ELEKTROMAGNETIZMUS

História

Dnes už deti na základnej škole vedia odrecitovať poučku o svetle ako elektromagnetickom vlnení. Že však elektrina a magnetizmus patria do jedného prívlastku, a že by niečo mali mať so svetlom, nebolo zrejmé ešte nejaké dve storočia dozadu. Dokonca ešte dve desaťročia po uverejnení Maxwellovej práce z roku 1865, zhŕňujúcej mnohé experimentálne aj deduktívne nazbierané aspekty elektromagnetizmu, bolo treba namáhavo hľadať po vtedajších univerzitách ľudí, ktorí by teórii rozumeli alebo aspoň v nej videli niečo hodné pozornosti. Môže to mať dočinenia s Maxwellovou prezentáciou - v čase vydania jeho práce bola písaná zložitých formalizmom, primatematickým pre fyzikov a prifyzikálnym pre matematikov. Po úspechu Newtonovskej mechnaniky bola snaha vysvetľovať a vizualizovať všetko cez mechanické sily medzi nejakými objektami, reprezentované s napätiami a tlakmi v nejakom médiu. Úporne pretrvávajúca predstava svetlonosného éteru ako bežného média s množstvom mechanických vlastností, ktoré bolo zložité až nemožné zmieriť s experimentálnymi dátami, navádzala ľudí hľadať zložité vizualizácie toho, čo rovnice predstavovali. Navyše, Maxwell sa ukázal ako skromný človek, a keď mal možnosť hovoriť o svojej práci pred rozsiahlym publikom, spomenul ju len okrajovo, na konci svojej prednášky venovanej inému modelu, referujúc ten svoj ako *inú teóriu elektriny, ktorá sa mu páči.* Notácia neveľmi priateľská bežnému užívateľovi matematiky tiež nepomohla. Ľudia citliví viac na rýchle závery a vonkajší rozruch ako na hĺbku ju potom ľahko prehliadli.

Črty a kontakty

Súbor základných rovníc klasického elektromagnetizmu sa volá po Maxwellovi, pričom jednotlivé časti nesú iné mená - po Maxwellovi je vlastne priamo pomenovaný len jeden člen v jednej z nich. Prečo teda súbor nesie jeho meno? Gaussov zákon pre elektrické a magnetické pole, Ampérov zákon pre prúdy a Faradayov zákon pre indukciu boli známe pred Maxwellovou prácou, ale ním dodaný člen (Maxwellov posuvný prúd) ich zošil konzistentne dokopy. Pri spätnom pohľade mohla byť vodítkom snaha o symetriu medzi elektrickým a magnetickým poľom alebo konzistentnosť s rovnicou kontuinuity. Každopádne, po zahrnutí sa ukázala nielen nezničiteľnosť elektrického náboja a nerozlučnosť elektriny a magnetizmu, ale aj ich súvis so svetlom. Ešte poznamenajme, že Maxwellove rovnice sú pri troche oboznámenia sa s vektorovou analýzou jednoduché a názorné v ich dnešnej formulácii, ale táto elegancia je ťažšie badateľná v ich pôvodnom vyjadrení (1865, A dynamical theory of the electromagnetic field), kde boli zákony v nich skryté rozpísané do cca 20 rovníc (nie nezávislých). Nájdenie jednoduchšieho formalizmu pre dané účely si žiada niekoho, kto je ochotný predrať sa divokejšou verziou, nestratiť zo zreteľa pointu, vyšliapať potom v divočine skratky a sprístupniť jednoduchú pointu masám. Tu to bola do značnej miery zásluha Olivera Heavisida, Josiaha Willarda Gibbsa and Heinricha Hertza.

Maxwellovým rovniciam sa treba venovať jednotlivo aj po skupinkách, pretože vzťahy medzi jenotlivými rovnicami sú porovnateľne dôležité ako každá z rovníc osobitne. Jedná sa o previazaný systém, ale jeho previazanosť bolo ťažké vidieť, kým sa skúmali len jednotlivé špeciálne prípady.

Upozornime na niekoľko výrazných čŕt týchto rovníc. Spomeňme aj veľmi stručne niektoré prepojenia na rozličné oblasti fyziky.

Poľnosť - máme tu **parciálne** diferenciálne rovnice, v newtonovskej mechnaike boli obyčajné. Aj v elektromagnetizme sa síce operuje s druhým Newtonovým zákonom v uvislosti s Lorenzovou silou, ale dynamika polí samotných je daná Maxwellovými rovnicami. Sú parciálne, **prvého rádu, lineárne**. Princíp superpozície teda môže hrať veľkú rolu, aj s tým súvisiaci rozpis riešení do vhodných bázových funkcií. Vlastné stavy význačných operátorov teda budú matematicky dôležité.

S poľnosťou súvisiaca **lokálnosť**. Pole tu už nie je len akási pomocná štruktúra, "sila na jednotkový náboj ktorý by hypoteticky mohol byť v danom mieste". Sú tu difeneciálne rovnice popisujúce dynamiku týchto polí, časový vývoj ich samých. Polia majú kapacitu niesť hybnosť a energiu. Ako také sú istým náznakom zbavenia sa "pôsobenia na diaľku", ktoré toľko znepokojovalo Newtona. Dva náboje interagujú s poľom vo svojom bezprostrednom okolí, táto interakcia sa poľom prenáša až k druhému náboju.

Sú tu isté prepojenia s kvantovou mechnaikou. Jedná sa o dvojvrstvový popis dejov. Rovnice hovoria o vývoji veličín - polí v prípade elektromagnetizmu či vlnovej funkcie v prípade kvantovej mechaniky - na ktoré nemáme taký priamy dosah ako na ich kvadráty. Ďalšou zo smeroviek je kvantovanie náboja. Podobne je to s vlastnosťami trvalých magnetov a stabilitou atómov. Toto všetko už síce nevyplýva z Maxwellových rovníc, ale to je práve jeden z náznakov, že teóriu treba rozšíriť.

