dostupných premenných x, y, y_x a pôsobia na funkcie na jetovom priestore závisiace od týchto premenných. Predĺžené polia pr$^1\vec{V}$ majúce svoj pôvod v $J^{(0)}$, budú tvoriť podmnožinu týchto. Ich zložky budú závisieť len od x, y. Dôležité je, aby konzistentne pôsobili na podmnožinu funkcií na jetovom priestore tvorenú predĺženiami funkcií zdola, pr$^1 f$.

Predĺžené vektorové pole pr$^1\vec{V}$ by malo na predĺženú funkciu pr$^1 f$ pôsobiť konzistentne v tomto zmysle: Ak na priestore $J^{(0)}$ transformujeme tokom poľa $\vec{V}$ funkciu f a potom ju takto transformovanú predĺžime do jetového priestoru $J^{(1)}$, malo by to byť to dopadnúť rovnako, ako keď funkciu f najprv predĺžime do $J^{(1)}$ a tam transformujeme tokom predĺžneného poľa pr$^1\vec{V}$.
Teda stratégia pri hľadaní **algoritmu na nájdenie predĺženia poľa** by mohla byť takáto:

- Vezmime na $J^{(0)}$ nejaké pole $\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y$. Jeho hľadané predĺženie označme pr$^1\vec{V}$. Keďže jeho tok bude pôsobiť na $J^{(1)}$ so súradnicami x, y, y_x, čakáme ho v tvare pr$^1\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y + \Phi^x\partial_{y_x}$. Dôležité bude nájsť komponentu $\Phi^x(x, y)$ čo pribudla.

- Skúmajme, ako sa pri transformáciách funkcie $y = f(x)$ v priestore x, y tokom poľa $\vec{V}$ transformujú predĺženia funkcie pr$^1 f$ v priestore x, y, y_x, teda skúmajme $x(\epsilon), y(\epsilon), y_x(\epsilon)$, kde y a y_x nie sú nezávislé, ale sú funkciami premennej x, a to vzájomne konzistentne ako aj značenie napovedá, teda $y = f(x)$, $y_x = f_x(x)$.

- Nájdime generátor tejto transformácie, teda poderivujme (úplnou, totálnou deriváciou) podľa parametra a vyčíslime v $\epsilon = 0$. Toto by mali byť komponenty nášho hľadaného poľa pr$^1\vec{V}$. Prvé dve komponenty budú zrejme totožné s tými ktoré malo pole $\vec{V}$, práve tak ako prvé dve komponenty predĺženého grafu pr$^1 f$ boli len kópiou komponent grafu f. Novinkou je komponenta $\Phi^x(x, y)$ čo pribudla.

Poďme teda podľa načrtnutej stratégie predlžovať pole $\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x + \phi(x, y)\partial_y$. Jeho tok transformuje body na nultom jetovom priestore J^0, v rovine $(x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(\epsilon), y(\epsilon))$

a teda aj grafy, krivky

$$(x,\, y(x)) \to (\tilde{x},\, \tilde{y}(\tilde{x})) \tag{14}$$

Transformácia (14) indukuje aj transformáciu na prvom predĺženom jetovomn priestore J^1:

$$(x, y(x), y_x(x)) \to (\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}), \tilde{y}_{\tilde{x}}(\tilde{x})) \tag{15}$$

Derivovaním podľa ϵ a vyčíslením v $\epsilon = 0$ dostávame komponenty zodpovedajúceho generátora transformácie na prvom jetovom priestore J^1

$$\mathrm{pr}^1\vec{V} = \xi(x,y)\partial_x + \phi(x,y)\partial_y + \Phi^x(x,y)\partial_{y_x} \tag{16}$$

ktorého komponenty $\xi(x,y)$, $\phi(x,y)$, $\Phi^x(x,y)$ nájdeme ako

$$\begin{aligned}(\xi, \phi, \Phi^x) &= \left(\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{d\tilde{y}(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{d\tilde{y}_{\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \left(\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon},\ \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon},\ \frac{\partial\tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} \\ &= (\xi,\ \ Q + \xi y_x,\ \ D_xQ + \xi y_{xx}) \\ &= (\xi,\ \ \phi,\ \ D_x(\phi - \xi y_x,) + \xi y_{xx})\end{aligned} \tag{17}$$

