Indexová notácia

Fyzika a technické vedy sa hemžia **viaczložkovými objektmi**. Vektormi to začína a vyššími tenzormi pokračuje. Akonáhle máme dočinenia s usporiadaným súborom dát, je veľmi praktické mať v nich poriadok. Organizácia jednotlivých zložiek (teda ich očíslovanie - napríklad prvá, druhá, tretia zložka zložka vektora) je prirodzený krok. Znalosť niekoľkých trikov umožňujúcich **efektívne zaobchádzanie so samotnými identifikátormi dát** vyžaduje trochu časovej investície (a počiatočného podvihnutia obočia nad zbytočnými zdanlivými komplikáciami), ktorá sa však mnohonásobne vracia pri praktických výpočtoch. Nakoniec, indexovú notáciu používajú hojne ľudia zaoberajúci sa tenzorovými rovnicami (kde sa bežne píše "desať parciálnych diferenciálnych rovníc jedným ťahom"). Ako reklamu na začiatok spomeňme rozličné vektorové identity pre trojitý vektorový súčin, zmiešaný súčin a podobne - je možné ich odvodiť či dokázať aj bez indexovej notácie, ale stojí to viac času ako jej naštudovanie - a s ňou ide o omnoho rýchlejší proces, nehovoriac o širšom použití.

Pravidlá a konvencie pre narábanie s indexmi

Čo je **index** - zhruba povedané číslo číslujúce vstupné údaje (ktoré sú vo fyzike a technike často tiež numerické). Napríklad: n-ticu údajov $(a_1, ..., a_n)$ možno zapísať ako $a_i,\ i = 1, \dots, n$. Nič prevratného, namiesto konkrétnej zložky je niekedy vhodné hovoriť jednoducho o i-tej ako o zástupcovi ktorejkoľvek a všetkých (mušketiersky princíp).

Ruža by rovnako voňala pod iným menom. **Je jedno, aký symbol zvolíme ako index, podstatný je rozsah hodnôt ktoré môže nadobúdať**. Samozrejme, keby sme náš index nazvali "j"namiesto "i", neslúžil by svojmu účelu o nič menej, v tomto prípade má Shakespeare pravdu ohľadne mien a kvalít. Je tu však isté " ale":

Sloboda v pomenovávaní má svoj háčik: **Nenazývajme rôzne veci rovnako tam, kde to môže viesť ku zmätkom** (napr. $a_i b_j$, značí súčin i-tej zložky a j-tej zložky (kde i sa môže a nemusí rovnať j), kým $a_i b_i$ značí súčin zložiek na tej istej pozícii - plus ešte implicinú sumu o ktorej si povieme niečo nižšie)

Časté operácie sa prestávajú zapisovať a rozumejú sa implicitne: takým prípadom je **Einsteinova sumačná konvencia**. V prípade súčinov, v ktorých vystupujú rovnaké indexy, sa suma cez celý rozsah, ktorý môže index nadobúdať, často vynecháva a rozumie sa imlicitne:

$$x_i x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i x_i$$

Zvyk je zažitý tak veľmi, že chceme napísať naozaj len súčin dvoch zložiek na rovnakej pozícii bez sumovania cez všetky pozície, treba to explicitne povedať. ("Nielenže nepíšem sumu, ale ani ju nemyslím!")

Sumačná konvencia spolu s možnosťou premnovávania nám umožňuje šikovne manipulovať **"hluché"** (alebo **"nemé"**) indexy. To sú tie, cez ktoré sa sumuje v celom ich rozsahu. Potom samozrejme

$$x_i x_i = x_j x_j = ... = x_q x_q = \sum_{\text{index}=1}^{N} x_i x_i$$

Táto samozrejmosť prevedená v správnom čase, mieste a príležitosti je jedným z trikov, ktoré neoboznámených čitateľom pripomínajú ťahanie králikov z prázdneho klobúka.

Často potrebná dvojmožnosť "jedna alebo nič"je zapisovaná **Kroneckerovou deltou** δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad i = j$$
$$\delta_{ij} = 0 \qquad i \neq j$$

Symetria tohto objektu, teda fakt, že $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, má viac uplatnení ako by človek čakal na základe jeho triviality. Kronekerov symbol má formálne funkciu "**premenovávača** indexov": napr. $\delta_{ik} b_k = \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} b_k = b_i$, pretože zo všatkých členov jediný nenulový bude ten, v ktorom $i = k$

Často potrebná trojmožnosť "jedna, mínus jedna alebo nič"je šikovne zapisovaná cez **Levi- Civita symbol** ϵ_{ijk} . Na rozdiel od Kroneckerovej delty varianta "nič"nastáva, ak sa ktorákoľvek dva indexy zhodujú. Jednotku máme ak sa jedná o párnu permutáciu rôznych indexov, mínus jednotku pre nepárne permutácie. Teda[1]

$$1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{132}$$

Pravidlá pre zmenu znamienka pri permutácii indexov a nula pri rovnakosti indexov sa dajú zhrnúť ako **úplná antisymetria voči permutáciám**: Ak $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ a zároveň $i = j$, potom vlastne má platiť $\epsilon_{jjk} = -\epsilon_{jjk}$, čo je možné len ak $\epsilon_{jjk} = 0$. (V tomto prípade nepredpokladáme sumačnú konvenciu).