Prepojenia s klasickou mechanikou sú jednak formou spomínanej Lorenzovej sily, ale veľmi výrazné sú aj analógie s mechanikou tekutín.

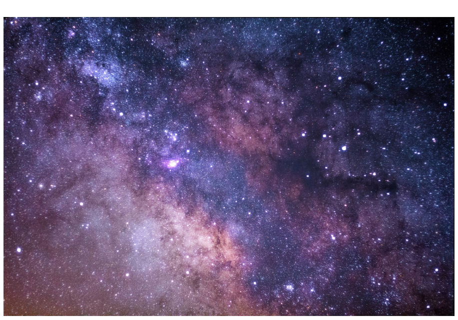
Prepojenie na špeciálnu relativitu je veľmi výrazné. Z Maxwellových rovníc nám vyplynie akási invariantná (voči inerciálne sa pohybujúcim pozorovateľom) rýchlosť, čosi o čom klasická mechanika nechyrovala. Závislosť rozdelenia elektromagnetického poľa na elektrickú a magnetickú časť je závislé od pozorovateľa. Veľmi to evokuje podobnú závislosť delenia časopriestorového intervalu na časovú a priestorovú zložku.

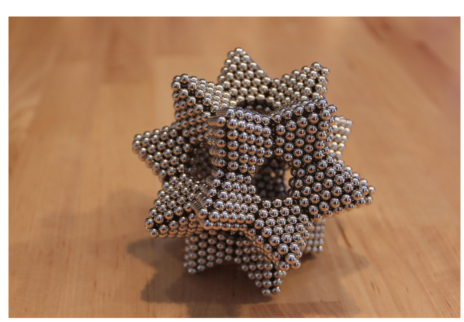
Jedna zo štyroch

Elektromagnetická interakcia je momentálne vnímaná ako jedna zo štyroch fundamentálnyhc síl v prírode. Do istej miery sa jej matematický model prepája s modelmi slabej a silnej interakcie, s týmto prepojením sú však spojené rozličné veľké " ale"kvantovej teórie poľa. S gravitáciou v einsteinovskom zmysle je ťažké (resp tak sa nám to javí teraz) prepojiť ktorúkoľvek z nich. Avšak podoba modelu klasického elektrostatického poľa s newtonovskou gravitáciou, spočívajúca v poklese intenzity poľa so štvorcom vzdialenosti od zdroja je veľmi nápadná, a bola takou dávno:

$$E_g = \kappa \frac{M}{r^2} \qquad\qquad E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Elektromagnetická interakcia voči gravitačnej veľmi výrazná v nasledujúcom zmysle: Už pár ťahmi hrebeňom vieme zo svojich vlasov nazbierať dosť náboja na to, aby sme kompenzovali gravitaťnú príťažlivosť celej zemegule. Podobne veľkú silu je možné vyvinúť obyčasjnou magnetkou ktorá drží nákupný zoznam na chladničke. Táto magnetka kompenzuje príťažlivosť celého zemského jadra, plášťa a všetkých oceánskych vôd... Napriek tomu však pohyb tejto zemegule a zvyšku slnečnej sústavy vyzerá byť podľa gravitačných povelov, nie elektromagnetických.





Obr. 1: Po troche, ale bez kontra-tendencií sa nazbierajú obrovské sily ako pravidlá tanca celých galaktických kôp. A aj veľké sily sa vedia efektívne stratiť v oblastiach, kde idú proti sebe.

Prečo? Kým "gravitačný náboj", ktorým sa častice angažujú v danom poli, má len jedno znamienko, elektrický má dve, aj magnet má dva póly. Gravitácia nevie byť odpudívá, elektromagnetická sila vie. Teda je možné ju kompenzovať, odtieniť, vyrušiť. Toto, spolu s nápadnou vyrovnanosťou kladného a záporného elektrického náboja, a s výskytom magnetických pólov len vo vyrovnaných pároch, je aj dôvodom, prečo na veľkých škálach vyhráva gravitácia.

Elektrický náboj

Mimochodom, prečo nehovoríme o magnetickom náboji? Veď elektromagnetizmus je už jedno slovo... Lepšia otázka by asi bola, prečo nehovoríme o elektromagnetickom náboji. Azda z lenivosti a tradície: Existenciu toho, čomu hovoríme elektrický náboj, a neexistenciu toho, čomu by sme hovorili magnetický náboj, možno chápať takto: Nepoznáme niečo, čo by vytváralo nami merateľné magnetické pole štýlom monopolu. Niečo, čo vytvára nami merateľné elektrické pole ako monopol, je to, čomu sa bežne hovorí elektrický náboj. Samozrejme dá sa nájsť elektrický dipól, ale magnetický monopól nie. Pritom však objekt nesúci elektrický náboj je zdrojom magnetického poľa. Ak sa náboj voči nám nepohybuje, necítime jeho magnetické pole našimi testovacími nabitými časticami (spin teraz nechajme bokom). Ale pohybujúci sa elektrický náboj *je* zdrojom elektromagnetického poľa. O magnetizme sa niekedy hovorí ako o relativistickom jave, lebo pohyb je relativistický pojem. Z makroskopického hľadiska teda môžeme takto zhruba hovoriť. Ale magnetizmus je aj kvantovomechanická vec (tu aspoň spomeňme ten vynechaný spin)- a elektrinaˇako vec s ním nerozlučne spojená teda tiež. Nepohybujúci sa elekrický náboj je len približný pojem, model, ktorý neobstojí, ak zahrnieme aj kvantovú mechaniku, princíp neurčitosti a spin elektrónu. Teda mohli by sme pokojne hovoriť o elektromagnetickom náboji, lebo nič vykazujúce elektrický náboj nie je celkom bez magnetických aspektov a opačne. Ak sa pohybujeme voči danej nabitej častici, cítime markantné "makroskopicky badateľné"magnetické pole. Ak aj sme v pokojovej sústave priemernej polohy ťažiska častice, stále ostáva jej spin, vnútorný moment hybnosti nerozlučne spätý s magnetickým momentom. (Tento môže byť kompenzovaný momentmi okolitých častíc, ale je tam.) A opačne, nič vykazujúce magnetické vlasntosti nie je bez elektriny. Aj neutrón má magnetický moment - a neutrón je elektricky neutrálny len ako celok, jeho kvarky sú elektricky nabité. (Náboj je kompenzovaný, ale je tam.)

