Fourierove rozvoje

S Fourierovou analýzou sa stretajú študenti mnohých technických aj prírodovedných oborov. Vedieť napísať periodickú funkciu ako nejakú lineárnu kombináciu sínusov a kosínusov s vhodne zvolenými periódami, či už je to kombinácia v podobe diskrétnej sumy alebo integrálu, je požiadavka tradičná takmer ako znalosť Taylorovho rozvoja. Odhliadnuc od tradície, prečo je také užitočné vedieť rozkladať funkcie, a konkrétne rozkladať ich na sínusy a kosínusy? Motiváciu možno hľadať na viacerých úrovniach.

Rozkladať veci na zložky je niekedy rovnako dôležité ako ich zložiť. Stručnejšie neznamená vždy jednoduchšie. Pri mnohých výpočtoch je snaha skomprimovať výrazy na čo najmenší počet členov, "zabaliť"k sebe patriace údaje do matíc či tenzorov, zaobchádzať s celkami namiesto častí. Táto metóda má svoje miesto, ale zostručňovanie nie je základným výpočtovým princípom, v zmysle že by vždy pomohlo. Niekedy sa oplatí veci rozkladať namiesto skladania. Často je motiváciou **analýza daného objektu**. Je to čosi ako spätná rekonštrukcia receptu z hotového jedna - majúc celok, hľadáme "komponenty". (Laboratóriá na lekárskych pohotovostiach v hubárskej sezóne by vedeli rozprávať). Vo fyzike je príkladom analýza vektorových veličín - nie vždy nás zaujíma celý vektor sily, niekedy sú kľúčové jeho zložky v konkrétnych význačných smeroch atď. Samozrejme vec sa obvykle dá rozložiť rôznymi spôsobmi, a výber z nich má vplyv na náročnosť (povedzme rovno prevediteľnosť) výpočtu.

Prečo zrovna **rozklad do sínusov a kosínusov**? Mnoho procesov v prírode a technike je **periodických**. (A nakoniec ak pripustíme zovšeobecnenie na nekonečne dlhú periódu, sú efektívne periodické všetky - čo je práve myšlienka zovšeobecnenia rozvoja do Fourierovho radu na Fourierovu transformáciu.) Sínus a kosínus sú azda najznámejšie periodické funkcie a je známych mnoho trikov ako s nimi efektívne narábať. Jednoducho sa derivujú a integrujú, sú to slušné, ohraničené, analytické funkcie definované na celej číselnej osi. Ale ešte kľúčovejšie je, že sa jedná o **vlastné funkcie Laplaciánu v kartézskych súradniciach**. Laplacián sa vyskytuje v mnohých rovniciach popisujúcich významné procesy v prírode (a často má problém translačnú symetriu ktorá volá po použití kartézskych súradníc). Vlastné funkcie sa pri pôsobení Laplaciánom len preškálujú svojou vlastnou hodnotou, teda z derivovania sa efektívne stáva násobenie. Vymeniť **diferenciálne rovnice za algebraické** je vo všeobecnosti veľmi výhodný ťah.

Osobitou výhodou je **dostupnosť týchto kvalít aj pre ostatné funkcie** v nasledujúcom zmysle: Obvykle máme dočinenia s doménami, na ktorých je Laplacián hermitovský a jeho vlastné funkcie tam tvoria **úplný systém**. Teda dajú sa nimi vyjadriť všetky relevantné funkcie ako nejaká ich suma. Výhodu "derivácia zľavnená na násobenie"tak možno rozšíriť aj na ne (aj keď niekedy za cenu rozsiahleho sumovania nekonečných radov), aspoň v prípade, keď sa jedná o **lineárne diferenciálne rovnice** (kde diferenciálne operátory dungujú na sumách "distributívne").

Algoritmus Fourierovho rozvoja/transformácie si pre úplnosť uvedieme aj tu, hoci je známy a možno ho nájsť v takmer každej učebnici základnej analýzy. (Počet rozličných normovacích a označovacích konvencií sa blíži k počtu spomínaných učebníc, a nie je vylúčené jeho presiahnutie. Záležitosť Fourieriových radov je posiata rozličnosťou konvencií a mohla by byť štandardnou odvykacou kúrou pre ľudí príliš sa spoliehajúcich na automatické preberanie formuliek a vizuálnu pamäť.) Často sa však stáva, osobitne na technických školách, že algoritmus je naozaj len mechnickým návodom, napriek názornosti myšlienky čo je za ním. Práve na túto názornosť by sme sa tu mali sústrediť. Možno si pritom tiež rozšíriť chápanie notoricky známych operácií vo vektorovom priestore, ujasniť si rolu laplaciánu v známych lineárnych parciálnych diferenciálnych rovniciach, oceniť služby komplexnej roviny aj pre reálne problémy, a nazrieť do matematickej stránky toľko spomínaného "princípu neurčitosti"z kvantovej mechaniky.

Vektor nemusí byť šípka

Rozkladanie funkcie do Fourierovských zložiek je analogické **rozkladu vektora do bázových komponent**. Prísne vzaté nie len analogické, je to špeciálny prípad takej procedúry. Vektory sú síce poväčšinou predstavované ako nejaké orientované smerové šípky, ale to, čo tieto reprezentujú, je len jedna z mnohých realizácií pojmu vektora. Na otázku, čo je vektor, je vhodné odpovedať "**prvok vektorového priestoru**". Nejde o žiadne pseudovtipné vyhlásenie. Vektor je vzťahové označenie - nevyhnutne v sebe nesie **vzťah k ostatným prvkom svojho druhu** a bez nich "vektorovosť"nemá zmysel. Je to čosi podobné ako povedať o niekom že je "brat nevyhnutne vyvstáva jeho vzťah k nejakej rodine, bez ktorej taká identifikácia nemá zmyslu. Teda vektor je prvok vektorového priestoru, čo je akási rodina vektorov. Na to, aby sa nejaká skupina objektov kvalifikovala na vektorový priestor (nad nejakým poľom, odkiaľ sa berú koeficienty lineárnej trasformácie - napr. reálne či komplexné čísla), musí spĺňať isté predpoklady. Ich plnú korektnú formuláciu možno nájsť v korektných matematických príručkách, tu si uveďme tie, ktoré budú teraz pre nás kľúčové:

- ak nejaký prvok patrí do vektorového priestoru, tak tam patrí aj každý jeho skalárny násobok
- ak dva vektory patria do tohto priestoru, potom aj ich lineárna kombinácia tam patrí
- patrí tam nulový vektor, s vlastnosťou že jeho pripočítanie k ľubovoľnému členovi tohto člena neznemí
- ku každému členovi prislúcha aj opačný, v zmysle že ich súčet je nulový vektor
- sčítavanie je komutatívne a asociatívne
- násobenie skalárom je distributívne, komutatívne, asociatívne

Samozrejme "šípkové vektory"sa kvalifikujú podľa týchto pravidiel, ale zďaleka nie len ony. Aj polynómy konečného stupňa, so sčítaním a násobením chápanými najintuitívnejším spôsobom ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$) tvoria vektorový priestor. Podobne matice či samotné reálne čísla, alebo ohraničené funkcie, po častiach hladké a s konečným počtom nespojitostí na každom konečnom intervale. Trieda funkcií rozvinuteľných do Fourierovho radu alebo transformovateľných Fourierovou transformáciou tiež tvorí vektorový priestor. (Čitateľ je povzbudený skontrolovať každú požiadavku pre aspoň niektoré tieto rodiny, prípadne si naštudovať literatúru pojednávajúcu o rozšírení nielen pojmu vektorového priestoru, ale aj mnohých operácií, ktoré sa často považujú sa synonymné svojej základoškolskej reprezentácii.)