Jedna z mála vecí, čo sa pri indexovej notácii oplatí naučiť naspamäť, je "Davis cup identita[2]"

$$\epsilon_{jki}\epsilon_{mni} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

Dôkaz sa dá urobiť vyskúšaním všetkých nenulových možností pre Levi-Civitove symboly naľavo (raz za život, počas uviaznutia na letisku a pod) a potom sa ju oplatí naučiť naspamäť namiesto premnohých vektorových identít ktoré predstavujú jej konkrétne aplikácie.

Počet indexov pre daný objekt a **ich rozsahy** poskytujú informáciu, koľko údajov (nie nevyhnutne nezávislých) daný objekt zahŕňa. Napríklad na charakteristiku veľkosti, smeru a orientácie sily (vzhľadom na danú referenčnú sústavu) stačia tri čísla; na charakteristiku deformácie neizotropného materiálu pri aplikovanom napätí ich treba omnoho viac. Niekedy sa v literatúre vyskytuje nejednotná terminológia a implicitné konvencie na ktoré si treba dávať pozor. Tak možno občas stretnúť výrazy ako "vektor a_i"či "matica A_{ij}"nerozlišujúc verbálne zložky a objekty samotné. Obvykle to nevedie k nedorozumeniam, pokiaľ človek číta myšlienku a nie literu. Nakoniec "tenzor T"nám nepovie o koľko údajov sa v ňom jedná; naproti tomu pri výraze "tenzor T_{abcd}"je jasné že sa jedná o "štvorrozmerný"súbor čísel a pod [3].

Súčin symetrickéhoi a anitisymetrického je nula: majme dva objekty s niekoľkými indexmi, a nech prebiehajú rovnaký rozsah hodnôt. Povedzme, že sa nám vo výpočte objaví výraz $A_{ijk}S_{mjk}$, pričom objekt A je antisymetrický a S symetrický vzhľadom na výmenu posledných dvoch indexov a ako obvykle predpokladáme sumačnú konvenciu, teda

$$A_{ijk}S_{mjk} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ijk}S_{mjk}$$

[1]Najčastejšie budeme mať dočinenia s prípadom, keď indexy môžu nadobúdač hodnoty 1,2,3, ale dá sa v istom zmysle zovšeobecniť.

[2]Veľmi neoficiálny názov, zavedený pokiaľ viem lokálne na bratislavskej FMFI UK Mariánom Feckom

[3]Mimochodom, na zaobchádzanie s "mnohorozmernými"matematickými objektmi nie je potrebná nadľudská predstavivosť. Na narábanie s nimi nie je vždy potrebná vizualizácia akú si azda ľudia prajú (aj keď čo si pod ňou predstavujú je otázne). Indexov je niekedy toľko, že sa oplatí použiť index na ich číslovanie. Neznamená to nevyhnutne väčšiu náročnosť ako situácia s jedným indexom.

Potom tento výraz je nula. Je za za tým jednoduchá trojkroková úvaha:
$A_{ijk}S_{mjk} = -A_{ikj}S_{mjk}$, pretože sme prepermutovali indexy v antisymetrickom A

$A_{ijk}S_{mjk} = A_{ikj}S_{mkj}$, pretože sme len premenovali dve sady hluchých indexov (cez ktoré sa sumuje), "j"sme premenovali na "k"a "k"na "j".

$A_{ikj}S_{mkj} = A_{ikj}S_{mjk}$, pretože S je symetrický vzhľadom na danú zámenu indexov

Teraz však, porovnaním prvého a tretieho riadku, dostávame $-A_{ikj}S_{mjk} = A_{ikj}S_{mjk}$, čo môže byť splnené len ak sa jedná o nulu.

Príklady

Uveďme si niekoľko príkladov na zápis indexovou notáciou, spoužitím niekoľkých pravidiel spomenutých vyššie. Čitateľovi neoboznámenému s týmito trikmi je silne odporúčané považovať zvyšok tejto kapitoly za cvičenie ktorého sa treba zúčastniť s kusom papiera a ceruzkou. Pri dostatočnom cviku výpočty bývajú ešte kratšie ako tie uvedené nižšie, keďže mnoho krokov uvádzaných pre pedagogické účely je ľahké urobiť "v hlave".

Najznámejší "základoškolský"**skalárny súčin** medzi dvoma trojzložkovými vektormi $\vec{a}, \vec{b}$, v kartézskych súradniciach:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i = a_ib_i$$

Súčin dvoch (pre jednoduchosť nxn) matíc $C = AB$: zložku i, j matice C nájdeme ako súčin i-teho riadka matice A a j-teho stĺpca matice B.