Gravitačný, elektrický náboj a (ne)rovnomernosť rozdelenia

Ako je to s kvantovaním? Toto je vec, ktorú zatiaľ na gravitačných nábojoch - hmotách - nepozorujeme. Nezdá sa zatiaľ, že by všetky hmoty boli celočíslenými násobkom nejakej minimálnej jednotky. Tzv. Planckova hmota je na úrovni cca 20 mikrogramov. Atómy sú podstatne ľahšie. Najľahšie častice vyzerajú byť neutrína, ale nezdá sa, že by si vôbec udržiavali konzistentne svoj hmotnostný stav, a nemáme dôkazy o tom, že by ich "čisté hmotnosti"boli základnou jednotkou pre iné častice. Naproti tomu elektrický náboj, ak je naozaj prezícne zmeraný, sa ukazuje byť vždy celočíselný násobok elementárneho náboja elektrónu. Kvarky ako subnukleárne časti síce javia tretinové náboje, ale kvarky nikam nejdú bez takého doprovodu, ktorý dolňa celkový náboj v partii na celočíslený násobok základného. Pri elektrickom náboji ide naozaj o počet "kusov"vo vesmíre, a je namieste otázka, prečo je taký vyrovnaný. Vyzerá byť: ak by nebol, pozorovali by sme veľké odpudzovanie nielen na úrovni rovnako nabitých galaxií, ale aj ich rozpad (gravitácia by nevedela kompenzovať elektrické odpudzovanie). Dá sa azda namietnuť, že rovnováhu predsa netreba vysvetľovať, vysvetlenie žiada odchýlka z nej. V takom prípade však, prečo nie je náboj rovnomerne rozdelený na častice rovnakých hmotností? Prečo je väčšina záporného náboja v ľahkých elektrónoch a väčšina kladného náboja v ťažkých protónoch, namiesto varianty "koľko elektrónov, toľko (rovnako ťažkých) pozitrónov" a "koľko protónov, toľko (rovnako ťažkých) antiprotónov"? Toto je vlastne odnož otázky "prečo je viac hmoty ako antihmoty", so zdôraznením rovnomernosti a nerovnomernosti pre elektrický, gravitačný náboj a ích vzťah.

Plus mínus číselná os

Na náboj plus, mínus, neutrál sme už tak zvyknutí, že sa nad tým ani nepozastavujeme. Aký iný by mohol byť? Experimentálne to dávalo zmysel: V laboratóriu sa dali všelijako trieť a nabíjať predmety, a rozdeliť na tri kopy - označme ich A,B,C. V skupine A boli tie, čo na blízkosť ostatných (bez ohľadu na príslušnosť k A,B alebo C) nereagovali. V B boli tie, čo odpudzovali všetkých zo svojej skupiny (B) a priťahovali všetkých zo skupiny (A). V skupine C boli tie, čo odpudzovali všetkých zo svojej skupiny (C) a priťahovali všetkých z B. Nebolo potrebné vytvárať ďalšiu kategóriu, každé teleso v laboratóriu sa dalo zaradiť do jednej z týchto troch. Navyše, vhodnou kombináciou predmetov z B a C sa dali vytvoriť objekty patriace do A. Človek ani nemusí vedieť mnoho z algebry, aby videl vhodnosť pomenovať skupiny B,C ako kladné a záporné (alebo opačne, to je už vec konvencie a tradície) a skupinu A ako neutrálnu. Inými slovami, máme tu starú známu číselnú os s jej kladnou a zápornou časťou a nulou medzi nimi. Drvivá väčšina našich matematických modelov je spojená s číslenou osou. Celé, racionálne, reálne čísla... dokonca aj modely euklidovskej roviny či priestorov sú vyskladané ako vhodné kombinácie "nezávislých číselných osí". Možno mnohé úspechy vo fyzike máme skrz túto skutočnosť - že s elektrickým nábojom, ktorý vyzerá byť spojený s hmotou okolo nás veľmi fundamentálnym spôsobom, je práve nami používaný počítací systém tak explicitne konzistentný. Ak potrebujeme niečo vyvážiť, potrebujeme siahnuť vhodne ďalekon na opačnú stranu nášho počítadla. Ani neuvažujeme, že by bolo potrebné aj čosi iné. Ale pozrime sa predsa len na iné možnosti. Predstavme si klasické miešanie farieb v ľudskom videní. Ak bielu označíme ako neutrál, tak na kompenzáciu trebárs modrého vnemu nám treba siahnuť do dvoch ďalších "farebných smerov červeného a zeleného. To už nie je číslená os, ale akási číselná trojsmerka. Ľudské videnie je komplexná záležitosť a popísaná procedúra je len popisom akýchsi efektívnych javov. Ale v prírode sa napodiv vyskytuje druh náboja, ktorý funguje práve takto: Na to, aby sme niečo kompenzovali, netreba nevyhnutne pridať jeden öpačný"komplement, ale možno to urobiť aj tak, že pridáme dva iné komplementy. Je to tzv farebný náboj (názov pochádza práve z analógie ľudského vnímania farieb) kvarkov, subnukleárnych častíc. Na farebne neutrálnu kombináciu treba buď farebne neutrálnu časticu, alebo tri komplementárne farebné náboje...alebo farebný a antifarebný. Tu už analógia s videním farieb trochu zlyháva. Ale odhliadnuc od toho, tu je zábavná vec: Dva kvarky, modrý a antimodrý, sa líšia elektrickým nábojom! Ťažko to zobraziť. Je tu samozrejme pokušenie vziať euklidovský trojrozmerný priestor, s troma kolmými osami, každá majúca kladnú a zápornú časť, a skúsiť či skladanie 3D vektorov nebude dobrý model. Ale nie je to celkom to, čo skladanie farebných nábojov. Trojrozmerný vektor ťažko môže reprezentovať stav vo farebnom priestore, lebo dvomi kolmými vektormi v smere x a y nevieme kompenzovať vektor v smere z, kým dvomi "kolmými"nábojmi - modrým a zeleným - vieme vyvážiť červený. Ktovie, možno by sme sa mali dať na nejaké bytostne trojkové číselné modely aby bola fyzika jednoduchšia. Dá sa namietnuť, že veď na elektromagnetizmus stačia čísla ako ich obyčajne máme...nuž spomeňme si na zjednotenie elektriny a magnetizmu, a ako z neho na dôvažok vypadlo zjednotenie aj s optikou. Ktovie, či nájdenie modelu ústretového k elektrickému aj farebnému náboju nedá na dôvažok ešte čosi navyše?