Naše príklady vektorových priestorov uvedené vyššie majú všetky **lineárnu štruktúru**, ale sa veľmi líšia nielen povahou svojich objektov, ale aj ich počtom či spočítateľnosťou. Toto súvisí s **bázou** daného priestoru. Každú maticu $n \times n$ vieme napísať ako konečnú kombináciu n^2 "bázových matíc"(trebárs typu "všade nuly, okrem i,j-teho miesta"). Báza môže mať mnoho členov, ale je konečná. Polynómy konečného stupňa však majú bázu pozostávajúcu z nekonečného počtu prvkov (polynóm n+1 stupňa totiž nijako nezapíšeme ako lineárnu kombináciu nižšch polynómov - a počet stupňov menších ako nekonečno je nekonečný). Taká báza je však aspoň spočítateľná (v zmysle v akom sú spočítateľné prirodzené čísla). Mnohé rodiny funkcií majú nespočítateľnú bázu.

Nekonečnosť bázy by nás však nemala odradiť. Je pravda, že v konečnorozmerných vektorových priestoroch (napríklad prípad "známych"geometrických vektorov ako ich poznajú deti v škole) jeden z dôvodov, prečo sa báza zavádza, je práve ekonomickosť - je výhodné mať niekoľko vektorov pomocou ktorých vieme vyjadriť nekonečne veľa iných. V prípade **nekonečnorozmerných vektorových priestorov** máme bázu s nekonečným počtom prvkov, pomocou ktorej vieme vyjadriť nekonečne veľa iných - ale "nie je nekonečno ako nekonečno". Navyše, bázové vektory volíme čo najvýhodnejšie - počet prvkov nebol jediný dôvod, prečo vôbec zavádzať bázy.

Ukážme si, ako veľmi sa metódy z lineárnej algebry dajú preniesť aj do vektorových priestorov periodických funkcií. Táto partia sa týka rozvoja do Fourierových radov. Prípad Fourierovej transformácie, čo je zovšeobecnenie metódy na neperiodické funkcie (resp. funkcie s nekonečnou periódou), sa potom pomerne hladko pripojí.

Skalárny súčin nie je len pravidlo pre násobenie komponent

Pripomeňme najprv, ako to bolo v lineárnej algebre: Zvolila sa báza, niekoľko význačných vektorov. Počet zodpovedal rozmeru priestoru, teda v 2D dva vektory, v 3D tri - nie viac, nie menej. Pri priveľa vektoroch by bol rozklad nejednoznačný, pri primálo by nebol vždy možný. Okrem **správneho počtu prvkov bázy** bolo potrebné, aby boli **nezávislé**. Teda žiaden z nich nesmel byť lineárnou kombináciou ostatných. Osobitne žiaden z nich nesmel byť nulový vektor. Potom nasledovali ešte ďalšie požiadavky na bázu, tieto ale boli viac vecou pohodlia ako nutnosti. Bázové prvky boli obvykle volené kolmé a s jednotkovou veľkosťou. Tu sa však treba trochu zastaviť. Ak v nejakom vektorovom priestore máme možnosť hovoriť o **veľkosti vektorov** a ich vzájomných **uhloch**, potrebujeme nejakú **štruktúru navyše**, samotná, minimálna lineárna výbava vektorového priestoru na zadefinovanie pojmov dĺžky a uhla nestačí. Potrebujeme **skalárny súčin**, operáciu kompatibilnú s lineárnou štruktúrou, pomocou ktorej spomenuté pojmy možno zaviesť. Ak dĺžky a uhly patria k základným geometrickým pojmom, potom v definícii skalárneho súčinu na danom priestore je vlastne vyjadrená geometria tohto priestoru. Je to hlbšia téma než je vhodné otvárať v poznámke "pomimo", ale treba to spomenúť. Pripomenieme si tu vlastnosti skalárneho súčinu, a potom si spomenieme jeho realizáciu v euklidovskej geometrii - s vedomím, že euklidovskosť geometrie je zakódovaná práve spôsobom, akým tam skalárny súčin funguje.

- ako argumenty (vstupné dáta) berie dva vektory a ako hodnotu dá číslo $\vec{v}.\vec{u}$
- je symetrický $\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}$
- v oboch vstupoch je lineárny, teda $(\alpha\vec{v} = \beta\vec{u}).\vec{w} = \alpha\vec{v}.\vec{w} + \beta\vec{u}.\vec{w}$
- je nedegenerovaný v zmysle $\vec{v}.\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Disponujúc takýmto nástrojom, dĺžka vektora bola definovaná ako

$$v = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} \tag{1}$$

a uhol dvoch vektorov ako

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{uv} \tag{2}$$

Naproti tomu mnemotechnická pomôcka "sčítania súčinu po zložkách", teda algoritmus výpočtu

$$\vec{u}.\vec{v} = v_1 u_1 + \ ...,\ v_n u_n$$

je až dôsledkom výberu bázy a správania sa bázových vektorov ohľadne skalárneho súčinu. Nech bázové vektory $\vec{e}_i$ (teda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, kde spodný index[1] neoznačuje komponentu, ale celý bázový vektor v i-tom smere) sú jednotkové, v smere súradných osí, a nech pre ich vzájomné skalárne súčiny máme (v euklidovskej geometrii):

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{3}$$

Potom platí, že komponenty vektorov voči takejto báze sa pri skalárnom súčine kombinujú podľa známeho pravidla. K jeho jednoduchosti prispieva, že množstvo členov pri roznásobovaní je nulových.

$$\vec{v}.\vec{u} = v^i \vec{e}_i . u^j \vec{e}_j = v^i u^j \delta_{ij} = v^i u^i \tag{4}$$

[1] V nasledujúcom budeme čoraz častejšie využívať indexovú notáciu, zíde sa už pri troch rozmeroch (a čo potom pri nekonečných!).

Skalárny súčin sa dá použiť aj na **extrahovanie zložky vektora** v smere niektorého prvku bázy. I-tu komponentu (i-ty koeficient z lineárnej kombinácie bázových vektorov, ktorou je vektor vyjadrený) dostaneme ako súčin nášho vektora $\vec{v}$ s i-tym bázovým vektorom $\vec{e}_i$

$$v^i = \vec{v}\,.\,\vec{e}_i = v^j\vec{e}_j\,.\,\vec{e}_i = v^j\delta_{ij} = v^i \tag{5}$$

Tu to vyzerá natoľko samozrejme že je až podivné sa s tým zapodievať, ale práve jednoduché veci treba mať rozpísané do jednoduchých detailov, ak máme v pláne hľadať analógie či zovšeobecňovať.

Rozklad do Fourierovho radu

Presuňme sa k ďalšiemu vektorovému priestoru, stále sa obzerajúc na analógiu z lineárnej algebry. Vezmime priestor **periodických funkcií** reálnej premennej t, s periódou T (samozrejme to nemusí byť najmenšia perióda, funkcia s periódou $T/100$ má aj periódu T), ktoré spĺňajú tzv. Dirichletove podmienky: integrál z absolútnej hodnoty za periódu je konečný, v rámci jednej periódy je konečne veľa maxím, miním a nespojitostí (a každá nespojitosť je konečná). Toto je široká trieda funkcií, zahŕňajúca modely všakovakých dejov a signálov s ktorými sa stretávame v technike a fyzike. Je ťažko si vôbec predsatviť, ako by sa dal vyrobiť signál, ktorého matematický model by nespĺňal Dirichletove podmienky. Mimochodom, aj funkcie obmedzené na konečký interval sa dajú "rozšíriť", v zmysle že na zvyšok osi umiestnime periodicky ich kópie. Tieto funkcie tvoria **vektorový priestor**. Naozaj, lineárna kombinácia dvoch takých funkcií je stále periodická a dirichletovská, identická nula hrá rolu nulového vektora, a záporne vzatá funkcia rolu opačného vektora. Operácie súčtu a násobenia skalárom sa samozrejme myslia "pobodovo", teda pod lineárnou kombináciou funkcií f, g s konštantnými koeficientami α, β rozumieme funkciu $\alpha f + \beta g$ ktorej predpis (pôsobenia na premennú t) je chápaný ako

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$$

Tento priestor funkcií môžeme dokonca vybaviť **skalárnym súčinom**. Potrebujeme predpis, ktorý dvom našim vektorom-funkciám priradí číslo, pričom bude spĺňať požiadavky symetrie, bilinearity a nedegenerovanosti. Integrál cez jednu periódu tieto požiadavky spĺňa:

$$f.g = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)g(t) \tag{6}$$

symetria
$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)g(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, g(t)f(t)$$

nedegenerovanosť
$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f^2(t) = 0 \to \quad f(t) = 0$$

linearita
$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)(\alpha g(t) + \beta h(t)) = \alpha \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)g(t)dt \,+\, \beta \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)h(t)dt$$

Keďže sa Fourierove rady, ku ktorým tu smerujeme, často používajú na **analýzu signálov** majúcich priebeh v čase, a pod periódou sa myslí naozaj nejaký časový úsek, je množstvo terminológie a označení prispôsobené práve časovej tematike. Nemal by však byť problém "preložiť"si potrebné veci na iné situácie, keď sa trebárs jedná o periodickosť v priestore a pod. Hranice integrálov ovedené vyššie sú tiež do iste miery vecoui konvencie - je potrebné integrovať cez celú periódu, ale pokiaľ funkcia nemá nejako ohraničený definičný obor, môžeme integrovať od 0 po T, alebo od $-T/2$ po $T/2$, alebo od $T/3$ po $4T/3$ atď.