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + ... + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{kj}$$

Vektorový súčin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Toto je prvý z mnohých prípadov, kde stručnosť a prehľadnosť indexovej notácie výrazne kontrastuje s "bežným"vektorovým zápisom. Stačí si spomenúť na krkolomné mnemotechnické pomôcky ktoré sa vyskytujú pri prvých školských výpočtoch s týmto typom súčinu. Postupujeme nasledovne: Vieme, že výsledkom vektorového súčinu je opäť vektor, teda objekt so zložkami. Namiesto postupného výpočtu prvej, druhej, treťej, nájdeme i-tu zložku hľadaného vektora:

$$[\vec{c}]_i = c_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$$

Napríklad pre $i = 1$ máme

$$c_1 = \epsilon_{1jk}a_jb_k = \epsilon_{123}a_2b_3 + \epsilon_{132}a_3b_2 + 0 + ... + 0 = a_2b_3 - a_3b_2$$

pričom nuly predstavujú členy obsahujúce $\epsilon_{112}, \epsilon_{133}$ atď.

Dvojitý vektorový súčin $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Na miesto podivného mnemotechnického "bác mínus cáb"si uvedomme, že výsledkom je znova vektor, ktorému nájdeme všeobecnú i-tu zložku (a teda všetky):

$$
\begin{aligned}
[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \epsilon_{ijk} a_j [\vec{b} \times \vec{c}]_k \\
&= \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{kmn} b_m c_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} a_j b_m c_n \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) a_j b_m c_n \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
&= [\vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})]_i
\end{aligned}
$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$$

Zmiešaný súčin $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$

$$
\begin{aligned}
\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) &= a_i [\vec{b} \times \vec{c}]_i \\
&= a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = c_k \epsilon_{kij} a_i b_j = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})
\end{aligned}
$$

Vektorová analýza. Pripomeňme, že operácie ako rotácia, divergencia, gradient zahŕňajú aplikáciu "nabla operátora"spôsobom veľmi pripomínajúcim vektorovú algebru. Uveďme najprv trochu efektívnejšoiu notáciu než aká sa prezentuje v prvých ročníkoch: namiesto priestorových súradníc x, y, z používajme x_1, x_2, x_3. Čitateľ už snáď tuší motiváciu: chceme mať možnosť písať x_i a starať sa o všetky zložky súčastne, s bonusom skrátenia zápisu parciálnych derivácií v štýle $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad} f &= \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \\
[\mathrm{grad} f]_i &= \partial_i f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div} \vec{V} &= \vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) \\
\mathrm{div} \vec{V} &= \partial_i V_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{divgrad} f &= \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = \Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right) \\
\Delta f &= \partial_i \partial_i f
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2}, \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)$$

$$[\mathrm{rot} \vec{V}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j V_k$$

Vyzbrojení vyššieuvedeným, môžeme si odvodiť niekoľko identít vektorovej analýzy hojne využívanýchnapríklad vo výpočtoch súvisiacich s elektromagnetizmom či hydrodynamikou. Prvé dve sú "maskované identické nuly", totiž rotácia gradientu a divergencia rotácie. Obe nuly sa dajú ukázať aj krkolomným rozpísaním do zložiek, ktoré sa (za predpokladu bezomylnej manipulácie) nakoniec vzájomne vykompenzujú na nulu. Avšak s našou mašinériou ide o veľmi stručný výpočet, pretože $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$, a $\partial_j\partial_k = \partial_k\partial_j$ a ako vieme, súčin takýchto objektov (antisymetrického a symetrického vzhľadom na zámenu tej istej dvojice indexov)je nula. Dosiaľ nepresvedčený čitateľ je pozvaný vyskúšať všetky uvedené výpočty bez indexovej notácie a ponúknutých skratiek.

$$[\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f]_i = [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)]_i$$

$$= \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f$$

$$= 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{V}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

$$= \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j V_k$$

$$= 0$$

Na záver si spočítajme známu identitu pre rotáciu rotácie vektorového poľa. Ide o špeciálny prípad dvojitého vektorového súčinu, ktorý sme videli vyššie.

$$\begin{aligned}
[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j[\vec{\nabla} \times \vec{V}]_k \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{kmn}\partial_m V_n \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\partial_j\partial_m V_n \\
&= (\delta_{im}\delta jn - \delta_{in}\delta_{jm})\partial_j\partial_m V_n \\
&= \partial_i\partial_j V_j - \partial_j\partial_j V_i \\
&= [\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - \Delta\vec{V}]_i
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - \Delta\vec{V}$$

Toto je pomerne technická partia matematiky, pre ľudí počítajúcich s mnohozložkovými objektami podobne vítaná ako bolo logaritmické pravítko pred príchodom vreckových kalkulačiek. Pre niekoľko výpočtov sa možno neoplatí investovať do jej zvládnutia. Viac výpočtov bez nej prispieva k ochote si ju naštudovať, akokoľvek sa zdá byť cvičením v presúvaní symbolov. Aj básnik sa najprv musí naučiť pravopis (aspoň natoľko aby mu bolo rozumieť), a keby mal pri každom verši dodatočne konzultovať slovník, možno by aj ľutoval, že nevenoval trochu času aj veľmi prozaickým štúdiám.

This project No. 2259/02/01 has received funding from the European Union´s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 945478.