Rovnice

Po toľkých rečiach napíšme konečne slávne Maxwellove rovnice. Píšeme ich tu ako vyzerajú vo vákuu (v zmysle nie v prostredí s vlastnou permitivitou a permeabilitou)

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dV \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

$$\tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \qquad \oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S} + \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S}$$

$$\tag{4}$$

Poďme ich rozobrať po jednej aj po skupinkách, povedať si o špeciálnych prípadoch a vzťahoch medzi rovnicami. Dvom vyjadreniam Maxwellových rovníc sa hovorí diferenciálny a integrálny tvar. Súvis medzi nimi je veľmi jasný, ak je jasná daná partia vektorovej analýzy (Gaussova a Stokesova veta). Ak tomu tak nie je, je doporučené konzultovať nejaký text o tom pojednávajúci.

Najprv si ujasnime notáciu. $\vec{E}$, $\vec{B}$ predstavujú vektorové polia - intenzitu elektrického poľa a magnetickú indukciu. Často budeme skrátene hovoriť o elektrickom a magnetickom poli. Jednotkou elektrickej intenzity je newton na coulomb alebo volt na meter, jednotkou magnetickej indukcie je tesla:

$$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

$$[\vec{B}] = \frac{1}{\mathrm{m\ s^{-1}}} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{m\ s^{-1}}} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \mathrm{T}$$

Veličina ρ predstavuje hustotu elektrického náboja (jednotkou je C m^{-3}), teda objemový integrál z nej predstavuje celkový náboj Q v danom objeme:

$$\iiint_V \rho dV = Q$$

Veličina $\vec{J}$ predstavuje plošnú hustotu prietoku náboja, náboj pretečený jenodtkou plochy za jednotku času (jednotka Cm^{-2}s^{-1} = Am^{-2}). Po preintegrovaní cez plochu teda získavame prúd tečúci skrz túto plochu:

$$\iint_S \vec{J}.d\vec{S} = I$$

Náboj Q a jeho prúd I spolu samozrejme súvisia. Keďže náboj celkovo nevzniká a nezaniká, len sa presúva, musí pri nenulovej bilancii toku z nejakého objemu V ohraničeného uzavretou plochou ∂V stúpať alebo klesať množstvo náboja dnu (stúpať ak viac prišlo ako vyšlo, klesať v opačnom prípade):

$$\oiint_{\partial V} \vec{J}.d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \tag{5}$$

Ak na tok $\vec{J}$ cez plochu použijeme Gaussovu vetu

$$\iiint_V \vec{\nabla}.\vec{J}dV = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

dostávame sa postupne k diferenciálnemu tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0 \tag{6}$$

Vzťah (6), resp. (5) predstavuje **rovnicu kontinuity, zákon zachovania elektrického náboja**.