Teraz k báze. Náš priestor funkcií je nekonečnorozmerný, počet prvkov bázy bude tiež nekonečno. Mala by to byť nekonečne početná rodina funkcií jednak nezávislých, úplná v zmysle že všetko ostatná sa dá vyjadriť pomocou nich, a podľa možnosti v nejakom zmysle jednoduchých, vzájomne kolmých (teda s nulovým skalárnym súčinom), a s jednotkovou veľkosťou, Všetko toto spĺňajú **vlastné funkcie operátora druhej derivácie**, sínusy a kosínusy s periódou rovnou T/n pre nejaké celé n.

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega_n t) = -\omega_n^2 \sin(\omega_n t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega_n t) = -\omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

Pre skrátenie označenia budeme používať pojem **frekvencie**[2]

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Môžeme ich v prípade potrebny preškálovať vhodným faktorom zabezpečujúcim jednotkovú veľkosť (pod veľkosťou tu samozrejme rozumieme odmocninu zo skalárneho súčinu vektora samého zo sebou).

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(\omega_n t)\sin(\omega_m t) = \frac{T}{2}\delta_{mn} \quad m,n \neq 0 \tag{7}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_n t)\cos(\omega_m t) = \frac{T}{2}\delta_{mn} \quad m,n \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos 0 \cos 0 = T$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_n t)\sin(\omega_m t) = 0$$

Ako vidno, veľkosť našich bázových funkcií je $\sqrt{\frac{2}{T}}$ pre prípady $\omega_n \neq 0$ a $\sqrt{\frac{1}{T}}$ pre prípad $\omega_n = 0$. Teda ortonormálnu bázu, nekonečnorozmerný analóg vektorov $\vec{e}_i$ z lineárnej algebry, tvorí systém normalizovaných "**harmoník**"

$$\sqrt{\frac{2}{T}}, \qquad \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(\omega_n t), \qquad \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(\omega_n t)$$

[2]Tu tiež môže nastať trocha zmätku. Pod slovom frkvencia sa často myslí prevrátená hodnoty periódy, teda naša ω je 2π krát väčšia. To sa niekedy rieši pomenovaním ω uhlovou frekvenciou, a niekedy uhlovou rýchlosťou. To následne vyvoláva otázky prečo sa vôbec nejaký uhol spomína, keď sa modeluje systém kde sa nič netočí (hoci v abstraktnom zmysle to zmysel má aj tam...). Vyriešime to tu nazvaním ω frekvenciou a vyzvaním čitateľa, aby vždy čítal kontext.

Veľmi často sa však narába s nenormalizovanou bázou, teda len s 1, $\cos(\omega_n t)$, $\sin(\omega_n t)$, aby sa do rozvojov neťahali už od začiatku normalizačné faktory (všimnime si, že funkcia $f = 1$ nie je "jednotková"!). Samozrejme, ony sa potom objavia inde. Znova vec konvencie a dôvod byť v strehu. Poďme teraz nájsť analóg **rozvoja vektora do bázových zložiek** $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$. S pohľadom na našu bázu to bude

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t) \tag{8}$$

$f(t)$ je analógom $\vec{v}$, harmoniky sú analógom $\vec{e}_i$, a koeficienty a_0, a_n, b_n sú analógmi komponent v^i. Faktor 1/2 pri nultom člene je zas vec konvencie, je tu zaradený v preferencii oproti jeho objaveniu sa inde.

Nájdime teraz analóg vzťahu (5), teda spôsob, ako **nájsť komponenty** $f(t)$ voči našej báze. V lineárnej algebre sa postupovalo **vynásobením vektora tým prvkom bázy, ktorého zastúpenie v rozvoji sme hľadali**. To predsa vieme urobiť aj tu, len nezabudime, že skalárne násobenie tu zahŕňa aj preintegrovanie cez periódu. Nájdime postupne koeficienty a_0, a_n, b_n, tie hovoria o zastúpení $\cos 0$, $\cos(\omega_n t)$, $\sin(\omega_n t)$ v rozvoji $f(t)$. Teda vynásobme rozvoj (8) postupne $\cos 0$, $\cos(\omega_m t)$, $\sin(\omega_m t)$ (treba dávať pozor na použitie iného indexu ako "hluchého"sumačného) a preintegrujme cez periódu T, berúc pritom do úvahy vzťahy medzi samotnými bázovými funkciami (7).

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \cos 0 = \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos 0 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = \frac{a_0}{2} T$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \cos(\omega_m t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_m t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = a_n \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \sin(\omega_m t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(\omega_m t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right) = b_n \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

Teda predpis pre koeficienty v rozvoji (8) je

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \cos(\omega_m t) \tag{9}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \sin(\omega_m t)$$

Platí pre $n = 0, 1, 2....$ Jednotnosť predpisu aj pre nultý koeficient je dôvodom, prečo bol v (8) definovaný s faktorom 1/2.

Diferenciálne za algebraické

Diferenciálne rovnice, a parciálne osobitne, nemajú vo všeobecnosti nejaký algoritmus na riešenie, ako tomu bolo trebárs pri kvadratických či kubických rovniciach. Niektoré metódy fungujú na niektoré rovnice. Mať niekoľko trikov v zásobe môže veľmi pomôcť. Previesť **diferenciálnu rovnicu**

na algebraickú, alebo aspoň nahradiť niektoré derivácie algebraickými operáciami, znamená veľmi často prísť bližšie k riešeniu. Tu sa sústredíme na **lineárne rovnice**, našťastie veľa dôležitých patrí do takej kategórie. Fourierovská báza funkcií tu má široké použitie. Mnohé dôležité rovnice zahŕňajú **laplacián** (sumu druhých derivácií podľa priestorových premenných, v jednom rozmere jednoducho druhú deriváciu). Druhá derivácia funguje na svojich **vlastných funkciách** (harmonikách) ako **jednoduché preškálovanie vlastnou hodnotou**. Keďže často pracujeme na doménach, kde tvoria **vlastné funkcie laplaciánu úplný systém**, je vcelku dobrá nádej, že **rozkladom neznámej funkcie do fourierovskej bázy prevedieme aspoň časť "diferenciálnosti"na " algebraickosť"**.