Prvé dve komponenty budú zrejme totožné s tými ktoré malo pole $\vec{V}$, práve tak ako prvé dve komponenty predĺženého grafu $\mathrm{pr}f$ boli len kópiou komponent grafu f. Komponentu čo pribudla predĺžením do jetového priestoru sme nazvali Φ^x, aby ladila s bázovým ∂_{y_x}. [7]
D_xQ je totálna derivácia charakteristiky podľa nezávislej premennej.

$$D_xQ = \left(\frac{\partial\tilde{y}_{\tilde{x}}}{\partial\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\tilde{x}}\left(\frac{\partial y}{\partial\epsilon}\right)\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dx}(\phi(x,y) - \xi(x,y)y_x)$$

Na konci (17) sme všetko prepísali cez komponenty pôvodného poľa ξ, ϕ, aby sa ukázala súvislosť medzi komponentami $\vec{V}$ a $\mathrm{pr}^1\vec{V}$. Je však veľmi výhodné používať aj ich kombináciu Q, osobitne ak budeme predlžovať do ešte vyšších jetových priestorov.
Zovšeobecniť postup do vyšších jetových prietorov $J^{(n)}$, kde n značí najvyšší rád derivácie už nie je principiálne ťažké, len výpočtov pribúda. Predĺženia grafov funkcií budú mať oproti pôvodným grafom príslušné zložky naviac $(x, y(x), y_x(x), y_{xx}(x), ...)$. Transformáciou na priestore $J^{(0)}$ závislých a nezávislých premenných sa indukuje transformácia aj na $J^{(n)}$

$$(x,\, y(x),\, y_x(x),\, y_{xx}(x),\, ...) \to (\tilde{x},\, \tilde{y}(\tilde{x}),\, \tilde{y}_{\tilde{x}}(\tilde{x}),\, \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}),\, ...) \tag{18}$$

Predĺženie poľa $\vec{V}$ do jetového priestoru $J^{(n)}$, teda pole

$$\mathrm{pr}^n\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y + \Phi^x\partial_{y_x} + \Phi^{xx}\partial_{y_{xx}} + ...$$

s komponentami $\xi(x,y), \phi(x,y), \Phi^x(x,y), \Phi^{xx}(x,y)$, je konštruované ako generátor transformácie (18), teda jeho komponenty dostaneme tak, že derivujeme každú zložku predĺženého grafu podľa ϵ a vyčíslime v $\epsilon = 0$.

[7] Už azda začína byť jasné, prečo sme pred časom premenovali V^y na ϕ. Symboly typu $V^{y,x}$, prípadne s neskôr potrebnými označeniami derivácií, napríklad $V_x^{y,x}$, $V_y^{y,x}$, ... atď sú už na hranici únosnoti aj pre matematikov, nieto ešte tu.

$$(\xi,\ \phi,\ \Phi^x,\ \Phi^{xx},\ ...) = \left(\frac{d\tilde{x}(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{d\tilde{y}(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{d\tilde{y}_{\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon},\ \frac{d^2\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\epsilon)}{d\epsilon},\ ...\right)\Bigg|_{\epsilon=0} \tag{19}$$
$$= (\xi,\ Q + \xi y_x,\ D_x Q + \xi y_{xx},\ D_{xx} Q + \xi y_{xxx},\ ...)$$