Permeabilita μ je mierou magnetizácie prostredia pod vplyvom aplikovaného magnetického poľa. Je vlastnosťou materiálu vypĺňajúceho daný priestor a dá sa povedať, aj priestoru samotného. Táto vákuová časť závislosti sa označuje ako μ_0. Jednotkou je henry na meter, alebo newton na kvadrát ampéra. Celková permeabilita je potom súčin vákuovej a relatívnej (voči vákuu) $\mu = \mu_r\mu_0$. Pre vákuum potom $\mu_r = 1$. Permitivita ϵ je mierou polarizácie prostredia pod vplyvom aplikovaného elektrického poľa. Je vlastnosťou materiálu vypĺňajúceho daný priestor a priestoru samotného, pričom vákuová časť sa obvykle značí a ϵ_0 a podobne ako v prípade permeability, je celková permitivita súčinom vákuovej a relatívnej časti $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$. Jednotkou ϵ_0 je farad na meter, alebo coulomb na volt na meter. Tu sa budeme zaoberať len vákuovým prípadom.
Teraz si ujasnime integračné domény v integrálnej verzii Maxwellových rovníc. V zásade sa jedná o vzťahy integrálov cez nejaké domény a ich hranice a časovú zmenu týchto integrálov.Jednoduchý, dvojný alebo trojný integrál naznačuje rozmernosť domény, cez ktorú sa integruje. Krúžok na integrále symbolizuje uzavretosť integračnej oblasti, teda ide buď o integrál po uzavretej krivke ∂S ohraničujúcej otvorenú plochu S v prípade $\oint_{\partial S}$, alebo o integrál po uzavretej ploche ∂V ohraničujúcej nejaký objem V v prípade $\oiint_{\partial V}$. Označovať hranice uzatvárajúce nejakú oblasť Ω ako $\partial\Omega$ má svoju tradíciu a vcelku dobrý dôvod v teórii diferenciálnych foriem[1]. Skalárny súčin vektorového poľa a elementu krivky, napríklad $\vec{E}.d\vec{l}$, preintegrovaný pozdĺž uzavretej krivky, je mierou cirkulácie poľa $\vec{E}$, pozdĺž tejto krivky. Vektor $d\vec{l}$ si možno predstaviť ako infinitezimálne posunutie pozdĺž krivky. Pre infinitezimálne malú krivku dostávame rotáciu poľa $\vec{E}$ v bode predstavujúcom stred infinitezimálnej plochy ohraničenej spomínanou slučkou, násobenú skalárne touto plôškou:

$$\vec{E}.d\vec{l} = \vec{\nabla} \times \vec{E}.d\vec{S}$$

Skalárny súčin vektorového poľa a elementu plochy, napríklad $\vec{E}.d\vec{S}$, predstavuje tok touto plôškou. Nezabudnime, že vektor $d\vec{S}$ má smer normály na danú plochu [2] a tok poľa je najefektívnejší, ak ide rovnobežne s touto normálou, a nulový, ak tečie pozdĺž plochy, teda "vôbec nie cez ňu."Preintegrovaním po uzavretej ploche vlastne získavame bilanciu toku von a dnu - pre infinitezimálne malú plochu tak získavame divergenciu poľa v bode predstavujúcom stred infinitezimálneho objemu ktorý tá plocha ohraničuje, násobenú týmto objemom:

$$\vec{E}.d\vec{S} = \vec{\nabla}.\vec{E}dV$$

Toľko k značeniu, poďme si rozobrať Maxwellove rovnice aj po významovej stránke.

Gaussov zákon pre elektrické pole

pozrime bližšie na prvú rovnicu

$$\oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

[1] ktorá je doporúčaná na preštudovanie ako lepšia alternatíva v prípadoch, keď by človek vedel čas aj horšie zabiť (čo býva často!)

[2] Čo sa orientácie týka, je daná konvenciou: Ak sa jedná o uzavretú plochu, normála je kladná smerom von. Ak sa jedná o uzavretú plochu, potom smer normály súvisí s orientáciou ohraničujúcej krivky: Keď obiehame hranicu v smere hodinových ručičiek, orientácia normály je podľa pravidla pravej ruky.

Je to veľmi názorný zákon. Ak tok poľa z nejakej oblasti nie je vyvážený (celkovo nulový, teda koľko dnu, toľko von), potom tam musia byť nejaké pramene alebo pohlcovače, teda kladné alebo záporné náboje, a to v nevyváženim počte, aby zodpovedali za bilanciu toku [3]. Použitím Gaussovej vety o divergencii [4]

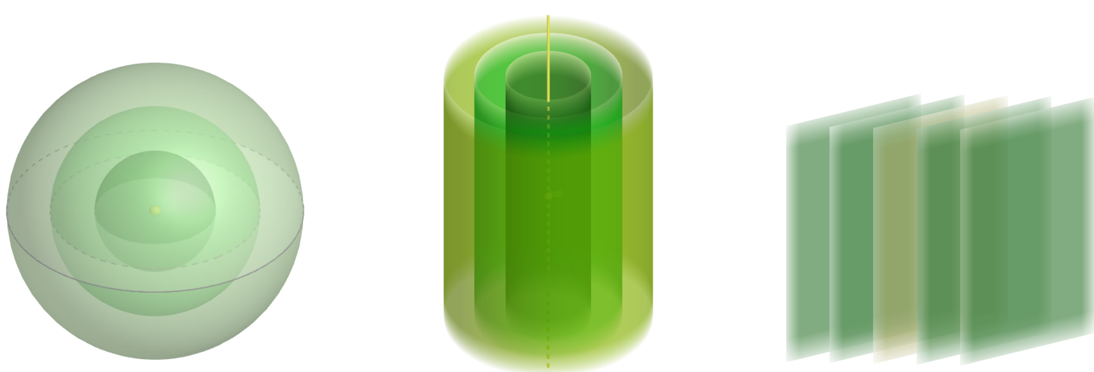
$$\oiint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{E} dV \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dostávame súvis divergencie a hustoty náboja, teda diferenciálnu verziu.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Prvá Maxwellova rovnica nám okrem iného hovorí, že existujú zdroje elektrického poľa, elektrické náboje. Nehovorí, že by v oblastiach bez nábojov bolo pole nevyhnutne nulové; v takých oblastiach je len nevyhnutne nulová divergencia tohto poľa. Pre oblasť s celkovo nulovým tokom cez jej hranicu nemusí nevyhnutne platiť, že tam žiadne náboje nie sú - len že je tam toľko kladného ako záporného náboja. Z grafického hľadiska prvá rovnica hovorí, že čiary znázorňujúce prúdnice tohto poľa majú svoje význačné počiatky (vychádzajú z kladných nábojov) aj konce (na záporných nábojoch).