Ukážeme si to na príklade rovnice vedenia tepla a vlnovej rovnice, v 1 priestorovom a 1 časovom rozmere. Povedzme, že skúmame šírenie tepla pozdĺž tyče (popisuje rovnica vedenia tepla), alebo ustálený tepelný stav na tyči (limitný prípad vedenia tepla, popisuje Laplaceova rovnica), alebo kmity takej tyče (popisuje vlnová rovnica). Všetky tri zahŕňajú laplacián (v 1 rozmere druhá derivácia podľa "priestorovej premennej"), takže vlastné funkcie laplaciánu na tejto oblasti budú hrať významnú rolu. Vo všetkých troch prípadoch si predstavme, že skúmame oblasť na úsečke $0 \leq x \leq L$ v čase $0 \leq xt$. Povedzme, že máme zadané všetky okrajové podmienky aj počiatočné podmienky. Postup je v princípe rovnaký všade:

Treba nájsť vlastné funcie laplaciánu na danej oblasti, spĺňajúce okrajové podmienky. Zostaviť z nich "Ansatz", teda navrhnúť hľadané riešenie rovnice ako ich kombináciu. Naše hľadané riešenie rovnice je síce funkcia definovaná len na malej časti osi x, môžeme z nej urobiť periodickú funkciu jednoducho tak, že jej hodnotu na zvyšku osi definujeme periodicky. Pokiaľ máme úplný systém vlastných funkcií, hľadaná funkcia sa bude dať v každom okamihu vyjadriť ako nejaká ich kombinácia - a tento rozvoj ju bude verne reprezentovať na úseku osi x, na ktorom je definovaná, čo nám stačí. Je namieste očakávať, že v rôznych okamihoch pôjde o rôznu kombináciu. Táto závislosť na čase však znamená akurát to, že rozvojové koeficienty a_n, b_n, aj keď konštantné v priestore, budú závislé od času, teda máme $a_n(t)$, $b_n(t)$. Aby sme zistili, ako konkrétne od času závisia, dosadíme náš "Ansatz"do rovnice - priestorové derivácie sa už prejavia len ako algebraické násobenie, a časové derivácie nám poskytnú diferenciálnu rovnicu pre $a_n(t)$, $b_n(t)$. Teda sme sa nezbavili všetkého derivovania, ale aj výmena parciálnej diferenciálnej rovnice za obyčajnú nie je málo. Rovnice pre $a_n(t)$, $b_n(t)$ nám ich vo všeobecnosti neurčia jednoznačne, ostanú nejaké voľné parametre (už naozaj konštanty, v čase aj priestore). Tie potom ešte dopočítame z počiatočných podmienok.

Ak tieto kroky zneli príliš abstraktne, konkrétne príklady by mali pomôcť ten dojem vyliečiť.

Vedenie tepla a Fourierova transformácia

Skúmajme model **šírenia tepla**[3] pozdĺž nejakej jednorozmernej oblasti. Môžeme si predstaviť dlhú tyč. Neznáma funkcia $u(x,t)$ bude predstavuje **teplotu**, meniacu sa pozdĺž tyče a v čase. Okrajové podmienky budú v tomto príklade volené tak, aby modelovali situáciu, keď sú konce tyče udržiavané na stabilnej teplote, rovnakej na oboch koncoch. Samozrejme je to len špeciálny prípad. Počiatočná podmienka (jedna, keďže rovnica je prvého rádu v čase) nám zadá rozloženie teploty na začiatku. Koeficient D je parametrom systému, súvisí s vodivosťou, je mierou "priechodnosti"pre teplo. Rovnica samotná nám dáva do súvisu laplacián funkcie Δu (v jednom rozmere je to len druhá derivácia podľa priestorovej premennej, ktorú budeme skrátene značiť u_{xx}), teda mieru nerovnomernosti priestorového rozloženia teploty, s časovou zmenou $\partial_t u$ (ktorú budeme skrátene značiť u_t).

Čím viac sa v nejakom bode líši funkčná hodnota (teplota) od priemeru susedných (mierou tejto odchýlky od priemeru v okolí je laplacián), tým prudšia časová zmena

[3]Tento model popisuje aj difúziu látky v rozpúšťadle. Prenos tepla možno chápať ako "difúziu energie".

sa v danom bode dá očakávať. S klesajúcou hodnotou Δu, teda **s klesajúcou odchýlkou od priemernosti, klesá aj časová zmena**. Keď je $\Delta u = 0$, je aj $\partial_t u = 0$, inými slovami, časový vývoj sa skončil a nastal **rovnovážny stav** - všetko **spriemerované** nakoľko okrajové podmienky umožňujú. Toto všetko sa v matematike zapíše stručne ako

$$D\,u_{xx} \;=\; u_t \tag{10}$$

$$0 \le x \le L \;\; \text{okrajové podmienky } u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$0 \le t \;\; \text{počiatočné podmienky } u(x,0) = f(x)$$

Táto rovnice je veľmi známa a je viac spôsobov ako s ňou zaobchádzať. Tu ju použijeme na ilustráciu použitia fourierovských rozkladov. Na výsledku je pekne vidieť "priemerovacia tendencia"časového vývoja daného laplaciánom.

Najprv nájdime vlastné funkcie operátora druhej derivácie, spĺňajúce dané okrajové podmienky, teda hľadáme rodinu funkcií

$$f_k(x) : \partial_{xx} f_k = -\lambda_k^2 f_k, \quad f_k(0) = f_k(L) = 0$$

kde vlastnú hodnotu sme zvolili v tvare, ktorý nám neskôr bude pohodlnejší na manipuláciu (asi netreba predstierať, že netušíme, že sa bude jednať o sínusy a kosínusy, a reálna exponenta neprichádza do úvahy pre nemožnosť splniť okrajové podmienky)

$$f_k(x) = \alpha \cos(\lambda x) + \beta \sin(\lambda x)$$

Okrajová podmienka $f_k(0) = 0$ nám z hry vyradí kosínus, a okrajová podmienka $f_k(L) = 0$ nám obmedzí (pokvantuje, a to sme ani klasickú fyziku neopustili) možné vlastné hodnoty:

$$\sin(\lambda L) = 0 \quad \longrightarrow \lambda = \frac{\pi k}{L}, \quad k \text{ celé číslo}$$

Teda máme bázu

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Našu hľadanú funkciu $u(x,t)$ a jej derivácie vyjadríme ako kombináciu vlastných funkcií laplaciánu, s koeficientami závislými od času:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, \frac{\pi k}{L} \cos\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} c_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice máme

$$-D \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} c_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

$$-D \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 c_k(t) = \frac{d}{dt} c_k(t)$$

$$c_k(t) = B_k e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}$$

Teda naše riešenie má formu

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{11}$$

Koeficienty A_k sú zatiaľ neurčené konštanty, voči priestoru aj času, a zistíme ich z počiatočnej podmienky:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Teda koeficienty B_k sú práve koeficienty fourierovského rozkladu[4] funkcie $f(x)$, zadanej ako popis priestorového rozloženia teploty na začiatku! A tieto už vieme ako sa hľadajú:

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} \, f(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{12}$$

Napríklad ak $f(x) = c$ (na počiatku rovnaká teplota c na celej tyči) a potom by sme tyč pripojili k rezervoáru s nulovou teplotou na oboch koncoch, koeficienty by boli $4c/k\pi$ pre nepárne k, 0 pre párne k.)

Konečne máme teda riešenie rovnice vedenia tepla (10) pre naše počiatočné a okrajové podmienky:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L d\tilde{x} \, f(\tilde{x}) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right) e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{13}$$

Všimnime si podrobnejšie tento rad, a osobitne **časový vývoj jednotlivých harmoník**. Každá je násobená faktorom exponenciálne klesajúcim s časom. Tempo poklesu je ovplyvňované koeficientom D, ktorý je spoločný všetkým harmonikám, ale v exponente vystupuje aj k^2, ktoré je pre rôzne harmoniky rôzne. **Vyššie, viac oscilujúce harmoniky (ktorých rozdelenie funkčných hodnôt má ďaleko od rovnomerného) majú exponenciálne-kvadraticky silnejší pokles ako tie miernejšie**. K-ta fourierovská zložka aj s jej časovo závislým faktorom je predsa vlastnou funkciou laplaciánu aj prvej časovej derivácie, s tou istou vlastnou hodnotou úmernou k^2