Prípad viacerých závislých a nezávislých premenných

Uveďme si tu ešte zovšeobecnenie na prípad viacerých nezávislých a závislých premenných a príslušných jetových priestorov[8]. Viacero nezávislých premenných sa vyskytuje v parciálnych diferenciálnych rovniciach, viacero závislých premenných v previazaných systémoch diferenciálnych rovníc. V princípe ide len o pridanie príslušných osí do priestoru $J^{(0)}$ (priestor nezávislých a závislých premenných, svet "dole") a samozrejme tiež obohatenie priestoru $J^{(n)}$ o rozmery zodpovedajúce všetkým možným deriváciám rádu menšieho až rovného n. S tým ide pridanie príslušných zložiek vektorových polí a ich predĺžení. V podstate sa však len v algoritme na predĺženie poľa (19) objaví sumovanie cez všetky možnosti, teda principiálne nič nové.

Nech nezávislé premenné sú x^i, $i = 1, ..., p$, závislé premenné y^α, $\alpha = 1, ..., q$. Teda priestor $J^{(0)}$ je $p + q$ rozmerný, lebo toľko máme spolu nezávislých a závislých premenných. Priestor $J^{(1)}$ je $p + q + pq$ rozmerný ($p + q$ rozmerov je samozrejme kvôli $J^{(0)}$ ktoré zahŕňa, a pq kvôli počtu prvých derivácií ktoré sa dajú uvažovať. A tak ďalej.
Polia na priestore $J^{(0)}$ budú mať $p + q$ komponent

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \partial_i + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha \partial_{y^\alpha} = \xi^i \partial_i + \phi^\alpha \partial_{y^\alpha} \tag{20}$$

Naše pole má teraz toľko charakteristík koľko je závislých premenných:

$$Q^\alpha = \phi^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i y_i^\alpha = \phi^\alpha - \xi^i y_i^\alpha \tag{21}$$

Skratka y_i^α značí deriváciu y^α podľa x^i. Predĺženie poľa do n-tého jetového priestoru $J^{(n)}$ teraz bude mať príslušne veľa komponent:

$$\mathrm{pr}^n\vec{V} = \sum_{i=1}^{p} \xi^1 \partial_i + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha \partial_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\mathcal{I}} \Phi^{\alpha,\mathcal{I}} \partial_{y^\alpha_{\mathcal{I}}} = \xi^i \partial_i + \phi^\alpha \partial_\alpha + \Phi^{\alpha,\mathcal{I}} \partial_{y^\alpha_{\mathcal{I}}} \tag{22}$$

Sumuje sa cez všetky nezávislé a závislé premenné (sumy cez i a α), a cez všetky možné derivácie podľa nezávislých premenných (suma cez multiindex $\mathcal{I}$). Znamienok sumovania je však priveľa, v súlade s konvenciou ich budeme vynechávať s tým, že implicitne sa očakáva sumovanie cez opakované indexy.

Konkrétne komponenty predĺženého poľa $\Phi^{\alpha,\mathcal{I}}$ dostávame podobne ako v prípade jednej závislej a jednej nezávislej premennej, len nezabúdajme že teraz existuje charakteristika Q^α pre každú závislú premennú y^α a na presumovanie cez nezávislé premenné kde je potrebné:

$$\Phi^{\alpha,\mathcal{I}} = D_{\mathcal{I}} Q^\alpha + \xi^i y^\alpha_{i,\mathcal{I}} = D_{\mathcal{I}}(\phi^\alpha - \xi^i y_i) + \xi^i y^\alpha_{i,\mathcal{I}} \tag{23}$$

[8] V týchto situáciách už plná vizualizácia nie je k dispozícii, ale čitateľov s averziou k troche abstrakcie sme už beztak stratili dávno.