Známy Coulombov zákon pre intenzitu elektrického poľa v okolí bodového náboja a jej pokles so štvorcom vzdialenosti je len špeciálnym prípadom prvej Maxwellovej rovnice. Podobne azda trochu menej známe vzťahy pre závislosť intenzity a vzdialenosti od nabitého dlhého drôtu a veľkej nabitej roviny (ideálne nekonečných rozmerov, aby sa mohla naplno využiť symetria toku v plošnom integrále). Tieto výpočty patria do bežných cvičení v štandardnom kurze elektromagnetizmu, tu eln upozornime, že charakter poklesu intenzity so vzdialenosťou sa dá vidieť ešte než sa človek pustí do integrovania:
V prípade bodového náboja sú triedami "rovnocenných bodov"koncentrické sféry, v prípade dlhého nabitého drôtu (priamky) koncentrické valce, a v prípade nabitej rozsiahlej roviny zas roviny s ňou rovnobežné. Veľkosť týchto tried ekvivalencie závisí od vzdialenosti nasledovne: sféry rastú s druhou mocninou vzdialenosti r^2, plášte valcov s prvou mocnicou vzdialenosti r, a rovnobežné roviny nemenia veľkosť. Tok elekrického poľa bodového náboja sa prerozdeľovaním na plochy rastúce ako r^2 riedi v opačnom pomere r^{-2}, tok poľa nábojov na priamke sa prerozdeľovaním na plochy rastúce ako r riedi v opačnom pomere r^{-1}, a tok nabitej roviny sa so vzdialenosťou nemení, lebo sa prerozdeľuje stále na rovnako veľké plochy.



Obr. 2: Pokles intenzity pre rozličné symetrické rozloženia nábojov

[3] V elektromagnetizme máme kladný a záporný náboj a je jasné, že jeden bude hrať úlohu prameňa a druhý "pohlcovača", teda že vektor intenzity bude orientovaný z jedného do druhého. Ktorý je ktorý je vec konvencie, a tá sa zaviedla tak, že z kladných nábojov elektrické pole vyteká a do záporných sa prepadá.

[4] Po Gaussovi sa toho volá toľko, že je lepšie trochu rozvinúť prívlastky.

Gaussov zákon pre magnetické pole

Naproti tomu obdobná rovnica pre magnetickú indukciu hovorí, že jej celkový tok cez ľubovoľnú uzavretú plochu je nulový.

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Použitím Gaussovej vety o divergencii

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla}.\vec{B}dV = 0$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Z grafického hľadiska, magnetické prúdnice (integrálne krivky magnetického poľa) sú vždy uzavreté samy do seba. Teda zdroje magnetického poľa, ak nejaké sú, sa nikdy nevyskytujú izolovane, ale vždy tak, aby dohromady pole malo všade nulovú divergenciu. Pohybujúci sa elektrický náboj je zdrojom magnetického poľa, ale je tu nevyhnutná dvojpólovosť, lebo ide odniekadiaľ niekam. Ak rozlomíme magnet s pólmi vzdialenými 10 cm, získalme dva magnety s pôlmi dvakrát bližšie pri sebe. A tak ďalej. Narážame tu však na zaujímavú otázku. Povedzme, že v matematike môžeme deliť nejakú úsečku do nekonečna. Ale magnety sú z atómov, a raz narazíme na posledný v rade. Kde je magnetizmus v atóme? Aj v atóme máme pohybujúci sa elektrický náboj, a jeho pohyb zodpovedá za časť magnetického momentu. Povedzme, že rozbijeme atóm na nukleóny a jednotlivé elektróny. Kde sú teraz póly magnetu? Kde sa berie magnetický moment samotného elektrónu? Magnetizmus nie je klasický jav, siaha do do kvantovej teórie a veľmi pravdepodobne za ňu. Keby si však boli Ampére, Maxwell, Faraday povedali, že nemá význam formulovať zákony elektromagnetizmu, kým nie je jasný mechanizmus vzniku zdrojov týchto polí, možno by sme doteraz nemali ani Maxwellove rovnice, ani relativitu, ani kvantovú mechaniku. Podobne Newton formuloval gravitačný zákon s tým, že si bol vedomý toho, že sa jedná o neúplnú teóriu s istými veľkými otáznikmi, mal však našťastie priveľa rozumu na to aby ju preto nechal ležať ladom. Vo fyzike ťažko čakať na všetky súčiastky, lebo kým sme nevideli všetko, ani nevieme, koľko ich ešte čakať. Treba stavať z toho čo máme, počítať s tým, že je to neúplné a že po nás príde niekto kto podopĺňa a poopravuje veci zas na základe toho, čo bude mať k dipozícii on.