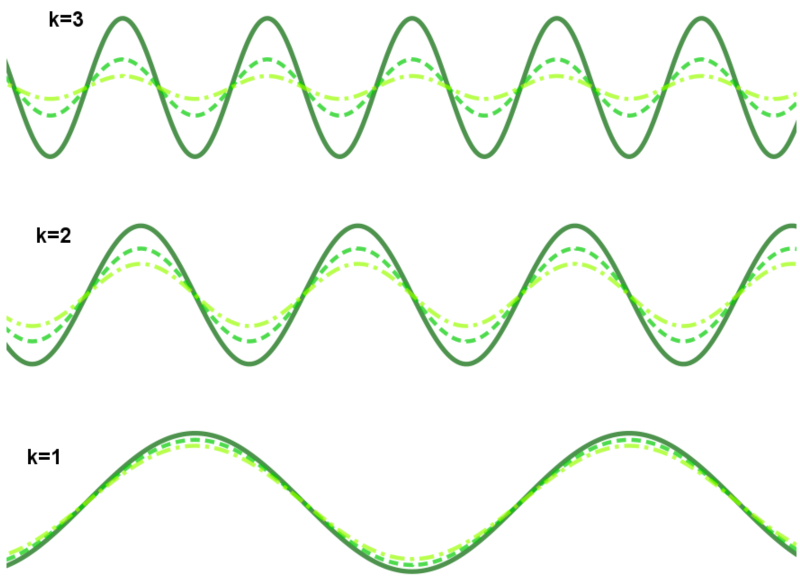
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin(\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{k\pi x}{L}\right)^2 e^{-D\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

[4] Integračnú premennú nazveme $\tilde{x}$ namiesto tradičného x, lebo o chvíľu budeme výraz dosádzať do vyjadrenia hľadaného riešenia $u(x,t)$, kde už x vystupuje ako voľná premenná. Nesluší sa (a prináša problémy) volať v jednom výraze voľné a presumované alebo preintegrované premenné rovnako.

To dobre súhlasí s bežnou skúsenosťou rozptylu tepla - **nerovnomernejšie rozdelenia majú tendenciu vyrovnať sa rýchlešie**.

Na obrázku je znázornený časový útlm pre prvé tri harmoniky. Volili sme tu pre jednoduchosť $L = \pi$, $D = 0,1$ a znázornené sú momentky pre počiatočný čas (plné čiary), a časy o jednotku (prerušované čiara) a dve jednotky (bodkočiarkované krivky) neskôr ($t = 0, 1, 2$). Všetkým harmonikám sme dali počiatočné amplitúdy rovné jednej, vo všeobecnosti samozrejme závisia od počiatočného rozloženia daného podmienkou $u(x, 0) = f(x)$.



Obr. 1: Pri časovom vývoji danom laplaciánom sa nerovnomernejšie rozdelenia vyrovnávajú rýchlejším tempom

To dobre súhlasí s bežnou skúsenosťou rozptylu tepla - **nerovnomernejšie rozdelenia majú tendenciu vyrovnať sa rýchlešie**.

Obr. 2: Parciálne diferenciálne rovnice a dilemy v kuchyni

Tu je aj odpoveď na "problém cestovín, omáčky a čakania na syr". Máme veľkú studenú kuchyňu, uvarené cestoviny teploty kuchyne, horúcu omáčku (ale sporák už vypnutý), a zabudli sme nastrúhať syr. To nám bude trvať nejaký čas. Za predpokladu, že chceme kompletné jedlo dostať na stôl čím teplejšie, čo je lepšie: Zmiešať omáčku a cestoviny a ísť strúhať syr, alebo nechať ich separátne, kým syr nenastrúhame? Podľa našej rovnice bude v prípade separátnej omáčky rozdiel medzi ňou a okolím veľký a teplo z nej unikne rýchlo. V prípade zmiešaných cestovín a omáčky je menší rozdiel medzi teplotou zmiešaného jedla a okolia, teda teplotná výmena bude prebiehať pomalšie. Samozrejme teplo z omáčky odovzdané cestovinám nepovažujeme za stratené. (Tento model nepočíta so stratou molekúl, ktoré sa deje vyparovaním z povrchu (čo tiež odnáša teplo) - dostupný povrch môže byť pri zmiešaní iný. Presnejší model by mal zahŕňat aj takéto morfologické prvky.)

Rovnica vedenia tepla hovorí aj o **tepelnej rovnováhe**[5] - v tejto sa **časový vývoj sa skončil**, teda $u_t = 0$. Podľa našej rovnice to nastáva práve vtedy, keď je aj $\Delta u = 0$, teda keď je **teplota rozložená rovnomerne, v zmysle že každý bod má teplotu ako priemer teplôt susedných bodov**. Pri našich okrajových podmienkach -oba konce tyče udržiavané na rovnakej teplote - to samozrejme môže vo finále znamenať len to, že každý bod tyče bude mať práve tú teplotu. Pre iné okrajové podmienky by sa mohla ustáliť teplota inak - ale tak, že priemer teplôt u susedov dáva teplotu v danom bode.

Vlnenie a Fourierova transformácia

Skúmajme **model vĺn** na ohraničenej jednorozmernej oblasti, podľa našich okrajových podmienok by sa mohlo jednať o strunu ochytenú na oboch koncoch. Hľadané riešenie $u(x,t)$ predstavuje **výchylku z rovnovážnej polohy**. v je zatiaľ len parameter systému, ale sugestívne nazvaný tak, aby potom vystihoval interpretáciu. Počiatočné podmienky (dve, keďže rovnica je druhého rádu v čase) nám popisujú polohy a rýchlosti častí struny na začiatku. Táto rovnica tiež zaŕňa laplacián, teda bude súvisieť s mierou nerovnomernosti výchyliek v jednotlivých častiach struny. Na rozdiel od rovnice vedenia tepla však táto nerovnomernosť nie je úmerná prvej časovej derivácii, teda nie je mierou časovej zmeny ("rýchlosti"). V tomto prípade nerovnomernosť rozloženia výchyliek v priestore je úmerná druhej časovej derivácii, teda je mierou "zrýchlenia". Rozdiel v časovom vývoji je potom markantne iný než bol v prípade vedenia tepla. Tam sa priestorovo veľmi odlišne zohriate časti veľmi rýchlo vyrovnávali a s klesajúcou hodnotou Δu klesala aj miera zmeny v čase $\partial_t u$. **Pri vlnení však veľmi odlišne vychýlené (relatívne k priemeru susedov) časti budú akurát veľmi rýchlo meniť svoj pohyb.** Zrýchlenie je zmena pohybu-rýchlosti. **Nulový rozdiel od priemeru susedov tak neznamená zastavenie, len nulové zrýchlenie - a zotrvačnosť prenesie kmitajúci bod cez tento rovnovážny bod**, až do opačnej maximálnej výchylky, kde zas naberie dosť veľké zrýchlenie na opačnú cestu atď... Stručne sa to zapíše ako

$$v^2 u_x x = u_t \tag{14}$$

$$\begin{aligned} 0 \le x \le L \quad & \text{okrajové podmienky } u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ 0 \le t \quad & \text{počiatočné podmienky } u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = h(x) \end{aligned}$$

Aj túto rovnicu použijeme na ilustráciu použitia Fourierovských rozkladov. Dá sa potom na výsledku pekne vidieť "miera oscilácií"daná laplaciánom.

Vlastné funkcie operátora druhej derivácie, spĺňajúce nulové okrajové podmienky, sme už našli v prípade rovnice vedenia tepla, kde sa z priestorovej častzi jednalo o rovnaký problém. Teda

[5] vtedy sa redukuje na Laplaceovu rovnicu $\Delta u = 0$

máme bázu

$$f_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Našu hľadanú funkciu $u(x,t)$ a jej derivácie opäť vyjadríme ako kombináciu vlastných funkcií laplaciánu, s koeficientami závislými od času.