Kritérium infinitezimálnej invariantnosti pre diferenciálnu rovnicu

Vráťme sa k dôvodom, prečo veci ako funkcie s grafmi na $J^{(0)}$, vektorové polia s tokmi na $J^{(0)}$ predlžujeme do jetových priestorov $J^{(n)}$. Dôvodom je, že diferenciálna rovnica n-tého rádu má v takom priestore prirodzenú reprezentáciu, tvorí tam akúsi (nad)plochu. Riešenia diferenciálnej rovnice zrejme budú mať predĺženia ležiace v tejto nadploche a predĺženia vektorových polí budú túto nadplochu zachovávať, len budú azda presúvať jedno predĺžené riešenie na iné. Máme nádej, že v jetovom priestore bude pomerne ľahké nájsť takéto polia. Ak sa nám z nich potom podarí spätne zrekonštruovať ich nepredĺžená verzia, máme pole na $J^{(0)}$ mapujúce riešenia na riešenia - spôsob, ako z jedného urobiť (možno) iné.

Pracujme najprv znova s jednou závislou a jednou nezávislou premennou. Chceme nájsť vektorové pole $\vec{V} = \xi\partial_x + \phi\partial_y$ na priestore $J^{(0)}$, priestore nezávislých a závislých premenných, ktorého n-té predĺženie $\mathrm{pr}^n\vec{V}$ bude na priestore $J^{(n)}$ generovať taký tok, ktorý nechá invariantnú plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici n-tého rádu. Aby sa predišlo nedorozumeniu, komponenty $\xi(x,y), \phi(x,y)$ takého poľa sú pre nás neznáme. Požiadavka, aby jeho predĺžená verzia (ktorá, ako sme videli, súvisí s týmito hľadanými komponentami) zachovávala nadplochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici, nám dodá podmienky, ktoré majú hľadané komponenty spĺňať.

Nech $F(x, y, y_x, y_{xx}...) = 0$ je naša diferenciálna rovnica n-tého rádu. Je geometrickým útvarom v priestore $J^{(n)}$ so súradnicami $x, y, y_x, y_{xx}...$, kam patrí definičný obor funkcie F. Rovnica predstavuje nulovú vrstevnicu tejto funkcie.

Skontrolujme požiadavku

$$\vec{\nabla}F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_{y_x} F, \partial_{y_{xx}} F, ...)\Big|_{F=0} \neq (0,0,0,0,...)$$

. Ak nie je splnená, naša metóda nie je spoľahlivá. Ak je, pokračujeme.

Nasadením kritéria infinitezimálnej invariantnosti nájdime polia na $J^{(n)}$, ktoré zachovávajú nadplochu $F(x, y, y_x, y_{xx}...) = 0$. Zo všetkých polí, ktoré tečú na $J^{(n)}$, chceme len tie, ktoré sú predĺženiami polí z $J^{(0)}$. To dáva obmedzenie na ich komponenty - môžu závisieť len od premenných z $J^{(0)}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{pr}^n\vec{V}F\Big|_{F=0} \qquad (24) \\ &= (\xi\partial_x \,+\, \phi\partial_y \,+\, \Phi^x\partial_{y_x} \,+\, \Phi^{xx}\partial_{y_{xx}} \,+\, ...)F\Big|_{F=0} \end{aligned}$$

Nezabudnime, že komponenty $\Phi^x, \Phi^{xx}, ...$ sú poskladané z komponent ξ, ϕ a ich derivácií. Máme teda podmienky, ktoré majú komponenty hľadaného poľa $\vec{V}$ na $J^{(0)}$ splniť. Je pravda že sú to vo všeobecnosti samy osebe diferenciálne podmienky. Ale často jednoduchšie než pôvodná diferenciálna rovnica.

Keď máme hľadané pole $\xi\partial_x \,+\, \phi\partial_y$, nájdime tok ktorý indukuje na priestore $J^{(0)}$. Ak máme nejaké riešenie našej diferenciálnej rovnice, tento tok nám ho odplaví na (vo všeobecnosti) iné. Aj ak riešenie nemáme žiadne, mať generátor symetrie rovnice sa oplatí - lebo nájdením jeho integrálnych kriviek vieme niekedy odhadnúť nové súradnice, v ktorých by rovnica mohla byť ľahšia.