Faradayov zákon

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

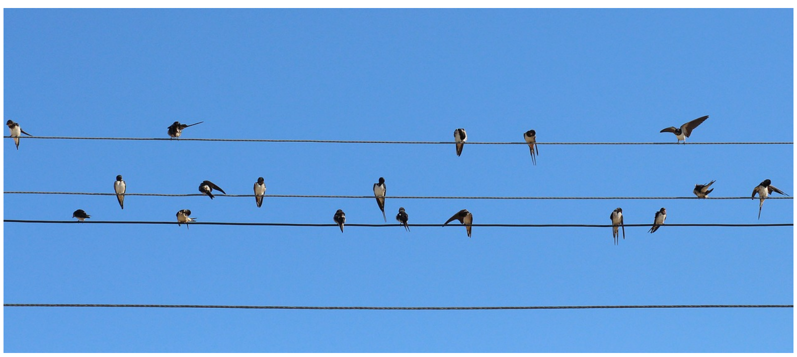
Použitím Stokesovej vety o rotácii

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}).d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dáva sa tu do súvisu cirkulácia elektrického poľa, teda integrál z neho pozdĺž uzavretej krivky ohraničujúcej nejakú plochu, s časovou zmenou magnetického toku cez túto plochu. Integrál elektrického poľa po dráhe je elektromotorické napätie. Znamienko mínus je vyjadrením známeho Lenzovho zákona. Vytvára sa napätie takej polarity, že ním indukovaný pohyb nábojov by vytváral magnetické pole opačné k tomu, ktoré indukovalo toto napätie. Preložme to do trochu bežnejšie ho jazyka. V okolí magnetu je magnetické pole. Ak vezmeme nejaký vodivý drôt a urobíme z neho uzavretú slučku, ohtaničuje nám v priestore nejakú plochu. Tok poľa vytvoreného magnetom cez túto plochu je daný jednak veľkosťou pola, veľkosťou plochy, a ich vzájomnou orientáciou, čo všetko je zahrnuté v plošnom integráli $\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$. ak sa tento tok nemení, v drôte sa neidukuje napätie. Ak však magnetický tok nejako v čase meníme, trebárs pohybom magnetu, pohybom slučky, alebo natočením slučky, potom v drôte sa touto zmenou indukuje napätie, teda (keďže kov disponuje pomerne voľnými nábojmi schopnými nasledovať požiadavky vzniknutého elektrického poľa) ampérmeter by tam registroval prúd. Ktorým smerom pôjde tento prúd? Tu veľmi vidno, ako sú Maxwellove rovnice prepletené a ťažko ich vysvetľovať po jednej. Predbehnime trochu a povedzme si, že podľa Amperovho zákona elektrický prúd tiež vytvára magnetické pole. Teda náš prúd indukovaný v drôtenej slučke vytvorí nejaké sekundárne magnetické pole, a jeho polarity bude podľa Lenzovho zákona opačná ako polarita primárneho magnetického poľa. Je to mimoriadne významné mínus, podobne (a nie celkom nezávisle) významné ako znamienko kombinujúce časové a priestorové derivácie vo vlnovej rovnice, alebo relatívne mínus medzi silou smerom do rovnovážnej polohy a výchylkou z tejto rovnovážnej polohy pri harmonickom oscilátore. Šírenie svetla vákuom, cez miliardy megaparsekov pomedzi hviezdy, má svoj odraz aj v tomto mínus. Oproti tomuto je technické využitie tohto javu azda neveľmi impozantné, ale patrí sa ho spome-



Obr. 3: Naprieč kontinentmi pomohol Faradayov zákon vybudovať stretávacie lokality pre lastovičky.

núť: máme tu možnosť premieňať mechanickú či tepelnú energiu na elektrickú. Voda z priehrady alebo rozpínajúca sa zohriata para môžu mechanicky meniť tok magnetického poľa vo vodivých slučkách jednoduchým otáčaním či už týchto slučiek alebo magnetov, indukujúc tak napätie ktoré sa potom využije - v typických prípadoch zas na nejakú mechanickú prácu alebo teplo. Skladovanie energie v elektrickom poli je teda medzikrok, ale z hľadiska logistiky vcelku významný. Prepraviť energiu elektrickým vedením je často jednoduchšie ako každému navoziť tony uhlia či uránu alebo postaviť pri každom podniku priehradu.

Ešte tu upozornime aj na statický prípad, totiž keď časové derivácie polí sú nulové. V takom prípade platí $\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$, v súlade s konzervatívnosťou elektrostatického poľa, pre ktoré platí, že integrál $\int \vec{E}.d\vec{l} = 0$ závisí len na rozdiele potenciálov medzi koncovými bodmi, a teda pre uzavretú krivku je nulový. Treba však rozumieť, že statická situácia je *špeciálny* prípad, samozrejme pokrytý Maxwellovými rovnicami.

Ampérov zákon a Maxwellov prídavok

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

Použitím Stokesovej vety o rotácii

$$\oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}).d\vec{S} \qquad = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

dostávame diferenciálnu verziu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Toto je rovnica so zaujímavou históriou. Súvis cirkulácie magnetického poľa pozdĺž nejakej uzavretej krivky s prúdom pretekajúcim plochou, ktorú tá krivka ohraničuje, bol dobre experimantálne podložený. V statickom prípade, keď veci nezávisia od času, Maxwellov príapevok samozrejme nehrá rolu a pôvodný Ampérov zákon dáva dobré výsledky. Ale objav súvisu s časovou zmenou toku elektrického poľa (teda nielen toku nábojov) bol práve tým Maxwellovým príspevkom, ktorý robí zo všetkých rovníc, ktoré teraz nesú ako súbor jeho meno, konzistentnú vec. Pri spätnom pohľade sa tento príspevok priam pýta do rovníc kvôli symetrii. Ak zmena magnetického toku indukuje elektrické pole, prečo by zmena elektrického toku neindukovala magnetické? Po vojne je ľahko byť generálom - v čase, keď Maxwell robil štúdie, bolo novinkou že magnetizmus a elektrina vôbec súvisia, a o nejakej hlbokej symetrii v ich vzťahu bolo ťažko hovoriť, než k tomu presekal cestu. Ako bolo spomenuté, aj dnešné značenie komponent už je prispôsobené symetrii, ktorá však pred Maxwellom nebola známa. A netreba zatvárať oči pred faktom, že doteraz používame pojmy, v ktorých by bolo nezmyslom predstierať absolútnu symetriu magnetických a a elektrických pojmov - viď elektrické monopoly a magnetické dipóly. Je to azda spôsobené aj tým, že nevnímame konfiguračný ("pozičný") a hybnostný ("pohybový") priestor celkom symetricky, čo by však ani nebolo celkom namieste vzhľadom na to, že časové a priestorové pojmy síce súvisia veľmi, veľmi úzko, ale čas nie je "len ďalší rozmer", bez ohľadu na skratkovité tvrdenie kdejakých popularizačných aktivít.