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\frac{\pi k}{L}\cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2\,\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}c_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2}c_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

Po dosadení do pôvodnej diferenciálnej rovnice máme vednoduchú rovnicu pre koeficienty $c_k(t)$

$$-v^2\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2\,\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2}c_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

$$-v^2\,\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2\,c_k(t)\;=\;\frac{d^2}{dt^2}c_k(t)$$

$$c_k(t) = A_k\cos\left(\frac{\pi k v}{L}t\right)\;+\;B_k\sin\left(\frac{\pi k v}{L}t\right)$$

Teda naše riešenie má formu

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\left(\frac{\pi k v}{L}t\right)\;+\;B_k\sin\left(\frac{\pi k v}{L}t\right)\right]\,\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{15}$$

Koeficienty A_k, B_k sú zatiaľ neurčené konštanty, voči priestoru aj času, a zistíme ich z počiatočných podmienok (ako vidno, boli nutné dve):

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$h(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi k v}{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Teda koeficienty A_k sú práve koeficienty fourierovského rozkladu funkcie $f(x)$, zadanej ako popis priestorového rozloženia výchyliek z rovnováhy, a koeficienty B_k sú (modulo faktor $\pi k v/L$) koeficienty fourierovského rozkladu funkcie $h(x)$, zadanej ako popis priestorového počiatočných rýchlostí častí struny.:

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L d\tilde{x}\, f(\tilde{x})\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{16}$$

$$B_k = \frac{L}{\pi k v}\frac{2}{L}\int_0^L d\tilde{x}\, h(\tilde{x})\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Tieto veci sú už známe, keďže $f(x)$, $h(x)$ pokladáme za zadané. Napríklad v prípade, že v čase nula boli všetky body struny v rovnovážnej polohe (s nulovou výchylkou), sú nulové všetky A_k. Naproti tomi v prípade, že boli na počiatku všetky body v pokoji (s nulovou počiatočnou rýchlosťou), sú nulové všetky B_k. Samozrejme ak boli na počiatku všetky body struny aj v rovnovážnej polohe aj v pokoji, je trvalo nulové všetko, čo je tiež (hraničný) prípad kmitania, v klasickej mechanike prípustný (kvantová by nedovolila také počiatočné podmienky a teda ani také riešenie).

Pozrime sa teraz na **časový vývoj jednotlivých "priestorových harmoník"**. Každá je prenásobená kombináciou sínusov a kosínusov, ktoré **oscilujú s frekvenciou úmernou** k. Amplitúda týchto oscilácií pritom od času nezávisí. Teda priestorovo "divokejšie", **vyššie harmoniky kmitajú aj v čase s vyššou frekvenciou, ale neutlnujú sa z periódy na periódu** sa ako tomu bolo pri rovnici vedenia tepla. Tak to je, keď laplacián (ktorý je pre vyššie priestorové harmoniky veľký), udáva mieru zmeny pohybu, teda zrýchlenia, ako káže vlnová rovnica.

Upravme ešte naše riešenie pomocou súčtových vzorcov pre sínus a kosínus:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{L}(x+vt)\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{L}(x-vt)\right)\right] + \tag{17}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi k}{L}(x+vt)\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{L}(x-vt)\right)\right]$$

Tento tvar je omnoho **symetrickejší voči premenným x a t**, a lepšie tak ladí s vlnovou rovnicou, ktorej jedna z najnápadnejších čŕt je práve takáto symetria (druhá derivácia podľa času je úmerná druhej derivácii podľa polohy). Zároveň nám pomáha ineterpretovať riešenie vlnovej rovnice. Vezmime si trebárs funkciu $\sin(x - vt)$. Vidíme, že závisí od špecifickej kombinácie x a t, že s rozmerovej analýzy parameter v musí mať rozmer rýchlosti, a že ak $\sin(x - vt)$ predstavuje trebárs vlnu šíriacu sa nejakým médiom, je v práve rýchlosť, ktorou sa musíme pohybovať médiom v kladnom smere my, ak chceme vidieť stále tú istú výchylku (lebo nám ostal tá istá hodnota argumentu - fázy $x - vt$). Inými slovami v je **rýchlosť šíriacej sa vlny**. Podobnou úvahou dospejeme k tomu, že $\sin(x + vt)$ popisuje vlnu šíriacu sa opačným smerom rýchlosťou rovnakej veľkosti. Veľmi podobne pre kosínus, ktorý je len posunutý sínus. V našom riešení (17) je ku každej doprava sa šíriacej vlne pripočítaná doľava sa šíriaca vlna s rovnakou amplitúdou. Takto vznikajú **stojaté vlny**, ktoré sa v bežnom zmysle slova "nešíria". Pri strune upevnenej na oboch koncoch to azda príliš neprekvapuje, aspoň hudobníkov s príslušnými nástrojmi nie. Spomeňme ešte krátko

Obr. 3: stojaté vlny

aj "naozaj cestujúce vlny" trebárs v nejakom médiu, a upozornime, že v, rýchlosť ich postupu priestorom, nie je rýchlosťou kmitajúcich častíc média. Rýchlosť týchto je daná hodnotou u_t, a vo všeobecnosti sa pre daný bod mení s časom. (Pri stojatých vlnách, ktoré sa (ako súčet oproto sebe sa šíriacich vĺn) efektívne "nešíria", však máme aj üzly", ktoré majú trvalo nulovú výchylku aj rýchlosť). Nedorozumenie ohľadne rýchlostí azda nastáva aj pre bežnú asociáciu vlnenie - rieka. Tam sa však skladá aj posun média ako celku aj kmitavý pohyb jeho častíc, preto je pri znázorňovaní samotnej vlnovej rovnice vhodné predstaviť si ako príklad trebárs obilné pole vo vetre - obilím sa šíria vlny, ale ich pohyb nie je totožný s pohybom jednotlivých klasov. Tie napokon (pri bežnom vetre) neopúšťajú svoje miesto na poli, kým vlna sa šíri naprieč ním.

Obr. 4: Rýchlosť kmitania klasov nie je rýchlosťou vlny postupujúcej obilím.

Skratky medzi reálnymi faktami vedú cez komplexnú rovinu.

Ťažko prehliadnuť, že naše výpočty v tejto partii matematiky zahŕňajú integrovanie sínusov a kosínusov. Nie je to nič zložité, nakoniec tieto funkcie sa derivujú a integrujú ako jedny z najľahších. Ale existuje ich kombinácia, ktorá ich aj v tomto smere tromfne - exponenciálna funkcia. Stojí to vstup do komplexnej roviny, ale napodiv taký krok často skracuje cestu aj pri reálnych problémoch. Pomôžeme si známou Eulerovou formulkou, podľa ktorej sínus a kosínus, a exponenciálna funkcia spolu súvisia ako

$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i\sin(\omega_n t)$$

$$e^{-i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i\sin(\omega_n t)$$

$$\sin(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$$

Teda vlastné funkcie druhej derivácie, alebo jednorozmerného laplaciánu, sa dajú zvoliť ako

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega_n t} = -\omega_n^2 e^{i\omega_n t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega_n t} = -\omega_n^2 e^{-i\omega_n t}$$

Komplexnosť nás nemá čo odrádzať, vhodne zvolenými tiež komplexnými koeficientami sa aj z komplexnej bázy dajú vyskladať reálne funkcie. Akurát treba vhodne zovšeobecniť skalárny súčin. Stále to bude integrál cez periódu, ale uvedomme si jednu vec - ak ho necháme ako je, mnohé komplexné funkcie budu mať podľa neho komplexnú veľkosť. To nie je niečo, čo by sme chceli interpretovať, preto skalárny súčin definujeme ako integrál cez jednu periódu zo súčinu funkcie a komplexne združenej funkcie

$$f.g = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) g^*(t) \tag{18}$$

a zovšeobecníme pravidlo o symetrii v skalárnom súčine nasledovne:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) g^*(t) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt\, g(t) f^*(t) \right)^* \tag{19}$$

Hviezdička značí komplexné združenie. Pre reálne funkcie sa zovšeobecnenie zredukuje na staré pravidlo, keďže vtedy $f^* = f$.

Skontrolujme teda s takto prispôsobeným súčinom ortogonálnosť našej bázy.