Príklad: Diferenciálna rovnica v jetovom priestore

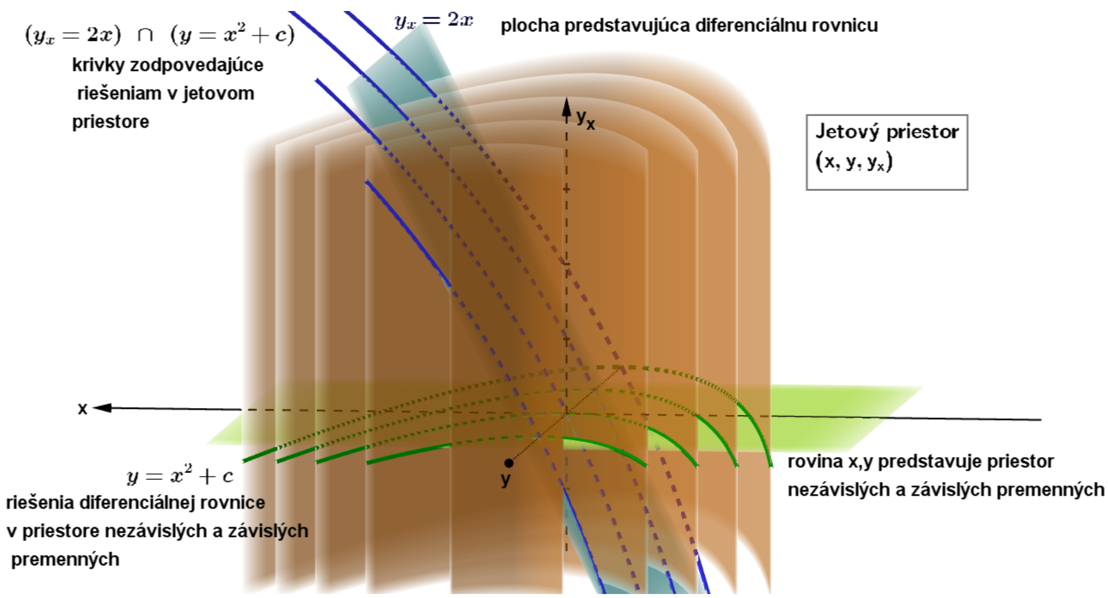
Celé to azda znie abstraktnejšie než sa patrí, ukážme si to na konkrétnej situácii. Opäť volíme jednoduchý príklad, ktorý by sme vyriešili aj bez mašinérie s ktorou sa zoznamujeme - ale práve zoznamovací proces predsa volá po príkladoch, kde nám dávna skúsenosť môže robiť garde.

Vezmime rovnicu $y_x = 2x$. Ako obvykle, y_x je skrátené označenie derivácie podľa x. Teda x je nezávislá a y závislá premenná, a jediná relevantná derivácia pre účely súvisiace s našou rovnicou je y_x. Jetový priestor $J^{(1)}$ teda bude pozostávať z 2D priestoru ("svet dole", $J^{(0)}$) so súradnicami x, y a 1D rozšírenia, ktorému zodpovedá rozmer osúradnicovaný cez y_x.

Naša diferenciálna rovnica je v tomto rozšírenom 3D svete reprezentovaná plochou

$$F(x, y, y_x) = y_x - 2x = 0$$

čo je jednoduchá naklonená rovina. Riešenia našej diferenciálnej rovnice sú nejaké krivky v $J^{(0)}$, ktoré majú svoje zodpovedajúce predĺženia na ploche zodpovedajúcej rovnici. Samozrejme tvárime sa, že zatiaľ nepoznáme všetky riešenia, aj keď, ako už bolo spomínané, ukazujeme si metódu na príklade, ktorý po nej až tak nevolá. To, že ich v skutočnosti vieme v tomto prípade uhádnuť, nech nám len na konci pomôže overiť, čo sa deje. A tiež ujasniť si zopár veci ešte aj o tomto notoricky známom prípade rovníc.