Pozrime sa však na nevyhnutnosť prídavku, Maxwellovho posuvného prúdu, z hľadiska zákona zachovania elektrického náboja, teda rovnice kontinuity. Z tohto hľadiska Ampérov zákon nemôže byť "celý príbeh". Vezmime tie dve z Maxwellových rovníc, ktoré obsahujú zdroje, teda hustotu náboja a prúdu - Gaussov zákon pre elektrické pole a hustotu náboja, a Ampérov zákon pre magnetické pole a elektrický prúd. Do tohto druhého pridajme akože zatiaľ neznámu položku $\vec{X}$, a ukážme, čomu s amusí rovnať, ak má byť rovnica kontinuity zachovaná:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{X}$$

Rovnica kontinuity (6) viaže časovú deriváciu hustoty náboja a divergenciu hustoty prúdu. Hustota náboja vystupuje v Gaussovom zákone, hustota prúdu v Ampérovom. Preto poderivujme Gaussov zákon podľa času a vezmime divergenciu Ampérovho zákona, prenásobme vhodne permitivitou a podeľme permeabilitou aby sa ukázali členy z rovnice kontinuity

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\mu_0} vec\nabla.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X}$$

a sčítajme takto upravené rovnice:

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X}$$

Nezabudnime, že divergencia rotácie je nulová, a teda máme

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J}$$

Ak teda platí rovnica kontinuity, potom pre prídavok k Ampérovmu zákonu musí platiť

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{\nabla}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.\vec{X} &= 0 \\ \vec{\nabla}.(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{X}) &= 0 \\ \vec{X} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

čo je práve člen dodaný Maxwellom.

Ďaleko od zdrojov

Vo vákuu, v oblastiach, kde nie sú náboje ani prúdy, stále môžu byť - a sú - elektrické a magnetické polia. Maxwellove rovnice tam vyzerajú nasledovne:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{E}.d\vec{S} = 0 \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

$$\tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \oint_{\partial S} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\tag{10}$$

Upozornime tu na pozoruhodnú symetriu medzi poliami. Až na jedno mínus a konštanty ktoré sú nevyhnutné kvôli konzistentnosti zvolených jednotiek, rovnice vzniknuté zámenou $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sa nelíšia od nezamenenej verzie[5]. Môžeme sa pokúsiť formálne rozseparovať ($\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyjadriť nie jedno pomocou druhého, ale každé zvlášť.) Vieme, že rotácia $\vec{B}$ je úmerná časovej zmene $\vec{E}$ a opačne, a vieme aj, že nabla operátor komutuje s časovými deriváciami (keďže parciálne derivácie podľa času a priestoru ako nezávislých premenných komutujú). Vezmime teda rotáciu posledných dvoch rovníc

[5]Mimochodom, spomenuté mínus nie je žiadnou chybou krásy. Po malom rýchlokurže relativity je zjavné že súvisí so štruktúrou časopriestoru a na tej ťažko hľadať chyby krásy.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$(12)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

ešte uveďme, že rotácie rotácie je gradient divergencie mínus divergencia gradientu (laplacián) tohto poľa:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V}) - \Delta\vec{V} \tag{13}$$

Potom pre naše polia máme

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

člen rovný divergencii bude s ohľadom na prvé dve Maxwellove vákuové rovnice nulový:

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Jedna vec je, že po (formálnom; stále platí že mimo zdrojov sa tie polia udržujú navzájom, zmena jedného indukuje druhé) rozreťazení obe polia spĺňajú rovnakú rovnicu, žiadne mínus ani konštanta ten súlad neruší. Druhá je, že tá rovnica je vlnová! Toto je niečo, čo už dnes asi nevyvolá spadnutie sánky, jednak kvôli notorickej poučke o elektromagnetickom vlnení a jednak že sme často zvyknutí prehliadať, čo sa vlastne stalo. Tak čo sa stalo? Niekoľko rovníc pozbieraných ako súhrn experimentov s vodičmi a magnetmi, plus dômyselný prídavok ktorý chýbal do konzistentnosti, k tomu matametický rozmar "poďme rozreťaziť a prišli sme k tomu, že magnetické a elektrické pole poslúchajú rovnicu formálne rovnakú ako vlny na jazere alebo husľovej strune Faktor $\epsilon_0\mu_0$ stojí pritom na mieste, kde obvykle stojí prevrátená hodnota kvadrátu rýchlosti šírenia vlny. Ešte aj z hľadiska fyzikálnych jednotiek, v ktorých meriame permitivitu a permeabilitu, to sedí. A ak to nestačilo - permitivita a permeabilita boli namerané, a po dosadení číselných hodnôt zodpovedajúcich vlastnostiam vákua prídeme k tomu, že zodpovedajúca rýchlosť zodpovedá cca $2,99.10^8$m s^{-1}, čo súhlasí s nameranou rýchlosťou svetla na povážlivo veľa platných cifier, priveľa na to, aby sme túto zhodu konštánt pripísali náhode alebo experimentálnej neistote.

Nielen že elektrina a magnetizmus nejestvujú separátne - ani od svetla nie sú separátne! Toto je jedno z veľkých zjednotení vo fyzike, porovnateľné s Newtonovým objavom, že Mesiac aj jablká padajú podľa toho istého princípu, napriek tomu že okrajové podmienky robia z tých pádov veľmi odlišné divadlo. A elektromagnetizmus bol kľúčový aj pre Newtona, bez tohto jeho vĺn by Newton to jablko a Mesiac nevidel. To, že vlny nie sú celý príbeh nám nemá kaziť radosť z tejto kapitoly fyziky. Ani kvantové zovšeobecnenie nie je celý príbeh.

This project No. 2259/02/01 has received funding from the European Union´s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 945478.