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_m t} = \delta_{mn} T \tag{20}$$

Rozvoj v takejto báze sa dá napísať veľmi kompaktne ako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \tag{21}$$

Sumácia je teraz aj cez záporné n, čiže pre také formálne pripúštame "záporné frekvencie"$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. To je však len mýto, ktoré treba zaplatiť, keď si skracujeme cestu komplexnou rovinou. Jednoduchým rozpísaním sumy a použitím Eulerovej formulky dostávame vzťahy medzi "sínus-kosínusovýmiä " exponentovými"koeficientami.

$$a_n = c_n + c_{-n} \tag{22}$$

$$b_n = i\,(c_n - c_{-n})$$

Pre reálne funkcie musia byť a_n, b_n reálne, čo je splnené ak $c_{-n} = c^*$. Koeficienty v (21) získame ako predtým - zo skalárnych súčinov našej funkcie a bázových vektorov, a zvážením vzťahov medzi bázovými vektormi:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i\omega_m t} f(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i\omega_m t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} = L c_n \delta_{mn}$$

Pre neskoršie účely si ešte uvedomme, že susedné frekvencie sa od seba líšia nasledovne:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n == \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T} \tag{23}$$

teda že môžeme písať

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Potom pre koeficienty platí jednoducho

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i\omega_m t} f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{-i\omega_m t} f(t) \tag{24}$$

a pre rozklad funkcie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau\, e^{-i\omega_m \tau} f(\tau) \right) e^{i\omega_n t} \tag{25}$$

Integračná premenná bola premenovaná tak, aby sa neplietla s voľnou premennou vo zvyšku sumy.

Ešte pár slov k interpretácii koeficientov. **Veľkosť koeficientu $|c_n| = \sqrt{c_n^* c_n}$ patriacemu k n-tej bázovej funkcii (harmonike) a frekvencii ω_n nám hovorí, ako veľmi je táto zastúpená** v "recepte"na výrobu $f(t)$. Ak je niektorý koeficient nulový, daná frekvencia tam vôbec nie je zastúpená. Zastúpenie jednotlivých frekvencií v signáloch, priebehoch napätí vo vodičoch, periodických otrasoch systémov a pod. má veľký význam, pretože súvisí s odpoveďou takých systémov na vonkajšie impulzy s danými frekvenciami. **Rezonančné javy sa vyskytujú naprieč fyzikou a technickýcmi vedami a Fourierov rozklad nám pomáha odhadnúť kritické frekvencie, pri ktorých môžu nastať.**

Fourierova transformácia

Doteraz sme o perióde T predpokladali že je **konečná**, teda že spektrum frekvencií ω_n je **diskrétne**, pričom "susedné"frekvencie sa od seba líšia o konečný inetrval $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ak však uvažujeme **neperiodické funkcie, alebo funkcie s nekonečnou periódou** $T \to \infty$, potom sa **rozdiel medzi susednými frekvenciami** $\Delta\omega$ **stáva infinitezimálne malým** a z rozvoja (25) sa stáva integrál (čo je "suma cez nekonečne malé nekonečne blízke prírastky spojitej premennej").

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-T/2}^{T/2} d\tau \, e^{-i\omega_m \tau} \, f(\tau) \right) e^{i\omega t} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \, e^{-i\omega_m \tau} \, f(\tau) \right) e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t}$$

Objekt[6] $\tilde{f}$ hrá rolu analogickú tej, ktorú malo c_n z rozvoja periodických funkcií, keď bolo spektrum diskrétne. Vtedy sme sčítavali cez n, alebo ekvivalentne ω_n, teraz integrujeme cez spojité ω.

Všimnime si, čo sme dostali. Tak ako bol vektoru z lineárnej algebry jednoznačne priradený konečný súbor koeficientov v^i voči báze $\vec{e}_i$, tak ako bol periodickej funkcii jednoznačne priradený nekonečný, ale spočítateľný súbor koeficientov c_n voči báze $e^{i\omega_n t}$, tak je teraz **aj vo všeobecnosti neperiodickej funkcii jednoznačne priradený objekt** $\tilde{f}$**, ktorý ju reprezentuje v báze** $e^{i\omega t}$. Tento objekt - dá sa naň pozerať ako na (vo všeobecnosti) nespočítateľný súbor koeficientov - sa volá **Fourierov obraz** danej funkcie. Podobne ako sa zo zložiek dal vyskladať vektor a z vektora dali extrahovať zložky, aj Fourierova transformácia je v tomto zmysle vratná, existuje k nej **inverzná**:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \tilde{f}(\omega) \, e^{i\omega t} \tag{27}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) \, e^{-i\omega t}$$

Dvojica $f(t)$, $\tilde{f}(\omega)$ je "**fourierovsky združená**" a v literatúre možno nájsť tabuľky takýchto dvojíc. Doplnenie takých tabuliek o ďalšie riadky alebo overenie už existujúcich je vecou spočítavania integrálov typu (27) pre konkrétne funkcie.

Princíp neurčitosti

Všetky fourierovské dvojice sa vyznačujú "princípom neurčitosti": **čím je jedna z dvojice viac lokalizovaná vo svojej premennej, tým menej je vo svojej premennej lokalizovaná druhá z dvojice**.Pre intuitívne pochopenie princípov neurčitosti pre niektoré "**komplementárne**

[6] Rozdelenie koeficientov $1/\sqrt{2\pi}$ je opäť vecou konvencie. Tu je volená tak, aby transformácia medzi funkciou a jej Fourierovským obrazom bola čo najsymetrickejšia. Iné konvencie majú tiež svoje dôvody (niekedy azda tradíciu a niekedy záhadnejšie príčiny). Aj samotné označenie fourierovského obrazu podlieha náladám, vkusu a životnej histórii autorov. Niekde sa používa pôvodný symbol funkcie s vlnovkou, niekde sa použije iný font, niekde sa pridá nejaká iná ozdoba... poznáme dril. Treba čítať kontext, nie písmená.

premenné"sú k dispozícii aj veľmi klasické ukážky. Predstavme si, že k nám prichádza nejaký signál s istou frekvenciou, napríklad vlny rozbíjajúce sa o pobrežie. Ak chceme veľmi presne poznať zastúpené frekvencie (môže sa ich skladať viacero), treba na brehu pobudnúť dostatočne dlho. Rozhodne dlhšie ako najdlhšia zastúpená perióda deja (a vopred nemusíme vedieť ako dlho to je!). Teda ak presnejšie "lokalizujeme"zastúpené frekvencie, potom časová lokalizácia signálu je príslušne dlhšia. Ak na brehu postojíme len krátko, časová lokalizácia toho, čo sme pozorovali, je pomerne presná. Ale zas nemáme istotu o frekvenciách, ktoré sme nemohli zachytiť, keďže zodpovedali periódam dlhším než naše pozorovanie.

Obr. 5: Princíp neurčitosti na pláži

Fourierovské dvojice nemusia reprezentovať len čas a frekvenciu. Taká interpretácia je veľmi častá (mnohokrát sa naozaj jedná o modely procesov prebiehajúcich v čase), ale netreba sa na ňu nezdravo naviazať. Napríklad **v kvantovej mechanike sú podobným spôsobom združené poloha a hybnosť**.

Ukážeme si aspoň príklad prejavu známeho princípu nerčitosti viažuceho tieto dva pojmy. Z kvantovej mechaniky pritom nemusíme vedieť veľa, pre ilustráciu toho, čo chceme ukázať, stačí nasledujúci rýchlokurz. Treba vziať na vedomie, že **poloha a hybnosť súvisia v kvantovej mechanike s operátormi** pôsobiacimi na nejaké objekty. Týmto objektom sa hovorí **vlnové funkcie**, predstavujú v nejakom zmysle **stav skúmaného systému**. Môžu byť definované na **hybnostnom priestore** ("p-reprezentácia") alebo **konfiguračnom priestore** ("x-reprezentácia"), pričom sú to rovnocenné možnosti.

Pri **x-reprezentácii** si azda možno o niečo ľahšie namýšľať názornosť, býva v prvých kontaktoch s kvantovou mechanikou spomínaná viac. V tejto variante predstavujú vlnové funkcie $\psi(x)$ **amplitúdu pravdepodobnosti**, že konfigurácia x je obsadená (trebárs časticou ktorá tvorí skúmaný systém). Amplitúdu pravdepodobnosti treba chápať ako "komplexnú odmocninu z pravdepodobnosti", v zmysle: $|\psi|^2$ predstavuje **hustotu pravdepodobnosti**, a táto hustota vynásobená objemovým elementom priestoru(na akom je funkcia definovaná) dáva pravdepodobnosť, že v tom elemente sa naša častica nájde. Kým hustota pravdepodobnosti je reálna, amplitúda môže byť komplexná. Spomíname tu len jeden priestorový a jeden hybnostný rozmer, situácia sa samozrejme dá zovčeobecniť.