Obr. 13: Rovnica $y_x - 2x = 0$ ako geometrický objekt v priestore x, y, y_x s riešeniami v priestore x, y.

Gradient (v jetovom priestore) funkcie F nie je nikde nulový:

$$(\,\partial_x,\, \partial_y,\, \partial_{y_x}\,)F = (\,\partial_x,\, \partial_y,\, \partial_{y_x}\,)(y_x - 2x) = (-2, 0, 1) \neq (0, 0, 0) \tag{25}$$

takže infinitezimálna podmienka invariantnosti $\mathrm{pr}^1\vec{V}F|_{F=0} = 0$ bude postačujúcou pri hľadaní symetrie. Nájdime polia, ktoré zachovávajú rovinu $y_x - 2x = 0$. Vlastne hľadáme symetrie "nulovej vrstevnice"funkcie $F(x, y.y_x) = y_x - 2x$. Samozrejme hľadáme len také polia

$$\mathrm{pr}^1\vec{V} = \xi\partial_x \,+\, \phi\partial_y \,+\, \Phi^x\partial_{y_x}$$

v jetovom priestore $J^{(1)}$, ktoré vznikli predĺžením vektorových polí z $J^{(0)}$ kde pôsobia polia typu

$$\vec{V} = \xi(x, y)\partial_x \,+\, \phi(x, y)\partial_y$$

lebo len tie budeme vedieť (za predpokladu že ich nájdeme) spustiť naspäť na $J^{(0)}$ a tam prípadne použiť na hľadanie nových riešení a pod.

Teda komponenta Φ^x predĺženého poľa bude $D_x(\phi - \xi y_x) + \xi y_{xx}$, pričom ξ, ϕ závisia od (x, y) a y je na riešeniach funkciou x.

Nezabudnime teda pri derivovaní na funkčné závislosti $\xi(x,y), \phi(x,y), y(x)$. Derivácie budeme označovať spodným indexom.

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{pr}^1 \vec{V} F \Big|_{F=0} \\
&= (\,\xi\partial_x \;+\; \phi\partial_y \;+\; \Phi^x\partial_{y_x})\,(y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} \\
&= -2\xi + \Phi^x \\
&= -2\xi + D_x(\phi - \xi y_x) + \xi y_{xx} \\
&= -2\xi + \phi_x + \phi_y y_x - \xi_x y_x - \xi_y (y_x)^2 - \xi y_{xx} + \xi y_{xx} \\
0 &= (-2\xi + \phi_x) \;+\; (\phi_y - \xi_x) y_x - \xi_y (y_x)^2
\end{aligned}
$$

V priestore $J^{(1)}$ sa jedná vlastne o polynóm (vo všeobecnosti vo viacerých premenných) rovný nule. Teda každý monóm musí byť nulový zvlášť, a tak získavame tri požiadavky na komponenty $\xi(x,y), \phi(x,y)$:

$$
\begin{array}{ll}
(i) & 0 = -2\xi + \phi_x \\
(ii) & 0 = \phi_y - \xi_x \\
(iii) & 0 = -\xi_y
\end{array}
$$

Posledná (iii) nám hovorí, že ξ nezávisí od y, teda $\xi = \xi(x)$. Ak (i) poderivujeme ešte raz podľa y a (ii) poderivujeme podľa x a zvážime nezávislosť ξ od y prichádzame k podmienkam

$$\phi_{xy} = 2\xi_y = 0$$

$$\phi_{yx} = 0 = \xi_{xx}$$

Vidno, že ξ je nanajvýš lineárnou funciou x, a koeficienty nemôžu závisieť ani od y

$$\xi = ax + b$$

Ešte poderivujme (ii) podľa y

$$\phi_{yy} = \xi_{xy} = 0$$

Odtiaľ je jasné, že ϕ je nanajvýš lineárnou funkciou y, ale koeficienty ešte môžu byť funkciami x

$$\phi = \alpha(x)y + \beta(x)$$

. Spätným dosadením do (i), (ii) prídeme postupne k nasledujúcemu všeobecnému tvaru pre komponenty hľadaného poľa:

$$\xi = ax + b$$

$$\phi = ay + ax^2 + 2bx + c$$

Teda pole, ktorého predĺženie zachováva diferenciálnu rovnicu $y_x - 2x = 0$ má tvar

$$\vec{V} = (ax + b)\partial_x + (ay + ax^2 + 2bx + c)\partial_y$$

kde a, b, c sú ľubovoľné konštanty. Inak povedané, je lineárnou kombináciou (so spomenutými koeficientami) troch symetrie generujúcich polí

$$\vec{V} = a(x\partial_x + (y + x^2)\partial_y) + b(\partial_x + 2x\partial_y) + c\partial_y$$

Označme si tieto polia $\vec{V}^I$, $\vec{V}^{II}$, $\vec{V}^{III}$, a pozrime sa na ne bližšie. Osobitne na to, čo robia s riešením rovnice.

$$\vec{V}^I = x\partial_x + (y + x^2)\partial_y$$

$$\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y$$

$$\vec{V}^{III} = \partial_y$$

V rámci skúšky správnosti skontrolujme, či predĺženie každého z polí naozaj zachováva plochu zodpovedajúcu diferenciálnej rovnici $y_x - 2x = 0$, teda či každé spĺňa kritérium infinitezimálnej invariantnosti. Upozornime tu na fakt, že nájsť predĺženie žiada len aplikovať algoritmus (17), čo je pri teraz už známych komponentách poľa len vec mechanického derivovania.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}^1\vec{V}^I &= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + (D_x(y + x^2 - xy_x) + xy_{xx})\partial_{y_x} \\
&= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + (y_x + 2x - y_x - xy_{xx} + xy_{xx})\partial_{y_x} \\
&= x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + 2x\partial_{y_x}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{pr}^1\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y + (D_x(2x - 1y_x) + 1y_{xx})\partial_{y_x} = \partial_x + 2x\partial_y + 2\partial_{y_x}$$

$$\mathrm{pr}^1\vec{V}^{III} = \partial_y + D_x(1)\partial_{y_x} = \partial_y$$

$$\mathrm{pr}^1\vec{V}^I(y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [x\partial_x + (y + x^2)\partial_y + 2x\partial_{y_x}](y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [-2x + 2x]\Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

$$\mathrm{pr}^1\vec{V}^{II}(y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [\partial_x + 2x\partial_y + 2\partial_{y_x}](y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [-2 + 2]\Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

$$\mathrm{pr}^1\vec{V}^{III}(y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [\partial_y](y_x - 2x)\Big|_{y_x - 2x = 0} = [0]\Big|_{y_x - 2x = 0} = 0$$

Skúška správnosti teda prebehla dobre pre všetky tri polia. Teraz sa pozrime, akú transformáciu (tok) budú robiť na rovine x, y, a konkrétne čo budú ich toky robiť s jedným riešením diferenciálnej rovnice, $y = x^2$.

Poďme sa teraz pozrieť na toky$(x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y}))$ indukované poľami $\vec{V}^I$, $\vec{V}^{II}$, $\vec{V}^{III}$.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^I = x\partial_x + (y + x^2)\partial_y$ nájdeme inetgráciou jeho komponent

$$\frac{dx}{d\epsilon} = x \qquad \frac{dy}{d\epsilon} = y + x^2$$
$$x(0) = x \qquad y(0) = y$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = xe^{\epsilon} \qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = x^2 e^{2\epsilon}$$