Operátor polohy $\hat{x}$ je v x-reprezentácii jednoducho násobenie x, a operátor hybnosti $\hat{p}$ derivovanie podľa x, modulo slávne konštanty (Planckova redukovaná konštanta a imaginárna jednotka).

Z rozličných dôvodov (stručnosť na istých miestach je jedným z nich) sa často zavádza veličina $k = \frac{p}{\hbar}$. Teda p a k sa líšia len prenásobením Planckovou konštantou, ktorú možno vhodnou voľbou jednotiek položiť rovnú jednej.

$$\hat{x}\,\psi(x) = x\,\psi(x)$$
$$\hat{p}\,\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\,\psi(x)$$

Keďže sa jedná o operátory, má zmysel hovoriť o ich **vlastných hodnotách** (to je vlastne jedna z mála možností ako operátoru priradiť číslo, teda niečo porovnateľné s výsledkami meraní). Vlastné funkcie operátora zodpovedajú stavom systému s "presnou hodnotou"veličiny, ktorú operátor predstavuje. Teda v tomto prípade, **vlastné funkcie operátora hybnosti zodpovedajú stavom s presne určenou hybnosťou**. Nie je ťažké ich nájsť, sú to komplexné "rovinné vlny. Majú ostrú hodnotu hybnosti, ale ako sa na sínus a kosínus patrí, nemajú žiadnu preferovanú časť osi x. Častica popísaná takým stavom môže byť **kdekoľvek**.

$$e^{ipx/\hbar} = e^{ikx}$$

Tu x je premenná a k fixný parameter pre daný stav. **Vlastné funkcie hybnosti tvoria v x-reprezentácii úplný systém** a možno ich teda použiť ako bázu. Teda všetky ostatné stavy v x-reprezentácii možno písať ako

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\,\tilde{\psi}(k) \tag{28}$$

$\tilde{\psi}(k)$ je fourierovský obraz $\psi(x)$, teda spojitý analóg komponent $\psi(x)$ voči báze e^{ikx}. Inverzná trnasformácia je

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\,\psi(x) \tag{29}$$

Veľmi podobný proces možno urobiť pre **p-reprezentáciu** (resp k- reprezentáciu). Vlnová funkcia $\phi(p)$ v p-reprezentácii predstavuje **amplitúdu pravdepodobnosti** v hybnostnom priestore. Operátor hybnosti $\hat{p}$ v p-reprezentácii má podobu obyčajného násobenia p a operátor polohy $\hat{x}$ podobu derivácie podľa p, modulo slávne konštanty (Planckova redukovaná konštanta a imaginárna jednotka a jedno mínus oproti analogickej situácii v x- reprezentácii):

$$\hat{p}\,\phi(p) = p\,\phi(p)$$
$$\hat{x}\,\phi(p) = i\hbar\,\frac{d}{dp}\,\phi(p)$$

V tomto prípade, **vlastné funkcie operátora polohy zodpovedajú stavom s presne určenou polohou**. Také stavy však nemajú však žiaden preferovaný úsek na p-osi, teda **ich hybnosť môže byť akákoľvek**.

$$e^{-ipx/\hbar} = e^{-ikx}$$

Tu k je premenná a x fixný parameter pre daný stav. **Vlastné funkcie polohy tvoria v p-preprezentácii úplný systém** a možno ich teda použiť ako bázu pre všetky ostatné stavy v p-reprezentácii. Ale veď práve taký rozvoj predstavuje (29)!
$\psi(x)$ je je fourierovský obraz funkcie $\tilde{\psi}(k)$, teda spojitý analóg komponent $\tilde{\psi}(k)$ voči báze e^{-ikx}.

Teda k a x tvoria fourierovky komplementárne premenné.

Už bolo spomenuté, že bázové stavy x - reprezentácie (e^{ikx}, kde x je premenná a k fixný parameter pre daný stav) majú určitú hybnosť celkom neurčitú polohu, a bázové stavy p-reprezentácie (e^{-ikx}, kde k je premenná a x fixný parameter pre daný stav) určitú polohu a celkom neistú hybnosť. Takéto stavy samy osebe však nepredsatvujú reálne častice. Čo by sme tým vôbec mysleli. Reálne objekty zrejme budú môcť byť popisované nejakými kombináciami - polohu nepoznáme celkom presne, ale dosť na to, aby sa v nejakom zmysle dala spomínať, podobne s hybnosťou.

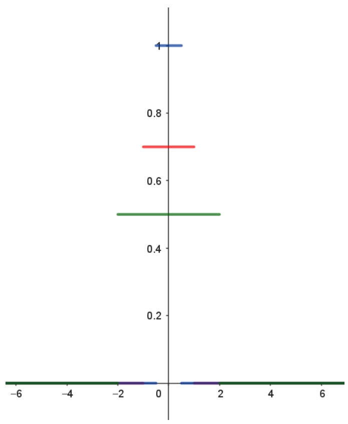
Vyskúšajme, ako spolu hrajú naše komplementárne prmenné pre nejaký takýto konkrétny stav. Nech $\psi(x)$ popisuje stav častice v konfiguračnom priestore, a nech je to častica viazaná na úsečku dĺžky $2a$. Povedzme že tam je celkom voľná (teda máme rovnaký potenciál na celej úsečke, a rovnakú pravdepodobnostnú amplitúdu pre všetky body úsečky) - ale mimo nej nemôže ísť (nekonečný potenciál mimo úsečky, amplitúda nulová). Z normovacích príčin (pravdepodobnosť nájsť časticu niekde na úsečke má byť rovná 1) bude amplitúda na úsečke mať veľkosť $\sqrt{1/2a}$).

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{1/2a} & -a \leq x \leq a \\ &= 0 & (x < -a) \ \cup \ (x > a) \end{aligned}$$

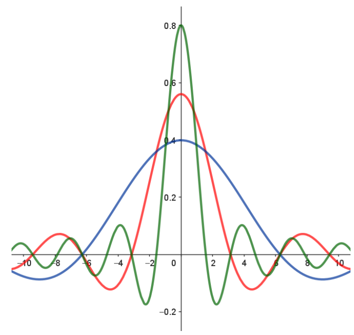
Pozrime sa na jej fourierovský obraz - teda na mieru zastúpenia hybností:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{2\pi} \int_{-a}^{a} dx e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dx \left[\cos(kx) - i\sin(kx)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ka)}{k} \end{aligned}$$

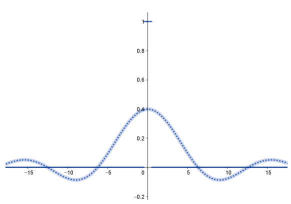
Niekoľko prípadov je ukázaných nižie x- reprezentácie ukazujú lokalizáciu v konfiguračnom priestore na úsečkách rôznych dĺžok (a=1, 1/2, 2), k-reprezentácie ukazujú lokalizáciu v hybnostnom priestore.
Tá istá situácia, len teraz sú konfiguračný a hybnostný priestor superimponované na seba: pre plné čiary treba chápať vodorovnú os ako konfiguračný priestor, pre bodkované línie ako hybnostný.



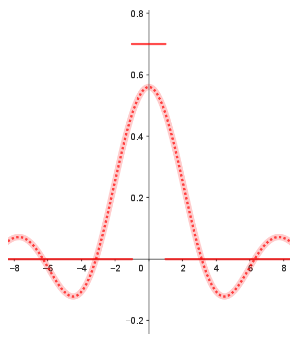
Obr. 6: lokalizácia v x-priestore



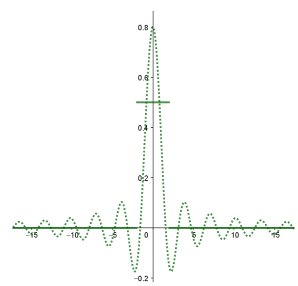
Obr. 7: lokalizácia v k-priestore



Obr. 8: jama a=0,5



Obr. 9: jama a=1



Obr. 10: jama a=2

This project No. 2259/02/01 has received funding from the European Union´s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 945478.