Aby sme splnili $y(0) = y$, položíme $y(0) = x^2(0)$. Zrejme funkcia $y = x^2$ bude nejako význačná pre toto pole. Jej graf je integrálnou krivkou, a transformácia indukovaná poľom $\vec{V}^I$ ju zrejme nechá v pôvodnom tvare, ale skontrolujem si to aspoň pre precvičenie:
Inverzná transformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}e^{-\epsilon}$. Dosaďme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= [x(\tilde{x}, \tilde{y})]^2 e^{2\epsilon} \\ &= (\tilde{x}e^{-\epsilon})^2 e^{2\epsilon} = \tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ je naozaj invariantná pri toku poľa $\vec{V}^I$. Pole $\vec{V}^I$ nám neporuší takéto riešenie diferenciálnej rovnice, ale ani z neho nenájde nič ďalšie.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^{II} = \partial_x + 2x\partial_y$ nájdeme inetgráciou jeho komponent

$$\frac{dx}{d\epsilon} = 1 \qquad \frac{dy}{d\epsilon} = 2x$$
$$x(0) = x \qquad y(0) = y$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = x + \epsilon \qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = y + 2x\epsilon + \epsilon^2$$

Pozrime ako transformuje graf funkcie $y = x^2$:
Inverzná trnasformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} - \epsilon$. Dosaďme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= y(x(\tilde{x}, \tilde{y})) + 2x(\tilde{x}, \tilde{y})\epsilon + \epsilon^2 \\ &= (\tilde{x} - \epsilon)^2 + 2(\tilde{x} - \epsilon) + \epsilon^2 = \tilde{x}^2 \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ je invariantná aj pri toku poľa $\vec{V}^{II}$. Ani toto pole $\vec{V}^{II}$ nám neporuší takéto riešenie diferenciálnej rovnice, ale ani z neho nenájde nič ďalšie.

Tok indukovaný poľom $\vec{V}^{III} = \partial_y$ nájdeme inetgráciou jeho komponent

$$\frac{dx}{d\epsilon} = 0 \qquad \frac{dy}{d\epsilon} = 1$$
$$x(0) = x \qquad y(0) = y$$

Riešením je

$$x(\epsilon) = \tilde{x} = x \qquad\qquad y(\epsilon) = \tilde{y} = y + \epsilon$$

Pozrime ako transformuje graf funkcie $y = x^2$:
Inverzná trnasformácia potrebná pre dosadenie do transformovanej funkcie je mimoriadne jednoduchá $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}$. Dosaďme do

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tilde{x}) &= y(x(\tilde{x}, \tilde{y})) + \epsilon \\ &= \tilde{x} + \epsilon \end{aligned}$$

Funkcia $y = x^2$ sa pri toku poľa $\vec{V}^{III}$ transformuje nasledovne:

$$y(x) = x^2 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{y}(\tilde{x}) = \tilde{x} + \epsilon$$

Teda ak $y(x) = x^2$ rieši diferenci8lnu rovnicu $y_x - 2x = 0$, rieši ju aj $y(x) = x^2 + c$, kde c je konštanta! Tá stará známa integračná konštanta je teda prejavom istej symetrie. Generátorom je pole ∂_y generuj=uce posunutoia v smere osi y, čo tu dáva naozaj názorný zmysel, keďže naše nové riešenia $y(x) = x^2 + c$ sú oproti pôvodnému riešeniu $y(x) = x^2$ len posunuté v smere osi y.

Pozorovanie, že za integračnými konštantami je niečo hlboké umožňuje precvičiť si na tomto triviálnom príklade metódy, ktoré nadobúdajú omnoho väčšiu užitočnosť tam, kde už vizualizácia a notorickosť situácie nei sú k dispozícii ako sprievodcovia. Tu celá mašinéria vyznievala ako lov pstruhov harpúnou - ale nakoniec harpúnu treba vziať prvýkrát do ruky omnoho skôr než sa pustíme za žralokmi.

This project No. 2259/02/01 has received funding from the European Union´s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 945478.